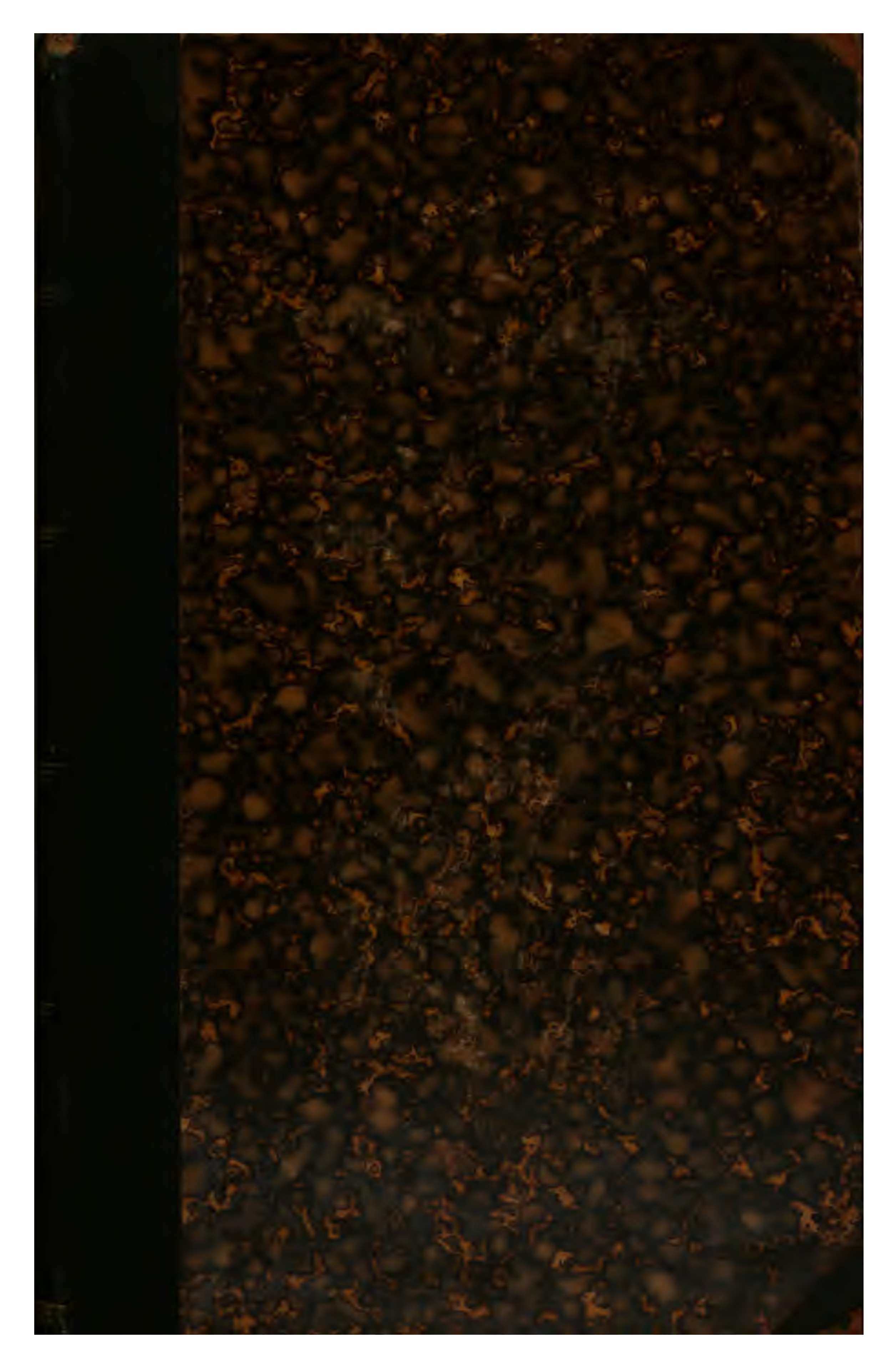
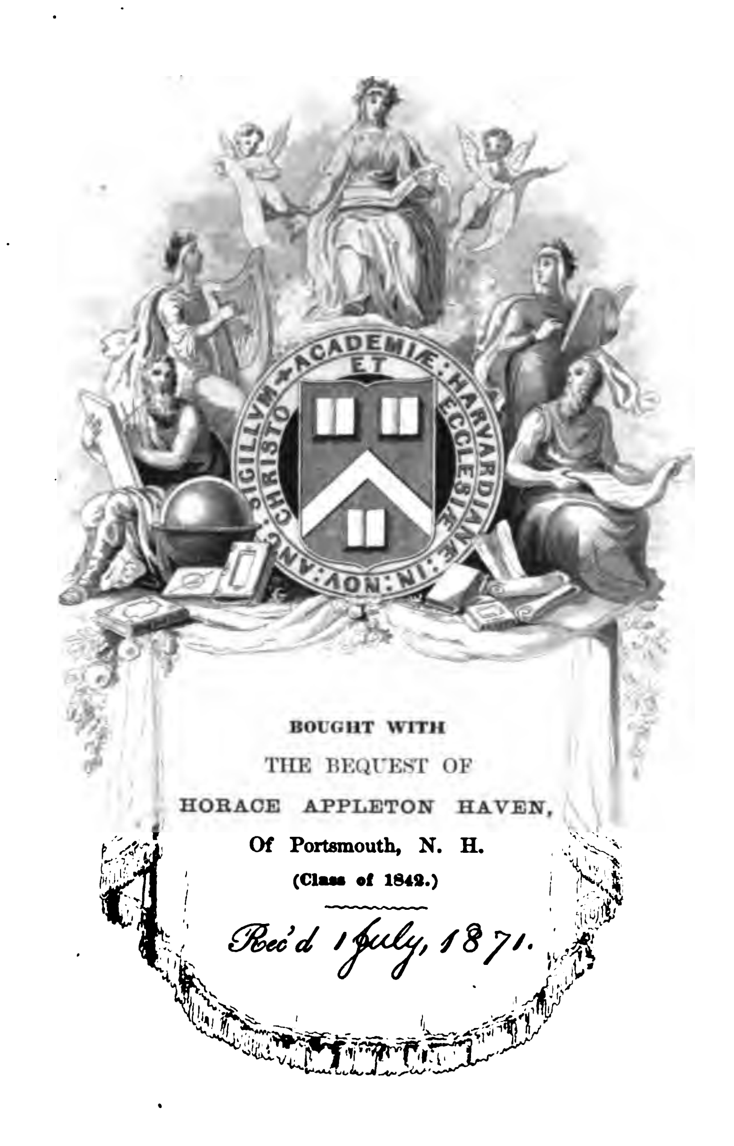
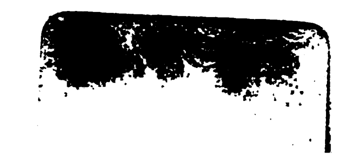



ACADEMIÆ HARVARDIANÆ
SIGILLVM
CHRISTO ET ECCLESIÆ
IN: NOV: ANG:
BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
Of Portsmouth, N. H.
(Class of 1842.)
Rec'd 1 July, 1871.



Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Siebenundzwanzigster Theil.

Mit neun lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1856.

1871, July 1.
Haven Fund.

Inhaltsverzeichniss des siebenundzwanzigsten Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Mechanik.

Physik.

(S. Mechanik. Nr. XXV. Heft II. S. 224.)

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

De formula integrali $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{B'x^3+C'x^2+D'x+E'}}$.

Auctore

Dre. *Christiano Fr. Lindman*,

Lect. Strengn.

---

§. 1.

Multis locis demonstratum est, omnia integralia, quae formula

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{A'x^4+B'x^3+C'x^2+D'x+E'}}, \quad (f(x) = \text{functioni rationali})$$

continentur, ponendo $x=\frac{p+qy}{1+y}$ mutari posse in alia, ubi impares dignitates variabilis y sub signo radicali non reperiantur, et deinde in functiones ellipticas. Quae quum ita sint, nihil aliud, si est $A'=0$, opus esse videtur, nisi ut una radix aequationis

$$A'x^4+B'x^3+C'x^2+D'x+E'=0$$

infinito aequalis constituatur et ratio habeatur mutationum, quas haec res formulis reductionum affert. Quae quidem ratio adeo simplex atque idonea videtur, ut in ea forsitan quaerenda sit caussa, cur mentio casus allati ($A'=0$) nusquam fere sit facta *). Hic tamen casus, meo quidem judicio, dignus est, de quo singulatim

---

*) In tabulis integralium a Cel° Minding editis (Berol. 1849) mentio hujus rei facta est, sed regula data interdum fallit, quia ratio limitum non est habita.

inquiratur, quia ratio illa et interdum in errorem potest inducere neque facillima via ad optatum exitum videtur esse. Itaque mihi propositum est scrutari integrale

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{B'x^3+C'x^2+D'x+E'}},$$

ubi B' non est nihilo aequalis. Quia igitur B' est quantitas quaedam, valorem ejus absolutum disjungere hujusque radicem quadratam ante signum radicale ut factorem licet collocare. Sequitur, ut coëfficiens ipsius x^3 semper $=\pm 1$ haberi possit.

§. 2.

Si α, β, γ sunt radices aequationis, quae, quantitate sub signo radicali $=0$ posita, oritur, haec quantitas mutatur in

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

aut in

$$(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x),$$

prout signum ipsius x^3 est $+$ aut $-$. Necesse est, eas quantitates, quae per R et R_1 resp. designentur, positivas esse, si integrale poterit esse reale. Quo pacto sint positivae, postea exquiretur. Nunc eas positivas facio et primum de integrali

$$J=\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

disserere adgredior.

Posito $x=\frac{p+qy}{1+y}$, evadit $dx=\frac{(q-p)\,dy}{(1+y)^2}$ et limites a, b transeunt resp. in $\frac{a-p}{q-a}$, $\frac{b-p}{q-b}$. Si loco ipsius x in

$$R=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma$$

quantitatem $\frac{p+qy}{1+y}$ substituimus et brevitatis caussa ponimus

$$\alpha+\beta+\gamma=A,\quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=B,\quad \alpha\beta\gamma=C,$$

quantitas R mutatur in

$$\frac{(p+qy)^3-A(p+qy)^2(1+y)+B(p+qy)(1+y)^2-C(1+y)^3}{(1+y)^3}.$$

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{\sqrt{B'x^3 + C'x^2 + D'x + E'}}.$$

Numerator et denominator hujus fractionis per $1+y$ multiplicandi sunt, ut denominator fiat quadratum et extra signum radicale poni possit. Quo facto numerator evadit:

$$\begin{aligned}
&p^3 - Ap^2 + Bp - C \\
&+ (p^3 + 3p^2q - 2Apq - 2Ap^2 + 3Bp + Bq - 4C)y \\
&+ (3pq(p+q) - A(p+q)^2 - 2Apq + 3B(p+q) - 6C)y^2 \\
&+ (q^3 + 3pq^2 - 2Apq - 2Aq^2 + 3Bq + Bp - 4C)y^3 \\
&+ (q^3 - Aq^2 + Bq - C)y^4.
\end{aligned}$$

Jam quantitates p et q sic eligendae sunt, ut coëfficientes imparium dignitatum variabilis y nihilo fiant aequales, ob eamque caussam valores harum quantitatum ex aequationibus

$$p^3 + 3p^2q - 2Apq - 2Ap^2 + 3Bp + Bq - 4C = 0,$$
$$q^3 + 3pq^2 - 2Apq - 2Aq^2 + 3Bq + Bp - 4C = 0$$

quaerendi sunt. Quae quia aequationes tertii sunt gradus, eliminatio molestiam haud parvam afferret, si his aequationibus ipsis uteremur. Aequationibus vero addendis subtrahendisque prodeunt

$$(p+q)^3 - 2A(p+q)^2 + 4B(p+q) - 8C = 0,$$
$$(p-q)\{(p+q)^2 + 2pq - 2A(p+q) + 2B\} = 0.$$

Posteriori aequationi satisfit, si uterlibet factor ponitur nihilo aequalis. Quum vero manifesto fieri non possit, ut in valore ipsius x quantitas $p=q$ sit, hae quantitates ex aequationibus

$$(p+q)^3 - 2A(p+q) + 4B(p+q) - 8C = 0,$$
$$(p+q)^2 + 2pq - 2A(p+q) + 2B = 0$$

investigandae sunt. Prior aequatio cum aequatione

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

comparata illico suppeditat

$$p+q = 2\alpha, \quad p+q = 2\beta, \quad p+q = 2\gamma.$$

Qui valores in posteriore aequatione substituti dabunt resp.

$$pq = \alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma, \quad p+q = \alpha\beta + \beta\gamma - \alpha\gamma, \quad p+q = \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\beta,$$

unde denique reperiuntur

$$\left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = \alpha \pm \sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},$$

$$\left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = \beta \pm \sqrt{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},$$

$$\left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = \gamma \pm \sqrt{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

§. 3.

Jam quaerendum est, utrum omnes valores sint idonei, an unus, an duo. Primum patet, ejusmodi tantum valores adhiberi posse, qui quantitates p et q reddant reales. Aequatio vero tertii gradus aut unam habet radicem realem aut tres. Si omnes radices aequationis $R=0$ sunt reales, nihil prorsus impedit, quominus $\alpha > \beta > \gamma$ ponatur. Qua re posita, et primus et tertius valor quantitatum p et q est realis. Respectu igitur ejus rei uterque valor est idoneus, sed exquirendum est, num uterque integrali ipsi conveniat. Si superiorem valorem quantitati q tribuerimus, inferiorem quantitati p, primum systema in numeratore, de quo supra (§. 2.) dictum est, dabit

$$p^3 - Ap^2 + Bp - C = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\{\sqrt{\alpha-\gamma} - \sqrt{\alpha-\beta}\}^2,$$

coëfficientem ipsius $y^2 = -2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(2\alpha-\beta-\gamma)$,

$$q^3 - Aq^2 + Bq - C = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\{\sqrt{\alpha-\gamma} + \sqrt{\alpha-\beta}\}^2$$

atque ideo polynomium

$$R = \frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{(1+y)^4}[(\sqrt{\alpha-\gamma} - \sqrt{\alpha-\beta})^2 - 2(2\alpha-\beta-\gamma)y^2 + (\sqrt{\alpha-\gamma} + \sqrt{\alpha-\beta})^2 y^4].$$

Tertium systema eodem modo dabit

$$p^3 - Ap^2 + Bp - C = -(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\{\sqrt{\alpha-\gamma} + \sqrt{\beta-\gamma}\}^2,$$

coëfficientem ipsius $y^2 = 2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\beta-2\gamma)$,

$$q^3 - Aq^2 + Bq - C = -(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\{\sqrt{\alpha-\gamma} - \sqrt{\beta-\gamma}\}^2$$

atque ideo polynomium

$$R = \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{(1+y)^4}[-(\sqrt{\alpha-\gamma} + \sqrt{\beta-\gamma})^2 + 2(\alpha+\beta-2\gamma)y^2 - (\sqrt{\alpha-\gamma} - \sqrt{\beta-\gamma})^2 y^4].$$

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{B'x^3+C'x^2+D'x+E'}}.$$

Valoribus quantitatum p et q substitutis, primum systema dabit

$$dx=\frac{2\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}}{(1+y)^2}dy$$

et tertium

$$dx=\frac{2\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}}{(1+y)^2}dy.$$

Substitutionibus rite factis et radice quadrata termini constantis disjuncta, invenimus

e primo systemate:

$$J=\frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}-\sqrt{\alpha-\beta}}\int_g^G \frac{dy}{\sqrt{1-\frac{2(2\alpha-\beta-\gamma)}{(\sqrt{\alpha-\gamma}-\sqrt{\alpha-\beta})^2}y^2+k^2y^4}},$$

ubi est

$$G=\frac{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}-\alpha+b}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}+\alpha-b},$$

$$g=\frac{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}-\alpha+a}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}+\alpha-a},$$

$$k=\frac{\sqrt{\alpha-\gamma}+\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha-\gamma}-\sqrt{\alpha-\beta}};$$

et e tertio systemate:

$$J=\frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}+\sqrt{\beta-\gamma}}\int_{g_1}^{G_1} \frac{dy}{\sqrt{-1+\frac{2(\alpha+\beta-2\gamma)}{(\sqrt{\alpha-\gamma}+\sqrt{\beta-\gamma})^2}y^2-k_1^2y^4}},$$

ubi est

$$G_1=\frac{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}-\gamma+b}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}+\gamma-b},$$

$$g_1=\frac{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}-\gamma+a}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}+\gamma-a}.$$

$$k_1=\frac{\sqrt{\alpha-\gamma}-\sqrt{\beta-\gamma}}{\sqrt{\alpha-\gamma}+\sqrt{\beta-\gamma}}.$$

Facile deinde inveniuntur formulae

$$J=\frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}-\sqrt{\alpha-\beta}}\int_g^G\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},\quad (1)$$

$$J=\frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}+\sqrt{\beta-\gamma}}\int_{g_1}^{G_1}\frac{dy}{\sqrt{(y^2-1)(1-k_1^2y^2)}}.\quad (2)$$

§. 4.

Quoniam igitur duo valores integralis J inventi sunt, decernendum est, num ambo adhiberi possint, id quod fieri non potest, nisi omnes valores ipsius y intra limites (inclus.) quantitatem sub signo radicali positivam reddant. Quod ad formulam (1) attinet, neminem fugit, factorem posteriorem positivum esse non posse, nisi y^2 major est quam $\frac{1}{k^2}$. Ea conditione prior quoque factor est positivus. Sin autem y^2 non est unitate minor, uterque factor negativus evadit ($k^2>1$) atque ideo productum positivum. Eodem modo invenitur, quantitatem y^2 in formula (2) neque unitate minorem nec quantitate $\frac{1}{k_1^2}$ majorem ($k_1^2<1$) esse oportere.

Jam ad functionem

$$R=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

redeamus. Patet eam esse $\geqq 0$ ab $x=\gamma$ ad $x=\beta$ et ab $x=\alpha$ usque ad $x=\infty$. Substitutis igitur β et γ resp. pro b et a in limitibus formulae (1), invenitur $G=\frac{1}{k}$, $g=-\frac{1}{k}$. Quia vero G minuitur, decrescente b, et g major fit, crescente a, sequitur, ut formula (1) semper uti liceat, quum est $b\leqq\beta$, $a\geqq\gamma$.

Inquisitio formulae (1) paullo molestior fit, quum b et a inter limites α et ∞ cadunt. Quia enim b et a tum ejusmodi valores accipere possunt, ut denominatores limitum G et g nihilo fiant aequales, intervallum, de quo agitur, in duas partes dividendum est. Quod ubi faciendum sit, hoc modo potest dijudicari. Uterque limes functione

$$F(z)=\frac{\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}-\alpha+z}{\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\alpha-z}$$

continetur, ubi est z variabilis. Variabili $z=\infty$ facta, evadit $F(\infty)=-1$ et praeterea perspicitur, functionem illam negativam et respectu valoris absoluti unitate majorem permanere, quum z minuitur. Si z usque ad $\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\alpha$ fuerit minuta,

$F(\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\alpha)=-\infty$ evadet. Posita porro $z=\alpha$, fit $F(\alpha)=1$ et crescit, crescente z. Si z perpetuo crescit usque ad $\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\alpha$, fit $F(\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\alpha)=\infty$. Intra limites igitur ita constitutos variabilis y nullum nanciscitur valorem, qui quantitatem sub signo radicali negativam reddat. Itaque formula (1) uti licet ab $a\geqq\alpha$ ad $b\leqq\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\alpha$ et ab $a\geqq\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\alpha$ ad $b\leqq\infty$.

Quod si est $b>\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\alpha>a$, alter limes est positivus, alter negativus interque eos valor $\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\alpha$ quantitatis z cadit, qui $F(z)$ infinito aequalis reddit. Attamen quum limites idem signum non habent, variabilem sic variantem facere solent, ut per 0, non per infinitum transeat. Hoc igitur casu formula (1) rejicienda est aut integrale ita disjungendum, ut ea quantitas inter a et b, quae $F(z)=\infty$ reddit, fiat limes intermedius. Quo facto invenitur

$$J=\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{R}}=\int_a^{\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\alpha}\frac{dx}{\sqrt{R}}+\int_{\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\alpha}^{b}\frac{dx}{\sqrt{R}},$$

quae integralia singulatim tractanda sunt. Variabili $x=\frac{p\pm qy}{1+y}$ in utroque facta, iidem quantitatum p et q valores atque antea prodeunt. Nihil aliud mutatur, nisi limites, quamobrem invenimus

$$J=\frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}-\sqrt{\alpha-\beta}}\left\{\int_\varepsilon^\infty\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\right.$$
$$\left.+\int_{-\infty}^{G}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\right\}.$$

Ut limites fiant finiti, in priore integrali $y=\frac{1}{t}$, in posteriore $y=-\frac{1}{t}$ facienda est, unde prodit

$$J=\frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}+\sqrt{\alpha-\beta}}\left\{\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\frac{t^2}{k^2})}}\right.$$
$$\left.+\int_0^{-\frac{1}{G}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\frac{t^2}{k^2})}}\right\}. \quad (3)$$

Ex his colligitur, primum systema valorum quantitatum p et q semper adhiberi posse, dummodo meminerimus, formulam (3), non (1), utendam esse, quum aliquis quantitatis z valor inter a et b functionem

$$\frac{\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}-\alpha+z}{\sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\alpha-z}$$

infinitam reddit. Dixerit fortasse quispiam, formulam (3) molestam esse, quippe quae duo integralia pro uno suppeditet, et experiendum esse, num tertio systemate valorum quantitatum p et q propositum facilius consequi liceat. Quod quidem faciendum est et mox fiet; sed non est obliviscendum, ei, qui ratione Cel[i] Legendre *) uti volet, duo quoque integralia quaerenda esse, nisi alter limes est $=0$.

§. 5.

Ad formulam (2) jam transeamus. Functio

$$\varphi(z)=\frac{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}-\gamma+z}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}+\gamma-z}$$

ambo limites complectitur. Variabili $z=\gamma$, deinde $z=\beta$ facta, prodit

$$\varphi(\gamma)=1,\quad \varphi(\beta)=\frac{\sqrt{\alpha-\gamma}+\sqrt{\beta-\gamma}}{\sqrt{\alpha-\gamma}-\sqrt{\beta-\gamma}}=\frac{1}{k_1}.$$

Quia $\alpha>\beta>\gamma$ constituimus, habemus $\alpha-\gamma>\beta-\gamma$, $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)>(\beta-\gamma)^2$, $\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}+\gamma>\beta$, unde colligitur, denominatorem ipsius $\varphi(z)$ nihilo aequalem fieri non posse, si z quemlibet intra γ et β valorem habet. Posita porro $z=\alpha$, tum $z=\infty$, evadit

$$\varphi(\alpha)=-\frac{\sqrt{\alpha-\beta}+\sqrt{\beta-\gamma}}{\sqrt{\alpha-\beta}-\sqrt{\beta-\gamma}},\quad \varphi(\infty)=-1.$$

Denominator ipsius $\varphi(z)$ nihilo aequalis non fit, si quilibet valor intra limites α et ∞ datur. Nam si id fieri posset, valor quidam quantitatis z reperiri deberet, qui quantitatem $\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}+\gamma$ nihilo aequalem redderet; sed quia est $\alpha>\beta>\gamma$, manifesto est $\alpha-\gamma>\beta-\gamma$, $(\alpha-\gamma)^2>(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$, $\alpha>\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}+\gamma$.

---

*) Vide v. gr. Grunert, Supplemente zu Klügel's mathem. Wörterbuche, pag. 150. seqq.

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{B'x^3+C'x^2+D'x+E'}}.$$

Quia igitur minimus etiam valor ipsius z intra limites a et ∞ major est quantitate $\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}+\gamma$, formula (2) semper et sine exceptione adhiberi potest.

In casu speciali, a quo formula (3) originem traxit, nemo non videt, formula (2) uti licere, qua tamen valor integralis proxime verus non facilius quam usu formulae (3) invenitur, nisi alter limes formulae (2) sit $=0$. Quia vero e valoribus ipsius $\varphi(z)$ nuper allatis intelligitur, id numquam evenire posse, formula (2) respectu hujus rei formulae (3) non praestat.

§. 6.

Ad alterum integrale

$$J_1=\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{R_1}}$$

transeamus. Primum patet, quantitatem R_1 positivam esse oportere, quod evenire non potest, nisi x intra limites $-\infty$ et γ aut intra β et α cadit. Deinde facile intelligitur, valores quantitatum p et q eosdem atque antea fieri. Substituendo $\frac{p+qy}{1+y}$ pro x idem polynomium invenitur, praeterquam quod signa sunt mutata.

Itaque reperitur

primo systemate:

$$J_1=\frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}-\sqrt{\alpha-\beta}}\int_g^G \frac{dy}{\sqrt{-1+\frac{2(2\alpha-\beta-\gamma)}{(\sqrt{\alpha-\gamma}-\sqrt{\alpha-\beta})^2}y^2-k^2y^4}},$$

tertio systemate:

$$J_1=\frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}+\sqrt{\beta-\gamma}}\int_{g_1}^{G_1} \frac{dy}{\sqrt{1-\frac{2(\alpha+\beta-2\gamma)}{(\sqrt{\alpha-\gamma}+\sqrt{\beta-\gamma})^2}y^2+k_1^2y^4}},$$

ubi G, g, k, G_1, g_1, k_1 idem atque antea significant. Deinde facile habebimus formulas

$$J_1=\frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}-\sqrt{\alpha-\beta}}\int_g^G \frac{dy}{\sqrt{(k^2y^2-1)(1-y^2)}}, \quad (4)$$

$$J_1=\frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}+\sqrt{\beta-\gamma}}\int_{g_1}^{G_1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}}. \quad (5)$$

Formula (4) uti licet

$$\text{ab } a \overset{>}{=} -\infty \text{ ad } b \overset{<}{=} \gamma, \quad \text{h. e. a } g \overset{>}{=} -1 \text{ ad } G \overset{<}{=} -\frac{1}{k}$$

et

$$\text{ab } a \overset{>}{=} \beta \text{ ad } b \overset{<}{=} \alpha, \quad \text{h. e. a } g \overset{>}{=} \frac{1}{k} \text{ ad } G \overset{<}{=} 1$$

atque ideo semper

Formula (5) adhiberi potest

$$\text{ab } a \overset{>}{=} -\infty \text{ ad } b \overset{<}{=} \gamma, \text{ h. e. a } g_1 \overset{>}{=} -1 \text{ ad } G_1 \overset{<}{=} 1$$

et

$$\text{ab } a \overset{>}{=} \sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} + \gamma \text{ ad } b \overset{<}{=} \alpha, \text{ h. e. a } g_1 \overset{>}{=} -\infty \text{ ad } G_1 \overset{<}{=} -\frac{1}{k}$$

et

$$\text{ab } a \overset{>}{=} \beta \text{ ad } b \overset{<}{=} \sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} + \gamma, \text{ h. e. a } g_1 \overset{>}{=} \frac{1}{k_1} \text{ ad } G_1 \overset{<}{=} \infty.$$

Quod si est $b > \sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} + \gamma > a$, formula (5) ita se habet, ut antea formula (1). Eodem modo reperitur formulae (3) similis formula

$$J_1 = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma} + \sqrt{\beta-\gamma}} \left[\int_0^{\frac{1}{g_1}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)\left(\frac{u^2}{k_1^2}-1\right)}} + \int_0^{-\frac{1}{G_1}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)\left(\frac{u^2}{k_1^2}-1\right)}} \right]. \quad (6)$$

§. 7.

Postquam vidimus, quomodo integralia J et J_1 ad formam propositam possint reduci, quum omnes radices aequationum $R=0$, $R_1=0$ sunt reales, reliquum est, ut in haec integralia inquiramus, quum una tantum radix harum aequationum est realis. Faciamus $\alpha =$ radici reali, $\beta = f + hi$, $\gamma = f - hi$. Primo aspectu apparet, quantitates p et q in primo tantum systemate esse reales. Superiore valore quantitati q, inferiore quantitati p dato substitutoque $\frac{p+qy}{1+y}$ pro x, eaedem formulae inveniuntur, quae supra n[ris] (1)

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{B'x^3+C'x^2+D'x+E'}}.$$

et (4) notatae sunt, si in his ponitur $\beta=f+hi$, $\gamma=f-hi$. Hoc casu est

$$R=(x-\alpha)\{(x-f)^2+h^2\},$$

$$R_1=(\alpha-x)\{(x-f)^2+h^2\},$$

atque ideo posterior factor positivus, quicunque valor realis variabili x datur. Sequitur, ut a et b in illo casu non minores quantitate α, in hoc non majores eadem quantitate esse debeant, si integrale erit reale.

§. 8.

Ex antecedentibus colligitur, reductionem integralium J et J_1, si habentur casus speciales integralis

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A'x^4+B'x^3+C'x^2+D'x+E'}},$$

aliquantum molestiae afferre et diligentem inquisitionem postulare. Quando omnes radices aequationum $R=0$ et $R_1=0$ sunt reales, formulae sane (2) et (4), quibus semper uti licet, semel eligi possunt; quod si una tantum radix aequationis $R=0$ est realis, necesse est formulam (1) adhibere. Sequitur, ut tres semper formulae utendae sint, nisi quis radices aequationum $R=0$ et $R_1=0$ segregare volet, quod tamen deductionem singularum formularum exiget. Quae quum ita sint, operae pretium est conari, num alia ratio integralia J et J_1 reducendi, ita ut quantitas sub signo radicali sibi induat formam Dy^4+Ey^2+F, reperiri possit.

Si signa, quibus antea usi sumus, retinuerimus, facile inveniemus, polynomium R, quum omnes radices α, β, γ aequationis $R=0$ sunt reales et $\alpha>\beta>\gamma$, positivam esse quantitatem, si variabili x omnes valores intra γ et β et intra α et ∞ tribuuntur. Sin autem aequatio $R=0$ unam tantum habet radicem realem, quae sit γ, polynomium R est positivum, dummodo valor ipsius x non minor sit quam γ. Quia igitur x numquam est minor quam γ, possumus facere $x-\gamma=y^2$, quo facto invenimus

$$J=2\int_{\sqrt{a-\gamma}}^{\sqrt{b-\gamma}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2+\gamma-\alpha)(y^2+\gamma-\beta)}}, \qquad (7)$$

quod integrale formam optatam habet et sine ullo negotio ad functionem ellipticam primae speciei potest reduci.

Quod ad integrale J_1 attinet, facile intelligitur, variabilem x neque fieri posse majorem maxima radice reali aequationis $R_1 = 0$, si quando omnes sunt reales, neque majorem radice reali, si una tantum est realis. Sit α radix maxima realis vel sola radix realis, si una tantum datur; facere licet $\alpha - x = y^2$, unde invenitur

$$J_1 = 2\int_{\sqrt{\alpha-b}}^{\sqrt{\alpha-a}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2+\beta-\alpha)(y^2+\gamma-\alpha)}}, \qquad (8)$$

de quo eadem dici possunt ac de formula (7).

II.

Einige Punkte über die Bestimmung der Constanten, welche bei Integration der endlichen Differenzengleichungen eingehen.

Von

Herrn Dr. *G. Zehfuss,*

provisorischem Lehrer der höheren Mathematik und höheren Mechanik an der höheren Gewerbschule zu Darmstadt.

---

§. 1.

Für die Theorie der endlichen Differenzengleichungen ist die Einführung des in einem Bruche $\frac{x}{h}$ enthaltenen Bruchtheiles, abgesehen von den in $\frac{x}{h}$ enthaltenen Ganzen, von grossem Nutzen. Wir wollen ihn in diesem Aufsatze durch $\beta\left(\frac{x}{h}\right)$ oder auch kür-

zer durch $\beta\frac{x}{h}$ bezeichnen. Die Zahl $\frac{x}{h}-\beta\left(\frac{x}{h}\right)$ wird also allemal eine ganze sein. Die Function $\beta\left(\frac{x}{h}\right)$ hat z. B. die Eigenschaften

$$\beta\left(\frac{x}{h}\right)=\beta\left(\frac{x+h}{h}\right)=\beta\left(\frac{x+2h}{h}\right)=\ldots,\quad 1^{\frac{x}{h}}=1^{\beta\left(\frac{x}{h}\right)} \text{ u. s. w.}$$

Um eine endliche Differenzengleichung $n$ter Ordnung aufzulösen, kann man sich der Formel

$$y_x=y_a+\frac{x-a}{h}\Delta y_a+\frac{(x-a)(x-a-h)}{h.2h}\Delta^2 y_a+\ldots$$

bedienen, welche aber nur wahr ist, wenn $\frac{x-a}{h}$ eine ganze Zahl oder y_x eine ganze rationale Function von x vorstellt. Um jener Anforderung zu genügen, reicht es hin, $a=h\beta\left(\frac{x}{h}\right)$ zu setzen; so wird man die für alle Fälle geltende Formel haben:

(1)

$$y_x=y_{h\beta\frac{x}{h}}+\left(\frac{x}{h}-\beta\frac{x}{h}\right)\Delta y_{h\beta\frac{x}{h}}+\frac{\left(\frac{x}{h}-\beta\frac{x}{h}\right)\left(\frac{x}{h}-\beta\frac{x}{h}-1\right)}{1.2}\Delta^2 y_{h\beta\frac{x}{h}}+\ldots,$$

welche wir nun zur Construction des Ausdruckes y_x benutzen. Man kann nemlich aus der vorgelegten Differenzengleichung $n$ter Ordnung durch successives Differenziren Gleichungen ableiten, in welchen $\Delta^{n+1}y_x$, $\Delta^{n+2}y_x$, $\Delta^{n+3}y_x\ldots$ vorkommen. In diesen, wie auch in der Urgleichung, setzen wir nun $h\beta\frac{x}{h}$ für x, und erhalten dann eben so viele Gleichungen zur Bestimmung der Werthe $\Delta^n y_{h\beta\frac{x}{h}}$, $\Delta^{n+1}y_{h\beta\frac{x}{h}}\ldots$, welche aber sämmtlich durch die n ersten Functionen $y_{h\beta\frac{x}{h}}$, $\Delta y_{h\beta\frac{x}{h}}\ldots\Delta^{n-1}y_{h\beta\frac{x}{h}}$ ausgedrückt erscheinen werden. Diese n willkührlichen Functionen sind periodische, weil

$$\beta\left(\frac{x}{h}\right)=\beta\left(\frac{x+h}{h}\right)=\beta\left(\frac{x+2h}{h}\right)\ldots$$

Da ferner

$$\Delta^{n-1}y_{h\beta\frac{x}{h}}=y_{h(n-1+\beta\frac{x}{h})}-ny_{h(n-2+\beta\frac{x}{h})}+\frac{n(n-1)}{1.2}y_{h(n-3+\beta\frac{x}{h})}-\ldots\pm y_{h\beta\frac{x}{h}}$$

ist, so wird man zur Bestimmung der n ersten Functionen der Kenntniss des ganzen, zwischen den Werthen $x=0$ und $x=nh$ begriffenen Bogens der durch die Gleichung $y=y_x$ dargestellten Curve bedürfen.

Ist nun die gegebene Differenzengleichung linear, oder kommt auch nur $\Delta^n y_x$ oder y_{x+nh} in derselben auf der ersten Potenz vor, so wird das nemliche auch für $\Delta^{n+1}y_x$, $\Delta^{n+2}y_x$.... stattfinden. In diesem Falle sind sämmtliche, aus den entsprechenden Gleichungen gezogenen Werthe von $\Delta^{n+1}y$.... eindeutig, also ist nur eine einzige Auflösung mit n periodischen Constanten y_β, Δy_β, ... $\Delta^{n-1}y_\beta$ für y_x möglich. Ist aber $\Delta^n y_x$ auf einer höheren Potenz darin enthalten, so werden $\Delta^n y_\beta$, $\Delta^{n+1}y_\beta$.... vieldeutig, und es lässt sich in diesem Falle aus der Anzahl der in dem Resultate enthaltenen willkührlichen Functionen nicht schliessen, ob die gewünschte Auflösung durch gehörige Bestimmung der n Constanten aus derjenigen Form abgeleitet werden könne, unter welcher sich das Resultat präsentirt. So hat z. B. die Gleichung

$$y=x\Delta y+(\Delta y)^2,$$

wo $\Delta x=h=1$, die zwei Auflösungen:

$$y=cx+c^2,\quad y=\frac{1}{16}-\frac{x^2}{4}-\frac{C}{2}(-1)^x+C^2(-1)^{2x},$$

wo die willkührlichen periodischen Constanten c und C bestimmt werden können, indem man $x=\beta(x)$ setzt. Mit den so bestimmten Constanten werden beide Auflösungen innerhalb des Intervalles von $x=0$ bis $x=1$ völlig übereinstimmen, und erst jenseits desselben zwei von einander abweichende Curven darstellen.

Ueber die singulären Lösungen wollen wir uns hier nicht weiter verbreiten; dieselben entstehen, wenn eine der nachfolgenden, durch Differenziren entstandenen Differenzengleichungen in mehrere Factoren zerfällt, von denen der eine nur solche Differenzen enthält, welche bereits durch die vorhergehenden Gleichungen bestimmt waren. Dieser Factor, gleich Null gesetzt, liefert demnach eine Gleichung, welche die vorhergehenden Bestimmungen über niedere Differenzen Δy_β, $\Delta^2 y_\beta$.... wieder einschränkt, so dass sich für eine oder mehrere derselben völlig bestimmte Werthe herausstellen. Man sieht übrigens durch eine einfache Ueberlegung, dass diese Zerfällung in Factoren nur bei solchen Gleichungen statthaben könne, in welchen die höchste Differenz den ersten Grad übersteigt, dass also auch lineäre Gleichungen weder mehrere, noch singuläre Auflösungen haben können. — Das Vorhergehende lässt sich auch auf die singulären

und vielfachen Auflösungen der Differentialgleichungen anwenden, welche letzteren bis jetzt noch von Niemandem bemerkt worden zu sein scheinen. So hat z. B. die Gleichung

$$y^4y'^2 - 2axy^3y'^3 = 3a^2$$

die drei Lösungen

$$y^2 = 2cx + \frac{3a^2}{c^2}, \quad y^3 = C \pm 9ax,$$

wo c und C willkührliche Constanten vorstellen.

§. 2.

Lösen wir nun zuerst die einfachste Differenzengleichung $y_{x+h} = y_x$ oder $\Delta y_x = 0$. Es folgt hieraus $\Delta^2 y_x = \Delta^3 y_x \ldots = 0$. Diese Werthe in die Gleichung (1) substituirt, geben die Auflösung $y_x = y_{h\beta\frac{x}{h}}$. Dieselbe wird also bewerkstelligt sein, wenn man eine periodische Constante $y_{h\beta\frac{x}{h}}$ angeben kann, welche immer dieselben Werthe wiederholt, welche sie in dem Zwischenraume von $x=0$ bis $x=h$ annimmt und welche bekannt sein müssen. Um diese Aufgabe zu lösen, schreibe man die gegebene Gleichung

$$y_{x+(2n+1)\frac{h}{2n+1}} = y_x,$$

und betrachte sie als eine Gleichung der beliebigen Ordnung $2n+1$, in welcher $\Delta x = \frac{h}{2n+1}$ ist. Um partikuläre Integrale zu erhalten, setze man $y = a^{(2n+1)\frac{x}{h}}$; zur Bestimmung von a bleibt alsdann die Gleichung $a^{2n+1} = 1$, woraus sich für a die $2n+1$ Werthe ergeben:

$$1, \quad 1^{\frac{1}{2n+1}}, \quad 1^{\frac{2}{2n+1}} \ldots, \quad 1^{\frac{2n}{2n+1}},$$

wo unter 1^x der Ausdruck $\cos 2x\pi + i \sin 2x\pi$ zu verstehen ist.

Die Form

$$y_x = C_{\beta\frac{(2n+1)x}{h}} . 1^{\frac{(2n+1)x}{h}} + \overset{I}{C} . 1^{\frac{x}{h}} + \overset{II}{C} . 1^{\frac{2x}{h}} + \ldots \overset{M}{C} . 1^{\frac{2nx}{h}} \quad \text{(a)}$$

wird also, da sie $2n+1$ willkührliche periodische Functionen von

$\beta\left(\frac{(2n+1)x}{h}\right)$ enthält, die allgemeinste sein, welche y annehmen kann, so dass es sich nur noch um die Bestimmung der periodischen Functionen $C, \overset{I}{C} \dots \overset{M}{C}$ handelt. — Zuvor setzen wir jedoch, was unbeschadet der Allgemeinheit geschehen kann, die letzte Constante $\overset{M}{C}$ gleich dem Producte $\overset{1}{C}.\frac{1}{1^{\beta\frac{(2n+1)x}{h}}}$, wo beide Factoren selbst Functionen von $\beta^{\frac{(2n+1)x}{h}}$ sind. Nach der Eingangs des vorigen Paragraphen erwähnten Eigenschaft der Function β ist aber $\frac{1}{1^{\beta\frac{(2n+1)x}{h}}} = 1^{-\frac{(2n+1)x}{h}}$, so dass man also für die letzte Constante setzen kann $\overset{1}{C}_{\beta\frac{(2n+1)x}{h}} . 1^{-\frac{(2n+1)x}{h}}$. Ebenso kann die vorletzte Constante in $\overset{2}{C}.1^{-\frac{(2n+1)x}{h}}$ umgesetzt und mit dieser Verwandlung bis zu dem mittelsten Gliede fortgefahren werden, dessen Constante $\overset{n}{C}.1^{-\frac{(2n+1)x}{h}}$ sein mag. Substituirt man nun alles in (a) und fasst allemal, das erste Glied ausgenommen, je zwei von den Endpunkten gleichweit abstehende Glieder zusammen, so kommt zum Vorscheine:

$$y_{h\beta\frac{x}{h}} = C.1^{\frac{(2n+1)x}{h}} + [\overset{1}{C}1^{\frac{x}{h}} + \overset{1}{C}1^{-\frac{x}{h}}] + [\overset{II}{C}1^{\frac{2x}{h}} + \overset{2}{C}1^{-\frac{2x}{h}}]$$
$$+ \dots [\overset{N}{C}1^{\frac{nx}{h}} + \overset{n}{C}1^{-\frac{nx}{h}}]. \qquad \text{(b)}$$

Schreiten wir nun zur direkten Bestimmung der Constanten. Wir integriren beiderseits, wobei wir $\Delta x = \frac{h}{2n+1}$ annehmen, und erhalten, da $C, \overset{I}{C}, \overset{1}{C} \dots$ dabei constant sind als Functionen von $\beta\frac{(2n+1)x}{h}$:

$$\Sigma y = \frac{(2n+1)x}{h}.C.1^{\frac{(2n+1)x}{h}} + \left[\frac{\overset{I}{C}.1^{\frac{x}{h}}}{1^{\frac{1}{2n+1}}-1} + \frac{\overset{1}{C}.1^{-\frac{x}{h}}}{1^{-\frac{1}{2n+1}}-1}\right] + \dots$$
$$\dots + \varphi_{\beta\frac{(2n+1)x}{h}}.$$

Dieses Integral nehmen wir zwischen den Grenzen $x+h$ und x; dann fallen alle Glieder ausser dem ersten weg, und es bleibt:

$$C.1^{\frac{(2n+1)x}{h}} = \frac{1}{2n+1}\Sigma_x^{x+h} y.$$

Auf gleiche Art bestimmen wir $\overset{I}{C}$. Wir multipliciren zuerst beiderseits in (b) mit $1^{-\frac{x}{h}}$ und integriren dann wieder zwischen den Grenzen $x+h$ und x, wobei $\Delta x = \frac{h}{2n+1}$. Man erhält

$$\overset{I}{C} = \frac{1}{2n+1}\Sigma_x^{x+h} y.1^{-\frac{x}{h}}.$$

$\overset{1}{C}$ bestimmt sich, indem man in (b) beiderseits mit $1^{\frac{x}{h}}$ multiplicirt und wie zuvor verfährt. Man erhält

$$\overset{1}{C} = \frac{1}{2n+1}\Sigma_x^{x+h} y.1^{\frac{x}{h}}.$$

Auf diesem Wege fortfahrend, wird man noch alle übrigen Constanten bestimmen, bis zu

$$\overset{N}{C} = \frac{1}{2n+1}\Sigma_x^{x+h} y_t.1^{-\frac{nt}{h}}, \quad \overset{n}{C} = \frac{1}{2n+1}\Sigma_x^{x+h} y_t.1^{\frac{nt}{h}}.$$

Die so bestimmten Werthe der Constanten in (b) substituirt, geben nun:

$$y_{h\beta\frac{x}{h}} = \frac{1}{2n+1}\Sigma_x^{x+h} y_t.[1+[1^{\frac{x-t}{h}}+1^{-\frac{x-t}{h}}]+[1^{\frac{2(x-t)}{h}}+1^{-\frac{2(x-t)}{h}}]+\ldots$$
$$\ldots + [1^{\frac{n(x-t)}{h}}+1^{-\frac{n(x-t)}{h}}]]. \quad \text{(c)}$$

Setzen wir jetzt die beliebig grosse Zahl n unendlich gross voraus, so geht das bestimmte endliche Integral Σ, wobei $\Delta x = \frac{h}{2n+1}$, in ein bestimmtes Integral $\int_x^{x+h}$ über. Zufolge einer Näherungsformel, welche um so genauere Resultate liefert, je grösser n ist, hat man nemlich

$$\int_x^{x+h} f(t)\partial t = \frac{h}{2n+1}\Sigma_x^{x+h} f(t) + \frac{\frac{1}{2}h}{2n+1}[f(x+h-0) - f(x+0)],$$

wo man zugleich auf den Fall, dass $f(t)$ für $t=x$, mithin auch wegen der Periodicität für $t=x+h$, unstetig ist, Rücksicht genommen hat. Es ist also auch:

$$\frac{1}{2n+1}\Sigma_x^{x+h}f(t)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\partial t-\frac{\frac{1}{2}}{2n+1}[f(x+h-0)-f(x+0)].$$

Setzt man in dieser Formel für $f(t)$ den in (e) unter dem Zeichen Σ befindlichen Ausdruck, so hat man:

$$y_{h\beta\frac{x}{h}}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}y_t[1+[1^{\frac{x-t}{h}}+1^{-\frac{x-t}{h}}]+\ldots.[1^{\frac{n(x-t)}{h}}+1^{-\frac{n(x-t)}{h}}]]\,\partial t$$

$$-\frac{\frac{1}{2}}{2n+1}(y_{x+h-0}-y_{x+0})[1+[1^1+1^{-1}]+\ldots.[1^n+1^{-n}]],$$

oder

$$y_{h\beta\frac{x}{h}}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}y_t[1+\ldots.[1^{\frac{n(x-t)}{h}}+1^{-\frac{n(x-t)}{h}}]]\partial t-\tfrac{1}{2}[y_{x+h-0}-y_{x+0}].$$

Da in dieser Formel der unter dem Integralzeichen begriffene Theil periodisch ist mit dem Umfange h, so hat man auch endlich, wenn man zugleich für $1^{\frac{x-t}{h}}$ den früher angenommenen Werth $\cos\frac{2\pi(x-t)}{h}+i\sin\frac{2\pi(x-t)}{h}$ setzt:

$$y_{h\beta\frac{x}{h}}=\frac{1}{h}\int_0^h y_t\partial t+\frac{(y_{x+0}-y_{x-0})}{2}+\frac{2}{h}\int_0^h y_t\cos 2\pi\frac{x-t}{h}\partial t$$

$$+\frac{2}{h}\int_0^h y_t\cos 4\pi\left(\frac{x-t}{h}\right)\partial t+\frac{2}{h}\int_0^h y_t\cos 6\pi\left(\frac{x-t}{h}\right)\partial t+\ldots.,$$

eine Formel, in welcher der Theil $y_{x+0}-y_{x-0}$ verschwindet, so oft y stetig ist.

Es kann hier nicht in unserer Absicht liegen, diese von Poisson zuerst in obiger Gestalt aufgeführte Reihe Fourier's näher zu beleuchten oder auf einige Punkte der Entwickelung kritisch einzugehen, da es sich nur darum handelte, zu zeigen, wie die endliche Differenzenrechnung selbstständig, und nur auf ihr eigenes Princip gestützt, zuweilen mit leichter Mühe Resultate liefert, die man sonst öfters nur auf Umwegen erzielt.

Der Ausdruck $\beta\left(\frac{x}{h}\right)$, d. h. der in einem Bruche $\frac{x}{h}$ enthaltene Bruchtheil, kann aus der letzten Gleichung dadurch abgelei-

tet werden, dass man $y=\frac{x}{h}$ setzt; denn innerhalb des Intervalles von 0 bis h stimmt die erwähnte Function mit $\frac{x}{h}$ überein. Man findet

$$\beta\left(\frac{x}{h}\right)=\tfrac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\left[\sin\frac{2\pi x}{h}+\tfrac{1}{2}\sin\frac{4\pi x}{h}+\tfrac{1}{3}\sin\frac{6\pi x}{h}+\ldots\right],$$

welcher Ausdruck jedoch, da $\beta(t)$ für $t=0, 1, 2\ldots.$ unstetig wird, für eben diese Werthe noch um $\frac{1}{2}(\beta(0)-\beta(-0))=-\frac{1}{2}$ zu vermehren ist.

§. 3.

Die endliche Differenzenrechnung kann in sehr vielen Fällen wie die Differentialrechnung zur Auflösung von Aufgaben benutzt werden, wenngleich die Auflösungen, welche sie liefert, mit periodischen Constanten behaftet sind. Diese können im Allgemeinen nur bestimmt werden, wenn der Lauf der durch die Gleichung $y=y_x$ dargestellten Curve in dem Intervall von $x=a$ bis $x=a+nh$ bekannt ist, wo a ein bekannter Werth von x, n die Ordnung der zu integrirenden Differenzengleichung ist. In der That können die n periodischen Constanten aus den n Gleichungen bestimmt werden, welche man erhält, indem man in der Auflösung für x nach einander die Werthe

$$h\beta\left(\frac{x}{h}\right),\quad h(1+\beta\left(\frac{x}{h}\right)),\ \ldots.\ h(n-1+\beta\left(\frac{x}{h}\right))$$

setzt.

Allein der Lauf besagter Curve wird in den wenigsten Fällen innerhalb gewisser Intervalle bekannt sein. Die Bestimmung der Constanten kann also im Allgemeinen dann nur gelingen, wenn sich dieselben auf absolute Constanten reduciren; in welchen Fällen man, wie in der Differentialrechnung, nur eben so viele Einzelwerthe von y zu kennen braucht, als unbekannte Constanten vorhanden sind. Wie man, wenn diess überhaupt der Natur der Aufgabe angemessen ist, die periodischen Constanten zuweilen als absolute nachweisen könne, sollen nun die folgenden Aufgaben lehren.

§. 4.

Aufgabe. Wir haben uns früher des Ausdruckes $\frac{1^x+1^{-x}}{2}=\cos 2k\pi x$ bedient. Wie ist diess zu rechtfertigen?

Man betrachte die Formel

$$\cos(x+2h)-2\cos h\cos(x+h)+\cos x=0$$

als endliche Differenzengleichung für $\cos x$, so wird man, nachdem man die beiden partikulären Integrale gefunden hat, setzen:

$$\cos x=C_{\beta\left(\frac{x}{h}\right)}.(\cos h+i\sin h)^{\frac{x}{h}}+\overset{I}{C}_{\beta\left(\frac{x}{h}\right)}(\cos h+i\sin h)^{-\frac{x}{h}}.$$

Um nun die Constanten als absolute nachzuweisen, bemerke man vor Allem, dass $\cos x=\cos(-x)$. Hiernach entsteht

$$C_{\beta\left(\frac{x}{h}\right)}-\overset{I}{C}_{\beta\left(\frac{-x}{h}\right)}=\left(C_{\beta\left(\frac{-x}{h}\right)}-\overset{I}{C}_{\beta\left(\frac{x}{h}\right)}\right)(\cos h+i\sin h)^{-\frac{2x}{h}}.$$

Differenzirt man hier beiderseits, wobei man $\Delta x=h$ nimmt, so kommt:

$$C_{\beta\left(\frac{-x}{h}\right)}-\overset{I}{C}_{\beta\left(\frac{x}{h}\right)}=0.$$

Hiernach ist jetzt:

$$\cos x=C_{\beta\left(\frac{x}{h}\right)}.(\cos h+i\sin h)^{\frac{x}{h}}+C_{\beta\left(\frac{-x}{h}\right)}(\cos h+i\sin h)^{-\frac{x}{h}}.$$

Da h völlig willkührlich ist, wird dieser Ausdruck sich nicht verändern dürfen, wenn h in $-h$ übergeht. Die diesem Gedanken entsprechende Gleichung liefert aber, da sie sich in zwei Factoren zerlegen lässt:

$$C_{\beta\left(\frac{-x}{h}\right)}=C_{\beta\left(\frac{x}{h}\right)}.$$

Somit ist jetzt

$$\cos x=C_{\beta\left(\frac{x}{h}\right)}\left[(\cos h+i\sin h)^{\frac{x}{h}}+(\cos h+i\sin h)^{-\frac{x}{h}}\right].\qquad(1)$$

Substituirt man endlich die nach dieser Formel construirten Werthe der Cosinus in die Formel $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, so kommt

$$\left[C_{\beta\left(\frac{2x}{h}\right)}-2C_{\beta\left(\frac{x}{h}\right)}^{2}\right]\left[(\cos h+i\sin h)^{\frac{2x}{h}}+(\cos h+i\sin h)^{-\frac{2x}{h}}\right]$$
$$=4C_{\beta\left(\frac{x}{h}\right)}^{2}-1.$$

Differenzirt man hier beiderseits, wobei man wieder $\Delta x=h$ nimmt, so resultirt

$$C_{\beta\left(\frac{2x}{h}\right)} - 2C_{\beta\left(\frac{x}{h}\right)}{}^2 = 0,$$

und diess in die vorhergehende Gleichung substituirt, liefert endlich $C_{\left(\beta\frac{x}{h}\right)} = +\frac{1}{2}$, weil in (1) für $x=0$, $\cos x = 1$ werden muss. Mit diesem Werthe von C verwandelt sich nun die Gleichung (1) in

$$\cos x = \tfrac{1}{2}\left[(\cos h + i \sin h)^{\frac{x}{h}} + (\cos h + i \sin h)^{-\frac{x}{h}}\right]. \qquad (2)$$

Setzt man hier $x = 2kn t$, $h = 2k\pi$, so kommt die am Eingange erwähnte Formel zum Vorschein. Dieselbe Gleichung (2), in Bezug auf $(\cos h + i \sin h)^{\frac{x}{h}}$ aufgelöst, liefert die Moivre'sche Formel

$$\cos h + i \sin h = (\cos x + i \sin x)^{\frac{h}{x}},$$

welche somit für jeden Werth des Exponenten bewiesen ist.

§. 5.

Aufgabe. Die reducirte kubische Gleichung

$$x^3 + qx + r = 0$$

aufzulösen.

Man denke sich die drei Wurzeln einer periodischen Function von n entsprossen, der Art, dass allemal, wenn x_n, x_{n+1}, x_{n+2} drei Auflösungen sind, $x_n = x_{n+3}$, $x_{n+1} = x_{n+4}$.... ist, wie dieses schon bei dem einfachsten Falle $x_n{}^3 = 1$ stattfindet, wo

$$x_n = \cos\frac{2n\pi}{3} + i \sin\frac{2n\pi}{3}.$$

Aus der Differenzengleichung $x_{n+3} - x_n = 0$ folgt aber

$$x_n = A.1^{\frac{n}{3}} + B.1^{\frac{2n}{3}} + C.1^{\frac{3n}{3}},$$

wo A, B, C Functionen von $\beta(n)$, oder solche sind, die sich nicht ändern, wenn n in $n+1$ übergeht. Es folgt nun, wenn $\Delta n = 1$:

$$\Sigma_0^3\, x_n = 3C.$$

Nun ist aber auch $\Sigma_0^3\, x_n = x_0 + x_1 + x_2 = 0$, weil die Gleichung eine reducirte ist. Also ist $C = 0$.

Das Quadrat von x_n gibt uns nun einen Ausdruck von der Form

$$\alpha . 1^{\frac{n}{3}} + \beta . 1^{\frac{2n}{3}} + 2AB . 1^n,$$

also ist wieder, wenn man integrirt:

$$\Sigma_0^3 x_n^2 = 6AB.$$

Ferner ist auch $\Sigma_0^3 x_n^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -2q$, d. h. $AB = -\frac{1}{3}q$. Endlich ist noch x_n^3 von der Form

$$\alpha . 1^{\frac{n}{3}} + \beta . 1^{\frac{2n}{3}} + (A^3 + B^3) . 1^n,$$

also ist auch

$$\Sigma_0^3 x_n^3 = 3(A^3 + B^3),$$

d. h.

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = -3 = 3(A^3 + B^3), \text{ oder } A^3 + B^3 = -r.$$

Hält man diese Gleichung zusammen mit $A^3B^3 = -\frac{1}{27}q^3$, so findet man A und B. Man hat also endlich

$$x_n = \sqrt[3]{\left[-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right]} . 1^{\frac{n}{3}} + \sqrt[3]{\left[-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right]} . 1^{\frac{2n}{3}},$$

wo n jede beliebige ganze Zahl vorstellt. In diesem Ausdrucke kann man noch für $1^{\frac{n}{3}}$ seinen Werth $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ setzen. Man sieht leicht ein, dass man auf diesem Wege die schon von Lagrange angenommene Form der Wurzeln einer Gleichung $p$ten Grades beweisen könne:

$$x_n = B1^{\frac{n}{p}} + C1^{\frac{2n}{p}} + \ldots . P1^{\frac{(p-1)n}{p}} + Q1^{\frac{pn}{p}}.$$

§. 6.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines homogenen Kreisbogens zu finden.

Die Existenz eines Schwerpunktes vorausgesetzt, so wird derselbe auf dem Radius CO (Taf. I. Fig. 1.) liegen müssen, welcher nach der Mitte des ganzen Kreisbogens $2s$ führt. Durch seine Entfernung CO vom Mittelpunkte wird also dieser Schwerpunkt O völlig bestimmt sein. Dieselbe ist ausser von dem Ra-

dius r auch von dem halben Centriwinkel x abhängig, und wird also $= y_x$ gesetzt werden können. Betrachten wir nun die Schwerpunkte p der beiden Hälften s des ganzen Kreisbogens: Sind dieselben durch die geradlinige Kante pp zugleich unterstützt, so wird auch der ganze Kreisbogen in Ruhe sein, was nur stattfinden kann, wenn sein Schwerpunkt unterstützt ist. Es liegen demnach die drei Schwerpunkte p, O, p auf einer, wegen der Symmetrie der Figur überdiess auf CO senkrechten Geraden. Hieraus folgt:

$$CO = Cp . \cos\frac{x}{2},$$

oder, da $Cp = y_{\frac{x}{2}}$ gesetzt werden kann:

$$y_x = y_{\frac{x}{2}} . \cos\frac{x}{2}.$$

Um diese Gleichung in eine gewöhnliche lineäre Differenzengleichung zu verwandeln, reicht es hin, $x = 2^n$ zu setzen und dann zu den Logarithmen überzugehen. Man erhält

$$\mathrm{l}y_{2^n} = \mathrm{l}y_{2^{n-1}} + \mathrm{l}\cos(2^{n-1}),$$

oder wohl, wenn man n mit $n+1$ vertauscht und

$$\cos(2^n) = \frac{\sin(2^{n+1})}{2\sin(2^n)}$$

setzt:

$$\mathrm{l}\frac{y_{2^{n+1}}}{\sin(2^{n+1})} = \mathrm{l}\frac{y_{2^n}}{\sin(2^n)} - \mathrm{l}2, \quad \text{d. h.} \quad \Delta\mathrm{l}\frac{y_{2^n}}{\sin(2^n)} = -\mathrm{l}2.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$\mathrm{l}\frac{y_{2^n}}{\sin(2^n)} = \mathrm{l}C_{\beta n} + \mathrm{l}\frac{1}{2^n}.$$

Indem man jetzt wieder zu den Zahlen übergeht und zugleich den Werth von $x = 2^n$ herstellt, hat man

$$y_x = C_{\beta\left(\frac{\mathrm{l}x}{\mathrm{l}2}\right)} . \frac{\sin x}{x}.$$

Um die Constante C als absolute nachzuweisen, genügt es, in dieser Gleichung für x zu setzen: $x.2^{-k}$, wo k eine ganze unendlich grosse Zahl vorstellt. Man erhält alsdann, da

$$\lim\frac{\sin(x.2^{-k})}{x.2^{-k}} = 1$$

ist

$$y_{\frac{x}{\infty}} = C_{\beta\left(\frac{lx}{l2}-k\right)} = C_{\beta\left(\frac{lx}{l2}\right)},$$

und da $y_{\frac{x}{\infty}}$ für unendlich kleine Kreisbögen immer mehr mit dem Radius übereinkommt, so ist $C=r$, also

$$y_x = r.\frac{\sin x}{x}.$$

§. 7.

Aufgabe. **Den Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes zu finden. Da sich jedes schiefe Dreieck in zwei rechtwinklige zerlegen lässt, so wird es sich nur um den Inhalt solcher handeln.**

In dem rechtwinkligen Dreiecke $a\pi x$ (Taf. I. Fig. 2.) verlängere man die Hypotenuse und die eine Kathete $a\pi$, so entsteht ein Kugelzweieck, in zwei Dreiecke zertheilt, welche die Winkel a und $\frac{\pi}{2}$ gleich haben und nur in den dritten Winkeln x und $\pi - x$ von einander differiren. Setzt man also den Inhalt des einen Dreieckes $= y_x$, so wird derjenige des anderen durch $y_{\pi-x}$ ausgedrückt sein, und da sich beide zum Kugelzweiecke ergänzen, so hat man die Gleichung

$$y_x + y_{\pi-x} = 2r^2a.$$

Diese wird durch die Substitution $x=\frac{\pi}{2}+(-1)^n$ in die gewöhnliche Differenzengleichung

$$y_{\frac{\pi}{2}+(-1)^n} + y_{\frac{\pi}{2}+(-1)^{n+1}} = 2r^2a$$

übergeführt, deren Auflösung ist

$$y_{\frac{\pi}{2}+(-1)^n} = r^2a + (-1)^n\varphi(a,\beta_n)$$

oder

$$y_x = r^2a + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\varphi\left(a, \beta\left(\frac{l\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{l(-1)}\right)\right).$$

Um die willkührliche Function φ noch näher zu bestimmen, verlängern wir die beiden Katheten. Die entstehende Viertels-

kugel (Taf. I. Fig. 3.) zerfällt alsdann in zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Inhalte bezüglich durch $y_{a,x}$, $y_{\pi-a,\pi-x}$ darstellbar sind. Es findet demnach die Relation

$$y_{a,x} + y_{\pi-a,\pi-x} = r^2\pi$$

statt, d. h., wenn man obigen Werth von y substituirt:

$$\varphi(a, \beta\frac{l(x-\frac{\pi}{2})}{l(-1)}) = \varphi(\pi-a, \beta\frac{l(x-\frac{\pi}{2})}{l(-1)}).$$

Diese Differenzengleichung in Bezug auf $\varphi(a)$ nöthigt uns, zufolge eines schon mehrmals angewandten Verfahrens (man würde $a=\frac{\pi}{2}+(-1)^n$ setzen):

$$\varphi = \varphi(\beta\frac{l(a-\frac{\pi}{2})}{l(-1)}, \beta\frac{l(x-\frac{\pi}{2})}{l(-1)})$$

zu setzen. Hiermit wird

$$y = r^2a + (x-\frac{\pi}{2})\varphi.$$

Da nun der Inhalt y derselbe bleibt, wenn x und a unter einander vertauscht werden, so ist:

$$(1)\quad r^2a+(x-\frac{\pi}{2})\varphi(\beta\frac{l(a-\frac{\pi}{2})}{l(-1)}, \beta\frac{l(x-\frac{\pi}{2})}{l(-1)})$$

$$=r^2x+(a-\frac{\pi}{2})\varphi(\beta\frac{l(x-\frac{\pi}{2})}{l(-1)}, \beta\frac{l(a-\frac{\pi}{2})}{l(-1)}).$$

Da ferner a und x ganz unabhängig von einander sind, so kann man hier x mit $\pi-x$ vertauschen, wodurch man erhält:

$$r^2a-(x-\frac{\pi}{2})\varphi(\beta\frac{l(a-\frac{\pi}{2})}{l(-1)}, \beta\frac{l(x-\frac{\pi}{2})}{l(-1)})$$

$$=r^2(\pi-x)+(a-\frac{\pi}{2})\varphi(\beta\frac{l(x-\frac{\pi}{2})}{l(-1)}, \beta\frac{l(a-\frac{\pi}{2})}{l(-1)}).$$

Die Summe der beiden letzten Gleichungen gibt endlich:

$$\varphi(\beta\frac{l(x-\frac{\pi}{2})}{l(-1)},\ \beta\frac{l(a-\frac{\pi}{2})}{l(-1)})=r^2.$$

Dieser Werth, in (1) substituirt, liefert nun auch

$$\varphi(\beta\frac{l(a-\frac{\pi}{2})}{l(-1)},\ \beta\frac{l(x-\frac{\pi}{2})}{l(-1)})=r^2,$$

so dass man endlich das Resultat $y=r^2(a+x-\frac{\pi}{2})$ hat.

Fällt man von der Spitze des grössten Winkels b eines schiefen Dreieckes ein Perpendikel auf die gegenüberstehende Seite, so zerfällt das Dreieck in zwei rechtwinklige, y und y_1, der Winkel b in zwei Theile x und x_1; ist also c der dritte Winkel des Dreieckes, so ist $y=r^2(a+x-\frac{\pi}{2})$, $y_1=r^2(c+x_1-\frac{\pi}{2})$, also ist die Fläche des schiefen Dreieckes $y+y_1=r^2(a+b+c-\pi)$.

§. 8.

Aufgabe. Die Resultante zweier gleichen Kräfte $p=p'$ zu finden, welche einen gegebenen Winkel $2x$ einschliessen.

Um den Satz vom Parallelogramm der Kräfte zu beweisen, reicht es hin, zuerst obigen Fall zu betrachten. Da die von der Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks nach der Mitte der Hypotenuse gezogene Gerade zwei gleichschenklige Dreiecke, Hälften von Rauten, erzeugt, so ergibt sich dann leicht ein Beweis für rechtwinklige Composanten, von denen aus der Schluss auf schiefe bekannt ist. — Es sei nun die fragliche Resultante der beiden gleichen Kräfte $=y_{x,p}$, so ist klar, dass, wenn x constant bleibt, die Seitenkräfte p aber $n$mal so gross werden, auch die Resultante den $n$fachen Werth erhält; dass ebenso die Resultante nur den $m$ten Theil so gross ausfällt, wenn die Componente p nur den $m$ten Theil ihres vorigen Werthes hat, welches sich durch die indirecte Beweisart aus dem Vorigen ergibt, und dass endlich, wenn man die beiden vorigen Schlüsse zusammensetzt, die Resultante $\frac{n}{m}$mal so gross wird, wenn p in $\frac{n}{m}p$ übergeht. Hieraus folgt $y_{x,pa}=ay_{x,p}$, was auch a sei, mithin für $a=\frac{c}{p}$:

$y_{x,p} = p.\frac{1}{c}y_{x,c}$. Da c willkührlich ist, so können wir es der Krafteinheit gleich annehmen, und setzen:

$$y_{x,p} = p.y_{x,1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (I)$$

Die Resultante ist folglich gleich dem Producte der Kraft p in eine Function von x. Um diese zu bestimmen, bringe man in der Richtung der Halbirungslinie qq' (Taf. I. Fig. 4.) des Winkels $2x$, auf welche die Resultante fällt, die zwei gleichen Kräfte $q=q'=p=p'$, und in der entgegengesetzten Richtung genau dieselben Kräfte $-q=-q'=p$ an; so ist die Resultante unverändert geblieben. Man kann nun aber q mit p zu r, q' mit p' zu r' zusammensetzen, so dass die Resultante der beiden gleichen Kräfte r durch $r.y_{\frac{1}{2}x,1}$ ausgedrückt werden kann, wobei noch für r, als Resultante von p und $q=p$, $p.y_{\frac{1}{2}x,1}$ gesetzt werden möge, so dass die Resultante von r und $r'=p.y_{\frac{1}{2}x,1}{}^2$ ist. Da nun die Kräfte $-q$, $-q'=p$ in Verbindung mit der Resultanten von r, r' die Resultante der ursprünglichen Kräfte p, p längs qq' zusammensetzen, so folgt die Gleichung:

$$-2p+py_{\frac{1}{2}x,1}{}^2=py_{x,1} \text{ oder } y_{x,1}=y_{\frac{1}{2}x,1}{}^2-2.$$

Um diese Gleichung zu lösen, setze man $y=z+t$ und zerfälle das Resultat der Substitution in

$$2z_{\frac{1}{2}x}.t_{\frac{1}{2}x}=2, \quad z+t=z_{\frac{1}{2}x}{}^2+t_{\frac{1}{2}x}{}^2.$$

Durch Elimination von t erhält man:

$$z_{\frac{1}{2}x}{}^2.z_x{}^2-(1+z_{\frac{1}{2}x}{}^4)z_x+z_{\frac{1}{2}x}{}^2=0;$$

durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung für z_x stösst man auf die zwei Annahmen:

$$z_x=z_{\frac{1}{2}x}{}^2 \text{ und } z_x.z_{\frac{1}{2}x}{}^2=1,$$

welche beide durch Uebergang zu den Logarithmen und Substitution von $x=2^u$ zu gewöhnlichen lineären Differenzengleichungen führen, und wobei man nicht vergessen darf, der Allgemeinheit halber $l1=2k\pi i$ zu setzen. So findet man für z zwei Formen, welche mit Berücksichtigung des Werthes von $t=\frac{1}{z}$ und $y=z+t$ liefern:

$$1) \quad y=e^{Cxi}+e^{-Cxi} \text{ oder } y=2\cos Cx$$

und

$$2) \quad y=e^{\left(\frac{2k\pi}{l2}+Cx(-1)^{\frac{lx}{l2}}\right)i}+e^{-\left(\frac{2k\pi}{l2}+Cx(-1)^{\frac{lx}{l2}}\right)i},$$

wo C eine periodische Function von $\frac{lx}{l2}$, und k eine beliebige ganze Zahl, welche jedoch, da die zweite Form von y auch geschrieben werden kann:

$$y=2\cos\left(\frac{2k\pi}{3}+Cx(-1)^{\frac{lx}{l2}}\right),$$

auf einen der drei Werthe 0, 1, 2 beschränkt werden kann, von denen man aber auch sogleich den Werth 2 ausschliessen kann, denn es ist

$$\cos\left[\frac{4k\pi}{3}-C_1x(-1)^{\frac{lx}{l2}}\right]=\cos\left[\frac{2k\pi}{3}+C_1x(-1)^{\frac{lx}{l2}}\right],$$

d. h. es kommt für $k=2$ dieselbe Form, wie für $k=1$ zum Vorschein. Es blieben uns also im Ganzen noch die Form 1) und die beiden für $k=0$, $k=1$ geltenden Formen von 2) für y übrig, im Widerspruch mit §. 1, wo wir fanden, dass die Gleichung $y_x=y_{\frac{1}{2}x}{}^2-2$ dem Exponenten 2 zufolge nur zwei wesentlich verschiedene Auflösungen haben könne. Dieser Widerspruch löst sich, wenn man bedenkt, dass in der That die Form 2) für $k=0$, nemlich $2\cos[Cx(-1)^{\frac{lx}{l2}}]$, auf die Form 1): $2\cos(Cx)$ zurückkommt, denn der Ausdruck $(-1)^{\frac{lx}{l2}}$, welcher ursprünglich dazu bestimmt war, sein Zeichen zu wechseln, wenn x in $2x$ übergeht, büsst diese Eigenschaft ein, wenn er unter dem Zeichen cos steht; er ist demnach bei gesagtem Uebergange als constant zu betrachten und verschmilzt mit C. — In Uebereinstimmung mit unserer Theorie haben wir also nur zwei wesentlich unterschiedene Auflösungen:

$$1)\quad y=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+Cx.(-1)^{\frac{lx}{l2}}\right)$$

oder auch

$$y=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+Cx\sin\pi\frac{lx}{l2}\right),$$

wo $C=\varphi(\beta\frac{lx}{l2})$. Diese Form ist unstatthaft, weil für $x=2^{-n}$, wenn n in's Unendliche wächst, die Resultante zweier paralleler Kräfte p, p, $=-p$ ausfallen müsste, indem C denselben Werth behielte, also $\lim Cx=0$ wäre.

$$2)\quad y=2\cos(x\varphi(\beta\frac{lx}{l2})).$$

Um die Function φ näher zu bestimmen, bedenke man, dass dieselbe Resultante zum Vorschein kommen muss, wenn x um 2π zunimmt. Also wäre

$$\cos[(x+2\pi)\varphi(\beta\frac{l(x+2\pi)}{l2})]=\cos[x\varphi(\beta\frac{lx}{l2})],$$

mithin

$$(x+2\pi)\varphi(\beta\frac{l(x+2\pi)}{l2})\pm x\varphi(\beta\frac{lx}{l2})=2k\pi,$$

wo k eine gewisse ganze Zahl. Das obere Zeichen kann nun jedenfalls nicht stattfinden, denn die Gleichung, als Differenzengleichung betrachtet, würde geben:

$$x\varphi(\beta\frac{lx}{l2})=k\pi+\sin\frac{x}{2}.\psi(\beta\frac{x}{2\pi}).$$

Halbirt man diese Gleichung und nimmt dann $2x$ für x, so hat man:

$$x\varphi\left(\beta\frac{lx}{l2}\right)=\tfrac{1}{2}k\pi+\tfrac{1}{2}\sin x\psi(\beta\frac{x}{2\pi}),$$

also wäre

$$\tfrac{1}{2}k\pi+\sin\frac{x}{2}.\psi(\beta\frac{x}{2\pi})=\tfrac{1}{2}\sin x\psi(\beta\frac{x}{2\pi}).$$

Setzt man aber hier $x+2\pi$ für x, so hat man ein Resultat, welches dem Vorhergehenden direct widerspricht.

Nimmt man dagegen das untere Zeichen und betrachtet wieder die Gleichung als endliche Differenzengleichung, so hat man

$$x\varphi(\beta\frac{lx}{l2})=kx+\psi(\beta\frac{x}{2\pi}).$$

Setzt man $2^n x$ für x, so kommt:

$$\varphi(\beta\frac{lx}{l2})=k+\frac{\psi(\beta\frac{2^n x}{2x})}{2^n x}.$$

Denkt man sich die ganze Zahl n unendlich gross, so wird $\psi=k$, also endlich $y=2p\cos kx$. — Wäre nun nicht $k=1$, so würden zwei Kräfte, die einen Winkel $\frac{\pi}{k}$ einschlössen, also nicht in einer geraden Linie wirkten, sich aufheben müssen, was unmöglich ist. Da ferner $2p\cos x$ die Diagonale der Raute vorstellt, welche einen Winkel $2x$ zwischen den Seiten p hat, so ist hiermit der Satz vom Parallelogramm der Kräfte bewiesen.

III.

Beiträge zur Geometrie.

Von

Herrn F. H. Rump,

Professor am Gymnasium zu Coesfeld.

I.

Synthetischer Beweis des im 25. Theile S. 234. des Archivs mitgetheilten Satzes, nebst einer Anwendung desselben.

Der am angeführten Orte aufgestellte und auf analytischem Wege entwickelte Satz erscheint um so beachtenswerther, da er einen geometrischen Ort enthält, der bei manchen Dreiecksaufgaben mit Vortheil angewandt werden kann. Es möge daher eine rein synthetische Behandlung desselben und die Nachweisung des geometrischen Ortes hier eine Stelle finden.

1. Lehrsatz. Ist eine gerade Linie AD (Taf. I. Fig. 5.) in den Punkten B und C so getheilt, dass AC die geometrisch mittlere Proportionale zwischen AB und AD bildet, und wird dann aus A mit AC ein Kreis beschrieben: so verhalten sich die Entfernungen jedes Punktes E dieses Kreises von den Punkten B und D, wie $AB:AC$.

Beweis. (1.) Beschreibe aus A mit dem Radius AB einen Kreis, welcher die EB in F schneidet, und ziehe AF und AE. Nun ist, da $AC=AE$, nach der Annahme:

$$AD:AE=AE:AB;$$

und da ausserdem $\angle DAE = \angle EAB$, so ist

$$\triangle DAE \sim \triangle EAB;$$

folglich

$$\angle EDB = \angle AEF,$$

und da noch $\angle ABF = \angle AFB$, und folglich $\angle EBD = \angle AFE$ ist, so ist

$$\triangle EBD \sim \triangle AFE;$$

folglich

$$EB:ED = AF:AE,$$

d. h.

$$EB:ED = AB:AC.$$

(2.) Ist in der Peripherie des mit AC beschriebenen Kreises ein Punkt, z. B. E_1, so angenommen, dass die E_1B den mit AB beschriebenen Kreis erst in ihrer Verlängerung (in F_1) trifft, so ziehe man, wie oben, die entsprechenden Hülfslinien, und es wird sich mit einer geringen Abänderung derselbe Beweis herausstellen.

(3.) Liegt ferner der Punkt in E_2 so, dass E_2B Tangente des mit AB beschriebenen Kreises wird, so gilt, wie man leicht sieht, auch hier ein dem obigen entsprechender Beweis.

(4.) Dass endlich unser Satz auch für die beiden Punkte C und C_1 gelte, ergiebt sich einfach in folgender Weise. Da nämlich nach der Annahme

$$AD:AC = AC:AB,$$

so ist auch

$$(AD \pm AC):(AC \pm AB) = AC:AB;$$

und diess gibt bei der Subtraction der Glieder:

$$CD:CB = AC:AB,$$

und bei der Addition derselben:

$$C_1D:C_1B = AC:AB.$$

2. Lehrsatz. Es sei BC (Taf. I. Fig. 6.) die Grundlinie eines nicht gleichschenkligen Dreiecks und D der Fusspunkt der den Scheitelwinkel desselben halbirenden Transversale, wobei $BD < CD$ sein soll. Wird dann in der über B hinaus verlängerten CB der Punkt D_1 so bestimmt, dass sich $D_1B:D_1C = DB:DC$ verhält und dann über D_1D als Durchmesser ein Kreis beschrieben: so

ist dieser Kreis der geometrische Ort für die Scheitel sämmtlicher Dreiecke auf der Grundlinie BC, bei welchen die durch den Punkt D zum Scheitel gezogene Transversale den Scheitelwinkel halbirt.

Beweis. (1.) Man nehme irgend einen beliebigen Punkt A des Kreises als Scheitel des Dreiecks und ziehe AB, AD und AC, dann ist gemäss der Voraussetzung:

$$D_1B:D_1C=DB:DC,$$

d. h., wenn E Mittelpunkt des Kreises ist,

$$(ED+EB):(EC+ED)=(ED-EB):(EC-ED);$$

folglich ist auch, indem man die vorhergehenden, dessgleichen auch die nachfolgenden Glieder addirt und subtrahirt:

$$2ED:2EC=2EB:2ED,$$

also auch

$$EB:ED=ED:EC.$$

Mithin ist auch nach dem vorhergehenden Lehrsatze

$$\begin{aligned} AB:AC &= EB:ED=ED:EC \\ &=(ED-EB):(EC-ED) \\ &=DB:DC. \end{aligned}$$

Folglich ist auch nach einem bekannten Satze:

$$\angle BAD=\angle DAC.$$

(2.) Die in Frage stehenden Dreiecke können auch nirgends anderswo ihren Scheitel haben als in der Peripherie des angegebenen Kreises. Denn errichtet man $DF \perp BC$, so kann zunächst der Scheitel weder in dieser Senkrechten selbst, noch an der rechten Seite derselben liegen, weil dann, wie man leicht sieht, im erstern Falle $BD=DC$ und im zweiten sogar $BD>DC$ sein müsste, welches beides der Voraussetzung widerspricht. Sollte nun ferner der Scheitel auf der anderen Seite von FD, etwa in G liegen, so ziehe man GD, welche Linie dann den über D_1D beschriebenen Kreis in irgend einem Punkte H schneiden muss, und verbinde H und G mit B und C. Dann ist gemäss des ersten Theils unseres Beweises $\angle BHD=\angle CHD$, also auch $\angle BHG=\angle CHG$. Da nun auch $\angle BGH=\angle CGH$ sein soll und $GH=GH$ ist, so wäre $\triangle GHB \cong \triangle GHC$ und folglich $HB=HC$, also auch $BD=CD$, was nicht sein kann.

3. **Zusatz.** Statt D_1 in der Verlängerung von CB zu bestimmen, kann man auch direct die Lage des Mittelpunktes E finden, wenn man BE als dritte Proportionale zu $DC-DB$ und DB bestimmt.

4. **Zusatz.** Mit Hülfe dieses geometrischen Ortes lassen sich mehrere Dreiecksaufgaben lösen, z. B.

1) Ein Dreieck zu construiren, von welchem die Grundlinie, die den Scheitelwinkel halbirende Transversale und die Lage des Fusspunkts dieser Transversale gegeben sind.

2) Ein Dreieck zu construiren, von welchem die Grundlinie, das Verhältniss der beiden anderen Seiten und die vom Scheitel zum Halbirungspunkte der Grundlinie gezogene Transversale gegeben sind.

II.

Ueber die Entfernung der Mittelpunkte des umschriebenen und der Berührungskreise bei einem Dreiecke.

Bezeichnet r den Radius des einem Dreiecke umschriebenen, ϱ den Radius des eingeschriebenen Kreises und d die Entfernung der Mittelpunkte beider Kreise: so ist bekanntlich $d^2=r^2-2r\varrho$. Diesen merkwürdigen Satz hat Euler (Nov. comm. Petrop. XI.) algebraisch, dann Fuss (Nov. act. Petrop. X.) geometrisch bewiesen. In der Folge sind für denselben Satz, zum Theil mit Hinzuziehung der äusseren Berührungskreise, für welche eine ähnliche Relation Statt findet, noch mehrere rein geometrische Beweise geliefert, und zwar, so viel ich weiss, von

1. Kunze (Lehrbuch der Geometrie I. S. 125).
2. Unger (Crelle's Journ. IV. und Unger's Geometrie des Euklid S. 377).
3. Grunert (mathem. Wörterb. Supplem. I. S. 732.)
4. Jacobi (in dessen Bearbeitung von van Swinden's Geometrie S. 237).
5. Grüson (Crelle's Journal X.).
6. Nauck (Programm des Gymnasiums zu Schleusingen vom Jahre 1840).

In den folgenden Zeilen habe ich denselben Gegenstand ebenfalls rein geometrisch behandelt. Ich hoffe, dass sich die Behandlungsweise durch Einfachheit und Klarheit empfehlen wird.

1. Lehrsatz. I. Verlängert man in einem Dreiecke ABC (Taf. I. Fig. 7.) die einen Winkel BAC desselben halbirende Linie AD bis zum Punkte E in der Peripherie des dem Dreiecke umschriebenen Kreises, und beschreibt aus E mit $EB = EC$ einen Kreis: so liegt in der Peripherie dieses Kreises erstens der Mittelpunkt des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises und zweitens der Mittelpunkt des zwischen den verlängerten Seiten AB und AC liegenden äusseren Berührungskreises; und diese Mittelpunkte liegen demnach dort, wo dieser Kreis die den Winkel BAC halbirende Linie durchschneidet.

II. Verlängert man die einen Aussenwinkel BAG eines Dreiecks ABC halbirende Linie AD_1 bis zum Punkte E_1 in der Peripherie des dem Dreiecke umschriebenen Kreises, und beschreibt aus E_1 mit $E_1B = E_1C$ einen Kreis: so liegt in der Peripherie dieses Kreises erstens der Mittelpunkt des zwischen den verlängerten Seiten BA und BC liegenden, und zweitens der Mittelpunkt des zwischen den verlängerten Seiten CA und CB liegenden äusseren Berührungskreises; und die Mittelpunkte der genannten Berührungskreise liegen demnach dort, wo dieser Kreis die den Aussenwinkel BAG halbirende Linie durchschneidet.

Beweis. I. a. Es sei O der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises. Bezeichnet man nun die Dreieckswinkel an A, B, C mit α, β, γ und zieht OB und OC, so ist

$$\begin{aligned} BOC &= 2R - (OBC + OCB) \\ &= 2R - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A) \end{aligned}$$

Ferner ist der convexe Winkel

$$\begin{aligned} BEC &= 4R - BEC \\ &= 4R - (2R - BAC) \\ &= 4R - (2R - \alpha) \\ &= 4R - (\beta + \gamma). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B) \end{aligned}$$

Aus (A) und (B) ergiebt sich, dass der convexe Winkel $BEC = 2BOC$. Wird also aus E mit EB ein Kreis beschrieben, so wird BOC Peripheriewinkel dieses Kreises, und folglich geht der Kreis durch O.

I. b. Es sei O_1 der Mittelpunkt des zwischen den verlängerten AB und AC liegenden äusseren Berührungskreises. Zieht man nun O_1B, so wird diese Linie den Winkel CBF halbiren, und da der Winkel CBA durch OB halbirt wird, die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel aber senkrecht auf einander stehen: so ist OBO_1 ein rechter Winkel, und folglich muss, wenn man aus E mit $EB = EO$ (I. a.) einen Kreis beschreibt, OBO_1 Peripheriewinkel dieses Kreises werden, d. h. der Kreis muss durch O_1 gehen, was zu beweisen war.

II. a. Da D_1A und DA, welche zwei Nebenwinkel halbiren, senkrecht auf einander stehen, so ist E_1AE ein rechter Winkel, folglich E_1E Durchmesser, also auch $E_1B = E_1C$. — Es sei nun O_2 der Mittelpunkt des zwischen den verlängerten BA und BC liegenden äusseren Berührungskreises; dann geht die den Winkel ABC Halbirende BO in ihrer Verlängerung durch O_2, und wenn man O_2C zieht, so muss diese Linie den Winkel ACH halbiren; also ist $O_2CO = R$ und $O_2CB = R + \frac{1}{2}\gamma$. Nun ist:

$$\begin{aligned} BO_2C &= 2R - (O_2BC + O_2CB) \\ &= 2R - (\tfrac{1}{2}\beta + R + \tfrac{1}{2}\gamma) \\ &= R - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) \\ &= \tfrac{1}{2}\alpha. \end{aligned}$$

Es ist aber $BE_1C = BAC = \alpha$, und folglich $BE_1C = 2BO_2C$. Beschreibt man also aus E_1 mit E_1B einen Kreis, so wird BO_2C Peripheriewinkel dieses Kreises, und folglich geht der Kreis durch O_2.

Der Beweis für II. b. ergiebt sich wie bei I. b. — Dass für diese beiden Theile ganz wie bei I. a. und II. a. auch selbstständige Beweise geliefert werden können, sieht man leicht.

Anmerkung. Ist $\triangle BAC$ gleichschenklig, so wird D_1A Tangente des umschriebenen Kreises, und folglich fällt E_1 mit A zusammen. Das Weitere ergiebt sich wie sonst.

2. Lehrsatz. Es sei bei einem Dreiecke der Radius des umschriebenen Kreises mit r, der des inneren Berührungskreises mit ϱ, und der Abstand der Mittelpunkte beider Kreise mit d, ferner der Radius eines der äusseren Berührungskreise mit ϱ_1, und der Abstand seines Mittelpunktes vom Mittelpunkte des umschriebenen Kreises mit d_1 bezeichnet; dann ist:

$$\text{I.}\quad d^2 = r^2 - 2r\varrho.$$

$$\text{II.}\quad d_1{}^2 = r^2 + 2r\varrho_1.$$

Beweis. I. Es sei um das Dreieck ABC (Taf. I. Fig. 8.) der umschriebene Kreis gelegt und M sei der Mittelpunkt desselben. Halbirt man nun den Winkel BAC durch AO_1 und dessen Nebenwinkel H_2AC durch O_3O_2, welche Halbirungslinien den umschriebenen Kreis in E und E_1 schneiden, zieht dann EB, E_1B und E_1E, macht ferner $EO=EO_1=EB$ und $E_1O_2=E_1O_3=E_1B$: so ist nach dem vorhergehenden Lehrsatze O der Mittelpunkt des inneren, O_1, O_2, O_3 sind die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise, und E_1E ist Durchmesser des umschriebenen Kreises. Fälle noch $OH \perp AB$ und ziehe durch O den Durchmesser FG, dann ist $\triangle AHO \sim \triangle E_1BE$, und folglich:

$$AO:OH=E_1E:EB,$$

also auch, da $OH=\varrho$, $E_1E=2r$ und $EB=EO$ ist,

$$AO:\varrho=2r:EO,$$

und folglich

$$2r\varrho=AO\times EO=GO\times FO=(r+d)(r-d)=r^2-d^2,$$

und mithin

$$d^2=r^2-2r\varrho.$$

II. a) Für den aus O_1 beschriebenen Berührungskreis fälle $O_1H_1 \perp AB$ und ziehe durch M die Sekante O_1G_1. Nun ist $\triangle AH_1O_1 \sim \triangle E_1BE$, und folglich

$$AO_1:O_1H_1=E_1E:EB,$$

d. h.

$$AO_1:\varrho_1=2r:EO_1,$$

also

$$2r\varrho_1=AO_1\times EO_1=G_1O_1\times F_1O_1=(MO_1+MG_1)(MO_1-MG_1)$$
$$=(d_1+r)(d_1-r)=d_1^2-r^2,$$

und folglich

$$d_1^2=r^2+2r\varrho_1.$$

b) Für den aus O_2 beschriebenen Berührungskreis fälle $O_2H_2 \perp AB$ und ziehe durch M die Sekante O_2G. Dann ist zunächst $H_2AO_2=O_2AC=R-OAC$ und folglich $H_2O_2A=OAC=BAE=BE_1E$. Mithin ist $\triangle BE_1E \sim \triangle H_2O_2A$ u. s. w. wie vorher.

Ebenso ergiebt sich der Beweis für den dritten äusseren Berührungskreis.

III.

Ein Beitrag zu einer Ansammlung von Beweisen für den pythagoräischen Lehrsatz.

Beschreibt man um ein Dreieck ABC (Taf. I. Fig. 7.) den Kreis AE_1CEB, halbirt den Winkel BAC, verlängert die Halbirungslinie bis E in der Peripherie des umschriebenen Kreises und zieht BE: so ist, wie man leicht sieht, $\triangle ABE \backsim \triangle ADC$, und folglich:

$$AB:AE = AD:AC;$$

also auch:

$$\begin{aligned} AB \times AC &= AE \times AD \\ &= AD^2 + AD \times ED \\ &= AD^2 + BD \times CD. \end{aligned}$$

Nimmt man nun das Dreieck als ein gleichschenkliges an, setzt also $AC = AB$, so ist auch $CD = BD$ und ADB ist ein rechter Winkel; die obige Gleichung aber geht über in

$$AB^2 = AD^2 + BD^2.$$

IV.

Leichter Beweis der Gaussischen Gleichungen und der Neper'schen Analogien durch Construction.

Von

Herrn *E. Essen*,

Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Stargard.

Bekanntlich schneiden sich die Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks ABC in einem Punkte G (Taf. I. Fig. 9.). Fällt man von G die Lothe GD, GE, GF auf die drei Seiten, so ist der Winkel AGF, den eine Halbirungslinie mit einem der benachbarten Lothe bildet, das Supplement des Winkels BGC, welchen die beiden andern Halbirungslinien einschliessen. Uebrigens findet man leicht

$$CD = CE = \frac{a+b-c}{2}.$$

Alles dies gilt augenscheinlich eben so gut von sphärischen, wie von ebenen Dreiecken.

Nun sei ABC (Taf. I. Fig. 10.) ein sphärisches Dreieck. Man errichte in der Mitte von AB in E ein sphärisches Loth auf AB, welches die Seite AC in D schneiden mag, und verbinde D mit C. Sodann sei F der Punkt, in welchem DE die übrigen Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks CBD durchschneidet, FG sei senkrecht auf BC.

Der Winkel CFG ist gleich dem Winkel EFB, da beide den Winkel DFB zum Supplement haben. Aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken CFG und FEB erhält man:

$$\cos CFG = \cos CG \, . \sin FCG,$$

$$\cos EFB = \cos EB \, . \sin FBE.$$

Nun aber ist

$$\text{W. } FCG = 90^0 - \frac{C}{2},$$

$$\text{W. } FBE = \frac{A+B}{2},$$

$$CG = \frac{CD + CB - DB}{2} = \frac{CB - (DB - CD)}{2} = \frac{a-b}{2};$$

folglich hat man:

$$1) \quad \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\frac{C}{2} = \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{c}{2}.$$

Für's Zweite hat man:

$$\sin CG = \sin CF . \sin CFG,$$
$$\sin EB = \sin BF . \sin EFB;$$

mithin verhält sich

$$\sin CG : \sin EB = \sin CF : \sin BF$$
$$= \sin FBG : \sin FCG.$$

Hieraus folgt:

$$2) \quad \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\frac{C}{2} = \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{c}{2}.$$

Verlängert man die Seiten BA und BC über A und C, bis sie sich in B' schneiden, so entsteht ein Dreieck ACB', in welchem der Winkel B' gleich B ist, während seine übrigen Stücke sich zu den Seiten und Winkeln des gegebenen Dreiecks als Supplemente verhalten. Folglich bleiben die obigen Formeln auch richtig, wenn man statt der Seiten und Winkel a, c, A, C ihre Supplemente einsetzt. Dies giebt:

$$3) \quad \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{c}{2},$$

$$4) \quad \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\frac{C}{2} = \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{c}{2}.$$

Hieraus folgen bekanntlich die Neper'schen Analogien durch Division. Uebrigens würde es nicht schwer sein, dieselben unmittelbar aus der Figur abzuleiten. Denn man hat

$$\tang FG = \sin CG . \tang FCG$$
$$= \sin BG . \tang FBG.$$

V.

Einige Andeutungen, die Quadratur der Hyperbel betreffend.

Von

Herrn *E. Essen*,

Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Stargard.

Der Herr Professor Grunert hat im ersten Hefte des fünfundzwanzigsten Theils seines Archivs eine elementare Quadratur der Hyperbel mitgetheilt, welche mich zu eigenen Untersuchungen über dies Thema angeregt hat. Ich erlaube mir, die gewonnenen Resultate mitzutheilen, nicht als ob meine Arbeit nach einer solchen Darstellung noch einigen Werth haben könnte, sondern weil ich weiss, wie sehr solche Anregungen in der Absicht des hochgeehrten Herrn Verfassers liegen und mit welcher Nachsicht derselbe auch selbst schwache Versuche aufzumuntern pflegt*).

1) Ich verstehe unter Sector einer Hyperbel eine Figur, welche entsteht, wenn man die Endpunkte eines Hyperbelbogens mit dem Mittelpunkte verbindet.

Ein asymptotisches Segment soll ein Flächenstück heissen, das von einem Hyperbelbogen, einer Asymptote und zweien parallelen Linien begrenzt wird. Laufen die beiden parallelen Linien der zweiten Asymptote parallel, so soll das Segment ein Normalsegment genannt werden.

2) *Lehrsatz.* Aus der Gleichung der Hyperbel $xy = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$ folgt bekanntlich leicht der Satz, dass ein von den Asymptoten eingeschlossenes Parallelogramm, dessen vierte Ecke auf der Hyperbel liegt, einen constanten Flächeninhalt hat.

*) Was ich von dem folgenden vortrefflichen Aufsatze halte, habe ich schon im Literar. Ber. Nr. CIII. im Allgemeinen vorläufig ausgesprochen. Wenn ich die obigen Worte im Eingange dieses Aufsatzes habe stehen lassen, so ist dies nur geschehen, weil sie ein neues Zeugniss von des trefflichen Herrn Verfassers fast zu grosser Bescheidenheit ablegen. Ich kann mich durch dieselben nur geehrt fühlen. G.

Dies giebt die Grundlage für folgende Behauptung: Ein Sector und ein Normalsegment über demselben Hyperbelbogen haben gleichen Flächeninhalt. (Taf. II. Fig. 1.)

Beweis. Es sei ABO ein Sector, $ABA'B'$ ein Normalsegment. Alsdann ist das Dreieck OAA' gleich dem Dreiecke OBB', weil beide Hälften gleicher Parallelogramme sind. Nimmt man von beiden das gemeinsame Stück OHA' hinweg, und legt sodann zu jedem der übrig bleibenden Stücke das Flächenstück ABH hinzu, so folgt das Behauptete.

3) *Lehrsatz.* Asymptotische Segmente zwischen denselben Parallelen sind gleich. (Taf. II. Fig. 2.)

Beweis. Betrachtet man die beiden Segmente $AA'B'B$ und $aa'b'b$, so leuchtet ein, dass, wenn die Bogen AB und ab sehr klein sind, man dieselben als zwei Paralleltrapeze ansehen kann. Nun aber ist nach einer bekannten Eigenschaft der Hyperbel $AA' = aa'$, $BB' = bb'$, folglich haben beide Trapeze gleichen Inhalt. Sind nun zwei beliebige Segmente zwischen denselben Parallelen gegeben, $AA'C'C$ und $aa'c'c$, so wird man dieselben durch Parallellinien in so kleine Theile zertheilen können, dass dieselben als Trapeze angesehen werden können. Da aber diese einzelnen Theile paarweise einander gleich sind, so folgt, dass die ganzen Figuren gleich seien. Es darf wohl nicht bemerkt werden, dass sich der Beweis leicht mit grösserer Strenge führen liesse.

4) *Lehrsatz.* Normalsegmente sind gleichen Inhalts, wenn ihre Grenzabscissen in Proportion stehen. (Taf. II. Fig. 1.)

Beweis. Wir nehmen an, dass sich verhalte

$$OA' : OB' = OC' : OD',$$

und wollen beweisen, dass die über $A'B'$ und $C'D'$ stehenden Normalsegmente gleich sind.

Man trage die Grenzabscissen OA' und OB' auf die andere Asymptote ab, wo sie bezüglich bis a' und b' reichen mögen, und construire das Normalsegment $aa'b'b$. Dann ist dieses offenbar dem Segment $AA'B'B$ congruent. Nun seien F und f einerseits, G und g andererseits die Punkte, in denen die Asymptoten von den Linien aC und bD getroffen werden. Dann ist wegen der Gleichheit von CF und af, sowie andererseits von DG und bg:

$$\triangle CC'F \cong aa'f, \quad \triangle DD'G \cong bb'g,$$

folglich

$$C'F = aa' = AA',$$
$$D'G = bb' = BB'.$$

Nun aber verhält sich wegen der Gleichungen

$$AA' = \tfrac{1}{2}.\frac{a^2+b^2}{A'O}, \quad BB' = \tfrac{1}{2}.\frac{a^2+b^2}{B'O}$$

u. s. w.

und der vorausgesetzten Proportion auch

$$AA' : BB' = CC' : DD',$$

also auch

$$C'F : D'G = CC' : DD'.$$

Mithin sind die beiden Dreiecke $CC'F$ und $DD'G$ ähnlich, CF parallel DG. Hieraus folgt, dass das Segment $CDGF$ gleich dem Segment $abgf$ sei. Aber wegen der Congruenz der Dreiecke $CC'F$ und $aa'f$, sowie der Dreiecke $DD'G$ und $bb'g$ ist auch das Normalsegment $CC'D'D = aa'b'b = AA'B'B$.

Zusatz. Ist also das Normalsegment $AA'C'C$ das Doppelte von $AA'B'B$, so verhält sich

$$OA' : OB' = OB' : OC',$$

d. h. OB' ist die mittlere Proportionale zwischen $A'O$ und $C'O$.

Hieraus geht ohne Weiteres hervor, wie ein gegebenes Normalsegment $AA'C'C$ zu halbiren sei.

5) *Folgerungen.* Es sei A (Taf. II. Fig. 1.) der Scheitel einer gleichseitigen Hyperbel mit der Potenz $\frac{1}{2}a^2 =$ Eins, woraus hervorgeht:

$$a = \sqrt{2}.$$

Alsdann ist auch $OA' = AA'$ gleich Eins. Nun wird es offenbar eine Ordinate BB' geben, durch welche ein Normalsegment $AA'B'B$ vom Flächeninhalt Eins abgeschnitten wird. Die unbekannte Abscisse OB' wollen wir der Kürze wegen durch e bezeichnen. Entspricht nun die Abscisse OC' dem Flächeninhalt Zwei, so hat man

$$OA' : OB' = OB' : OC',$$

folglich

$$OC' = e^2.$$

Ist $AA'D'D$ dreimal so gross als $AA'B'B$, so hat man:

$$OA' : OB' = OC' : OD',$$
$$OD' = e^3,$$
u. s. w.

Es ist also für alle Abscissenwerthe, deren Logarithmen in dem auf die Basis e gegründeten System ganze Zahlen sind, bewiesen, dass die Logarithmen jedesmal den Flächeninhalt des durch die Abscisse bestimmten, vom Scheitel aus gerechneten Normalsegments ausdrücken. Die auf die Basis e gegründeten Logarithmen nennt man hyperbolische Logarithmen, und man hat also, wenn man den Flächeninhalt irgend eines Normalsegments durch s bezeichnet, für jeden Werth von s, der eine ganze Zahl ist:

$$s = \log\text{hyp}\, x.$$

Diese Behauptung lässt sich sogleich durch folgende Betrachtung erweitern: Ist OM' die mittlere Proportionale zwischen OB' und OC', also Segment $BB'M'M = CC'M'M$, so hat man:

$$\text{S. } AA'M'M = \frac{\text{S. } AA'B'B + \text{S. } AA'C'C}{2}$$
$$= \frac{\log\text{hyp}.OB' + \log\text{hyp}.OC'}{2}$$
$$= \log\text{hyp}. \sqrt{OB'.OC'} = \log\text{hyp}. OM'.$$

Folglich gilt die Gleichung

$$s = \log\text{hyp}\, x$$

auch für alle Werthe von s, die durch Einschaltung eines arithmetischen Mittels aus der natürlichen Zahlenreihe erzeugt werden können, während man diese Einschaltungen offenbar in's Unendliche fortsetzen kann.

6) *Lehrsatz.* **Für jeden Werth von s und x gilt unter den Voraussetzungen des vorigen Paragraphen die Gleichung**

$$s = \log\text{hyp}\, x.$$

Beweis. Denn wäre etwa

$$s = \log\text{hyp}\, x + q,$$

so liesse sich ein Werth z der Abscisse denken und ein zugehöriger Logarithmus t, die beide durch Einschaltung des geometrischen und arithmetischen Mittels einerseits aus der Reihe $1, e^2, e^3, \ldots$ andererseits aus der natürlichen Zahlenreihe entstanden sind, wäh-

rend t der Bedingung unterworfen sein soll, zwischen $\log\mathrm{hyp}\, x$ und $\log\mathrm{hyp}\, x + q$ zu liegen. Alsdann drückt t das zum Abscissenwerth z gehörige Segment aus. Da nun t kleiner ist als s, so müsste auch z kleiner sein als x. Es ist aber im Gegentheil grösser, weil der gemachten Voraussetzung gemäss, die augenscheinlich immer zu erfüllen ist,

$$\log z > \log x.$$

7) *Zusatz.* Die Gleichung

$$s = \log\mathrm{hyp}\, x$$

bleibt auch richtig, wenn man sich unter s den Inhalt des zugehörigen Sectors vorstellt. Für diesen ist es aber bequemer, statt der auf die Asymptoten bezogenen Koordinaten lieber die auf die Axen der Hyperbel bezogenen einzuführen.

Fällt man vom Punkte M der gleichseitigen Hyperbel (Taf. II. Fig. 2.) ein Loth MP auf die Axe und verlängert es, bis es die Asymptote in Q schneidet, so hat man:

$$PQ = OP = u,$$
$$MQ = OP - PM = u - v.$$

Nun ist $\overline{OQ}^2 = 2.u^2$, und wenn man von M das Loth MM' auf die Asymptote fällt:

$$2\overline{MM'}^2 = 2\overline{M'Q}^2 = \overline{MQ}^2 = (u-v)^2.$$

Hieraus folgt

$$OM' = OQ - M'Q = u\sqrt{2} - \frac{u-v}{\sqrt{2}} = \frac{u+v}{\sqrt{2}}.$$

Folglich hat man für den Sector OFM den Ausdruck:

$$s = \log\mathrm{hyp}\frac{u+v}{\sqrt{2}}.$$

Denken wir uns nun eine andere gleichseitige Hyperbel, welche anstatt der Axe $2\sqrt{2}$ die beliebige Axe $2a$ hat, so ist diese Hyperbel eine der bisher betrachteten ähnliche Figur, weil alle gleichseitigen Hyperbeln einander ähnlich sind, und man hat daher, wenn man die den Koordinaten u und v entsprechenden Koordinaten durch u' und v' bezeichnet, die Proportionen:

$$u : u' = v : v' = \sqrt{2} : a;$$

und wenn s' den Flächeninhalt, welcher dem Inhalte s entspricht, bezeichnet, so hat man

$$s':s = 2:a^2.$$

Hieraus geht hervor:

$$s' = \frac{a^2}{2}\log\text{hyp}\frac{u'+v'}{a}.$$

Denkt man sich ferner eine ungleichseitige Hyperbel mit den Axen $2a$ und $2b$, und bezeichnet die Koordinaten derselben durch u_1 und v_1, den zugehörigen Sector durch s_1, so hat man:

$$u' = u_1, \quad v':v_1 = a:b, \quad s':s_1 = a:b.$$

Hieraus folgt:

$$s_1 = \frac{ab}{2}\log\text{hyp}\left(\frac{u_1}{a}+\frac{v_1}{b}\right).$$

Betrachtet man nun ein Flächenstück, wie in Taf. II. Fig. 2. FPM, und bezeichnet dasselbe durch S, so hat man:

$$S = \triangle\, OPM - \text{Sector } OFM = \tfrac{1}{2}u_1v_1 - \frac{ab}{2}\log\left(\frac{u_1}{a}+\frac{v_1}{b}\right).$$

8) Es kommt jetzt noch darauf an, die Zahl e zu berechnen. Man denke sich (Taf. II. Fig. 1.) BB' sehr nahe an AA'. Alsdann ist das Segment $AA'B'B$, wie überhaupt, grösser als ein Rechteck, welches $A'B'$ zur Grundlinie und BB' zur Höhe hat, dagegen kleiner als ein Rechteck, welches dieselbe Grundlinie, aber AA' zur Höhe hat. Da AA' der Annahme nach gleich Eins ist, so hat man also, wenn man $A'B' = \frac{1}{m}$ nimmt:

$$s = \log\text{hyp}\left(1+\frac{1}{m}\right) > \frac{1}{m+1}$$
$$< \frac{1}{m}.$$

Dies giebt die beiden Ungleichungen:

$$e^{\frac{1}{m+1}} < 1 + \frac{1}{m},$$

$$e^{\frac{1}{m}} > 1 + \frac{1}{m};$$

oder auch

$$e > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m, \quad e < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Nimmt man beiderseits die briggischen Logarithmen, so findet man:

$$\log \text{brigg}\, e > m \log \text{brigg}(1+\frac{1}{m})$$

$$< (m+1) \log \text{brigg}(1+\frac{1}{m}).$$

Mittelst dieser Ungleichungen kann man e bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit erhalten. Setzt man $m = 1000000$, so hat man

$$\log \text{brigg}\, e > 1000000 \log \text{brigg}\,(1{,}000001)$$

$$< 1000001 . \log \text{brigg}\,(1{,}000001),$$

wodurch man e schon sehr genau erhält.

Sehr leicht erhält man auch e mittelst des binomischen Lehrsatzes, nämlich:

$$e > 1+1+(1-\frac{1}{m})\frac{1}{1.2}+(1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\frac{1}{1.2.3}$$

$$< 1+1+\frac{1}{m}+(1+\frac{1}{m})\frac{1}{1.2}+(1+\frac{1}{m})(1-\frac{1}{m})\frac{1}{1.2.3}.$$

Auch durch blosses Quadriren kann man e erhalten, wie leicht einzusehen ist.

Es würde hier auch der Ort sein, nachzuweisen, dass e die Summe ist der unendlichen Reihe

$$1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}\cdots\cdots$$

Will man den Satz von der Aehnlichkeit der gleichseitigen Hyperbeln nicht voraussetzen, so verfährt man folgendermassen. Es sei x_1 derjenige Abscissenwerth, welcher das Segment mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{4}a^2$ bestimmt. Alsdann setzt man:

$$\frac{\sqrt{2}.x_1}{a} = e,$$

und es ist leicht zu zeigen, dass, wenn man hat:

$$\frac{\sqrt{2}.x_2}{a} = e^2, \quad \frac{\sqrt{2}.x_3}{a} = e^3, \quad \frac{\sqrt{2}.x_4}{a} = e^4,$$

die den Abscissen x_2, x_3, x_4 entsprechenden Segmente das Doppelte, Dreifache und Vierfache von $\frac{1}{4}a^2$ sind. Mithin hat man:

$$s=\frac{a}{2}\log\text{hyp}\frac{\sqrt{2}.x}{a},$$

und es ist nicht schwer, diese Formel in voller Allgemeinheit zu beweisen.

VI.

Ein Beitrag zur Geometrie des Lineals *).

Von
dem Herausgeber.

Die Geometrie des Lineals sucht alle geometrische Aufgaben bloss mittelst der geraden Linie, also mit Ausschliessung des Kreises, zu lösen. Die folgenden, die Beschreibung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte betreffenden Bemerkungen sollen hiezu einen kleinen Beitrag liefern.

Dass Pascal's mystisches Sechseck allgemein für alle Kegelschnitte gilt, ist bekannt, so wie auch, dass es bei diesem Satze ganz willkührlich ist, in welcher Ordnung und Folge die auf dem Kegelschnitte liegenden sechs Punkte genommen werden. Bekanntlich wird der Satz allgemein so ausgesprochen, dass die drei Durchschnittspunkte je zweier Gegenseiten eines in einen Kegelschnitt beschriebenen Sechsecks jederzeit in derselben Geraden liegen. Zu dem Zwecke, welchen ich hier habe, will ich den Satz auf folgende Art aussprechen:

---

*) Géométrie de la Règle. M. s. z. B. Traité des propriétés projectives des figures par Poncelet. Paris 1822. p. 76.

Wenn man von einem Punkte P' (Taf. II. Fig. 3.) aus drei gerade Linien zieht, welche einen beliebigen Kegelschnitt in den Punkten A, M; B, M'; C, M'' schneiden, und dann die Durchschnittspunkte P und P'' der Linien BM, CM' und BM'', AM' bestimmt, so liegen die drei Punkte P, P', P'' jederzeit in einer geraden Linie.

Betrachtet man nämlich das in den Kegelschnitt beschriebene, in der Figur durch stärkere Linien ausgezeichnete Sechseck $AM'CM''BM$, so sind offenbar BM, CM'; ferner AM, CM''; endlich AM', BM''; als gegenüberstehende Seiten dieses Sechsecks zu betrachten, und deren Durchschnittspunkte P, P', P'' liegen also nach dem Pascal'schen Satze in derselben Geraden, wie behauptet wurde.

Da nun bekanntlich durch fünf Punkte sich immer nur ein Kegelschnitt beschreiben lässt, oder durch fünf Punkte ein Kegelschnitt vollkommen bestimmt wird, so wird auf der Stelle die Richtigkeit der folgenden Behauptung erhellen:

Wenn A, B, C, M, M' fünf beliebige Punkte sind, so ziehe man die Linien BM, CM' und AM, BM', bestimme deren Durchschnittspunkte P und P', und lege durch P und P' eine gerade Linie. Zieht man dann die Linie AM', bestimmt deren Durchschnittspunkt P'' mit der durch P und P' gelegten Geraden, zieht sodann die Linien BP'' und CP', und bestimmt deren Durchschnittspunkt M'', so ist M'' ein Punkt des durch die fünf Punkte A, B, C, M, M' vollkommen bestimmten Kegelschnitts.

Denn wäre M'' kein Punkt dieses Kegelschnitts, so schneide die Linie CP' denselben in einem anderen Punkte, welchen wir uns durch M_1'' bezeichnet denken wollen; zieht man dann die Linie BM_1'' und verlängert dieselbe, wenn es nöthig ist, bis AM' in dem von P'' jedenfalls verschiedenen Punkte P_1'' geschnitten wird, so liegen nach dem obigen Ausdrucke des Pascal'schen Satzes die drei Punkte P, P', P_1'' in einer geraden Linie, was ungereimt ist, weil nach der Construction die Punkte P, P', P'' in einer geraden Linie liegen. Also ist M'' ein Punkt des durch die fünf Punkte A, B, C, M, M' vollkommen bestimmten Kegelschnitts.

Hieraus ergiebt sich nun unmittelbar die folgende Methode, beliebig viele Punkte eines durch fünf gegebene Punkte bestimmten Kegelschnitts zu finden, welche freilich ihrer Natur nach immer nur eine discontinirliche Folge von Punkten dieses Kegelschnitts geben und nie zu einer organischen Beschreibung dessel-

ben führen, aber doch in manchen Fällen, wo es darauf ankommt, mit Schnelligkeit und Leichtigkeit noch eine grössere Anzahl von Punkten des gesuchten Kegelschnitts zu finden, mit Nutzen Anwendung finden kann.

Die fünf gegebenen Punkte, durch welche ein Kegelschnitt beschrieben werden soll, seien A, B, C, M, M' (Taf. II. Fig. 4.). Man ziehe die Linien BM, CM' und AM, BM', bestimme deren Durchschnittspunkte P und P', lege durch dieselben eine Gerade, welche wir in der Folge in der Kürze durch L bezeichnen wollen, ziehe die Linie AM', bestimme deren Durchschnittspunkt P'' mit der Linie L, ziehe die Linien BP'' und CP' und bestimme deren Durchschnittspunkt M''. Hierauf ziehe man die Linie AM'', bestimme deren Durchschnittspunkt P''' mit der Linie L, ziehe die Linien BP''' und CP'' und bestimme deren Durchschnittspunkt M'''. Ferner ziehe man die Linie AM''', bestimme deren Durchschnittspunkt P^{IV} mit der Linie L, ziehe die Linien BP^{IV} und CP''' und bestimme deren Durchschnittspunkt M^{IV}. Wie man auf diese Art fortschreiten und beliebig viele Punkte M'', M''', M^{IV}, M^{V},.... des durch die fünf gegebenen Punkte A, B, C, M, M' bestimmten Kegelschnitts finden kann, ist klar. Auch bedarf es kaum noch einer besonderen Bemerkung, dass man auf ganz ähnliche Weise in der Linie L auch nach der anderen Seite des Punktes P hin fortschreiten kann, wie aus der Figur mit hinreichender Deutlichkeit ohne einer weiteren Erläuterung zu bedürfen ersichtlich ist.

Ich unterlasse nicht, zu bemerken, dass diese einfache Methode, beliebig viele Punkte eines durch fünf gegebene Punkte bestimmten Kegelschnitts zu finden, schon von dem scharfsinnigen Lambert in seiner Freien Perspective. Zweite Auflage. Zweiter Theil. Zürich. 1774. S. 165 *) dem Wesentlichen nach angegeben worden ist. Lambert leitet dieselbe aber in seinem, sehr viele schöne Sachen enthaltenden Werkchen aus den von ihm gegebenen Regeln der Perspective sehr kurz ab, so dass sie an jenem Orte nur dem verständlich werden kann, der sich mit diesen Regeln vollständig bekannt und vertraut gemacht hat. Die Auffindung des von mir im Vorhergehenden gegebenen Nachweises des unmittelbaren Zusammenhangs dieser Methode mit dem berühmten Pascal'schen Theorem hat mir

---

*) In der ersten Auflage, welche unter dem Titel: La Perspective, affranchie de l'embarras du Plan géometral. Par J. H. Lambert. Zuric. 1759. erschienen ist, findet sich dieselbe nicht.

daher eine kleine Freude gemacht. Zugleich liefert dieselbe ein gutes Beispiel zu der Geometrie des Lineals. Ob sich diese Methode noch anderwärts findet, kann ich jetzt mit Bestimmtheit nicht sagen. In dem oben angeführten berühmten Werke des Herrn Poncelet kommt sie, so viel ich habe finden können, nicht vor, namentlich nicht in dem: „Géométrie de la Règle et des Transversales" überschriebenen Chapitre I. der Section II *), was insofern bemerkenswerth ist, weil Herr Poncelet sonst nicht selten von Lambert's trefflichem Werkchen Gebrauch gemacht hat, dabei vielfach unterstützt von dem bekanntlich auch durch grosse literarisch-mathematische Gelehrsamkeit ausgezeichneten Herausgeber der Nouvelles Annales de Mathématiques, Herrn O. Terquem in Paris, von welchem Herr Poncelet p. 269. in Bezug auf einen anderen Gegenstand sagt: „Nous ignorions que ceux relatifs à la parabole eussent été le sujet des recherches de Lambert; et c'est à l'érudit bibliothécaire du Musée central d'Artillerie, M. Terquem, que nous devons cette remarque, dont nous nous empressons, comme on voit, de profiter, en lui témoignant ici toute notre reconnaissance."

---

*) Eine, wie es scheint, auf ähnlichen Gründen beruhende, von der Lambert'schen aber doch verschiedene Construction kommt allerdings p. 96. vor, die von Desargues und Brianchon entlehnt ist.

VII.

Ein Satz von der Hyperbel.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lebensversicherungs-Calculator der k. k. p. Azienda Assicuratrice zu Triest.

Es ist eine bekannte Aufgabe der ebenen Trigonometrie, von einem gegebenen Punkte aus eine Gerade so zu ziehen, dass das zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels abgeschnittene Dreieck einem gegebenen Flächenraume gleich sei; wir wollen nun annehmen, der gegebene Punkt liege auf einem der beiden Schenkel, z. B. auf OS (Taf. III. Fig. 1.), und bewege sich von O nach S, während die Secante AT' gleichzeitig ihre Richtung dergestalt ändert, dass der Flächenraum des Dreieckes OAB immer derselbe bleibt. Ferner theilen wir das, zwischen den Schenkeln enthaltene Stück AB einer jeden solchen Secante in zwei gleiche Theile und wollen die Gleichung derjenigen Kurve zu bestimmen suchen, welche entsteht, wenn man sämmtliche Halbirungspunkte M continuirlich verbindet.

Zu diesem Zwecke theilen wir den Winkel SOS' in zwei gleiche Theile und nehmen die Theilungslinie Ox zur Abscissenaxe, die Spitze O zum Ursprung und $Oy \perp Ox$ zur Ordinatenaxe; ferner ziehen wir AQ, MP, BR senkrecht und ML parallel zu Ox, und setzen:

$$OP = x,\quad MP = y,\quad OA = u,\quad OB = v.$$

Bezeichnen wir den constanten Flächenraum des Dreieckes OAB mit $\varDelta$, so muss der Bedingung der Aufgabe gemäss $2\varDelta = uv.\mathrm{Sin}\,2\alpha$ sein oder

$$(1)\qquad \varDelta = uv.\mathrm{Sin}\,\alpha.\mathrm{Cos}\,\alpha.$$

Eine der beiden Grössen u und v kann willkürlich gewählt werden und alsdann wird die andere durch die Gleichung (1) bestimmt. Mit u und v ändert sich zugleich die Grösse und Richtung der Geraden AB, also die Lage des Punktes M, d. h. die Coordinaten x und y der gesuchten Kurve. Gelingt es uns also, u und v als Functionen von x und y darzustellen, so können wir dieselben aus (1) eliminiren, und die Eliminations-Gleichung ist alsdann die Gleichung der fraglichen Kurve.

Aus der Construction ist nun ersichtlich, dass $PQ = RP$ und $AL = MP + RB$, denn PQ und RP sind nichts anderes, als die Projectionen der Hälften AM und BM der Geraden AB auf die Abscissenaxe; ebenso sind AL und $MP + RB$ gleich den Projectionen derselben Stücke auf die Ordinatenaxe. Statt dieser beiden Gleichungen kann man auch schreiben:

$$OQ - OP = OP - OR \text{ oder } OP = \frac{OQ + OR}{2} = x,$$

$$AQ - MP = MP + RB \text{ oder } MP = \frac{AQ - RB}{2} = y.$$

Weil aber

$$OQ = u.\mathrm{Cos}\,\alpha, \quad OR = v.\mathrm{Cos}\,\alpha,$$

$$AQ = u.\mathrm{Sin}\,\alpha, \quad RB = v.\mathrm{Sin}\,\alpha$$

ist, so wird

$$x = \tfrac{1}{2}(u + v).\mathrm{Cos}\,\alpha, \quad y = \tfrac{1}{2}(u - v).\mathrm{Sin}\,\alpha,$$

also

$$u + v = \frac{2x}{\mathrm{Cos}\,\alpha}, \quad u - v = \frac{2y}{\mathrm{Sin}\,\alpha},$$

mithin

$$u = \frac{x}{\mathrm{Cos}\,\alpha} + \frac{y}{\mathrm{Sin}\,\alpha}, \quad v = \frac{x}{\mathrm{Cos}\,\alpha} - \frac{y}{\mathrm{Sin}\,\alpha}.$$

Werden diese Werthe in (1) substituirt, so erhält man:

$$\Delta = \left[\frac{x^2}{\mathrm{Cos}^2\alpha} - \frac{y^2}{\mathrm{Sin}^2\alpha}\right].\mathrm{Sin}\,\alpha.\mathrm{Cos}\,\alpha \text{ oder } \frac{x^2}{\Delta.\mathrm{ctg}\,\alpha} - \frac{y^2}{\Delta.\mathrm{tg}\,\alpha} = 1.$$

Setzt man den Zahlwerth von

(2) $\sqrt{\Delta.\mathrm{ctg}\,\alpha} = a$ und jenen von $\sqrt{\Delta.\mathrm{tg}\,\alpha} = b$,

so geht die Gleichung über in folgende:

(3) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Die gesuchte Kurve ist also eine Hyperbel mit den Axen a und b, und da aus (2) folgt:

(4) $$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\alpha,$$

so sind die Schenkel OS; OS' die Asymptoten derselben.

Ferner ist

$$\text{ar}.OAB=\text{ar}.OAN+\text{ar}.ONB$$

oder

$$\varDelta=\tfrac{1}{2}u.ON.\operatorname{Sin}\alpha+\tfrac{1}{2}v.ON.\operatorname{Sin}\alpha,$$

$$\varDelta=\tfrac{1}{2}(u+v).ON.\operatorname{Sin}\alpha;$$

nun für $\frac{1}{2}(u+v)$ seinen Werth $\frac{x}{\operatorname{Cos}\alpha}$ gesetzt und ON bestimmt, gibt

$$ON=\frac{\varDelta.\operatorname{ctg}\alpha}{x}=\frac{a^2}{x}.$$

Da aber $NP=OP-ON$, so wird

(5) $$NP=x-\frac{a^2}{x}.$$

Der zweite Theil dieser Gleichung bezeichnet bekanntlich die Länge der Subtangente der Hyperbel für den Punkt x, y; die Tangente dieses Punktes M geht also auch durch den Punkt N und ist folglich mit der Geraden AB identisch.

Wir wollen nun annehmen, M sei irgend ein Punkt einer beliebigen Hyperbel, deren Asymptoten OS, OS' sind und TT' sei die Tangente in diesem Punkte, und wollen versuchen, den Flächenraum $\varDelta$ des Dreieckes OAB als Function der Coordinaten x_1y_1 des Punktes M darzustellen, um zu erkennen, inwiefern sich der Flächenraum $\varDelta$ bei einer beliebigen Hyperbel ändert, wenn man von einem Punkte derselben zu einem andern übergeht.

Ist nun

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

die Gleichung der Hyperbel, so muss der Voraussetzung gemäss

$$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\alpha$$

sein, welche Tangente wir kurz mit μ bezeichnen. Ferner ist

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{b^2.x_1}{a^2.y_1}=\mu^2.\frac{x_1}{y_1},$$

daher hat man als Gleichungen der Geraden:

$$(6)\qquad OS\ldots.\ y=\mu x,$$

$$(7)\qquad OS'\ldots.\ y=-\mu x,$$

$$(8)\qquad TT'\ldots.\ y-y_1=\mu^2.\frac{x_1}{y_1}.(x-x_1).$$

Aus (6) und (8) findet man die Coordinaten A_x, A_y des Durchschnittspunktes A und aus (7) und (8) jene B_x, B_y des Durchschnittspunktes B, und zwar ist:

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{ll} A_x=x_1+\dfrac{y_1}{\mu}, & B_x=x_1-\dfrac{y_1}{\mu}, \\ A_y=\mu.(x_1+\dfrac{y_1}{\mu}), & B_y=-\mu.(x_1-\dfrac{y_1}{\mu}); \end{array}\right.$$

daher wird:

$$\overline{OA}^2=u^2=A_x^2+A_y^2=(x_1+\frac{y_1}{\mu}).(1+\mu^2)\ \text{und}\ u=(x_1+\frac{y_1}{\alpha})\sqrt{1+\mu^2},$$

$$\overline{OB}^2=v^2=B_x^2+B_y^2=(x_1-\frac{y_1}{\mu}).(1+\mu^2)\ \text{und}\ v=(x_1-\frac{y_1}{\mu})\sqrt{1+\mu^2}.$$

Weil $\operatorname{tg}\alpha=\mu$, so wird $\operatorname{Sin}\alpha=\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$, $\operatorname{Cos}\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$; werden diese Werthe in die Gleichung

$$\Delta=uv.\operatorname{Sin}\alpha.\operatorname{Cos}\alpha$$

substituirt, so erhält man:

$$\Delta=(x_1^2-\frac{y_1^2}{\mu^2}).\mu=\mu.x_1^2-\frac{y_1^2}{\mu}=\frac{b}{a}.x_1^2-\frac{a}{b}.y_1^2=ab.\left(\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right);$$

weil aber x_1, y_1 die Coordinaten eines Punktes der Hyperbel sind, so ist

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

mithin

$$(10)\qquad \Delta=ab,$$

d. h. der Flächenraum Δ des Dreieckes OAB ist von den Coordinaten x_1, y_1 des Punktes M unabhängig, also für alle Punkte der Hyperbel constant.

Ferner geben die Gleichungen (9):

$$\text{(11)} \qquad \frac{A_x + B_x}{2} = x_1 \quad \text{und} \quad \frac{A_y + B_y}{2} = y_1,$$

daher liegt der Berührungspunkt M im Mittelpunkte der Geraden AB.

Die Ergebnisse dieser kleinen Untersuchung können schliesslich in folgendem Lehrsatze vereinigt werden:

In jeder Hyperbel hat das, von den Asymptoten OS, OS' und einer beliebigen Tangente TT' gebildete Dreieck OAB denselben Flächenraum, wie das Rechteck ihrer Halbaxen, und das zwischen den Asymptoten OS, OS' enthaltene Stück AB der Tangente TT' wird stets von dem Berührungspunkte M halbirt.

VIII.

Auflösung einer linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung durch bestimmte Integrale.

Von

Herrn Dr. *R. Hoppe*,

Privatdocenten an der Universität zu Berlin.

Es ist bekannt, dass die ganzen elliptischen Functionen erster und zweiter Gattung als Functionen des Modulus linearen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung genügen; doch ist dabei leicht

zu bemerken, dass sie nur specielle Fälle allgemeinerer Functionen darstellen, deren zweiter Differenzialquotient sich in linearer Form auf den ersten und auf die primäre Function zurückführen lässt. Im Folgenden soll die Function

$$y = f(x, \alpha, \beta, \gamma) = f(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + x\sin^2\varphi)^\alpha \sin^\beta\varphi \cos^\gamma\varphi \partial\varphi$$

zu Grunde gelegt, die von ihr befriedigte Differenzialgleichung bestimmt und aus ihrer vollständigen Integration einige Folgerungen gezogen werden.

Setzt man der Kürze wegen

$$p = 1 + x\sin^2\varphi,$$

so wird

$$\sin^2\varphi = \frac{p-1}{x}, \quad \cos^2\varphi = \frac{1+x-p}{x};$$

woraus sich die Relationen ergeben:

$$f(x, \alpha, \beta+2, \gamma) = \frac{1}{x} f(x, \alpha+1, \beta, \gamma) - \frac{1}{x} f(x, \alpha, \beta, \gamma),$$

$$f(x, \alpha, \beta, \gamma+2) = \frac{1+x}{x} f(x, \alpha, \beta, \gamma) - \frac{1}{x} f(x, \alpha+1, \beta, \gamma)$$

Demnach erhält man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha f(x, \alpha-1, \beta+2, \gamma)$$

$$= \frac{\alpha}{x} f(\alpha) - \frac{\alpha}{x} f(\alpha-1),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \alpha(\alpha-1) f(x, \alpha-2, \beta+4, \gamma)$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)}{x^2} \{ f(\alpha) - 2f(\alpha-1) + f(\alpha-2) \}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(p^{\alpha-1}\sin^{\beta+1}\varphi\cos^{\gamma+1}\varphi) = 2(\alpha-1)xp^{\alpha-2}\sin^{\beta+2}\varphi\cos^{\gamma+2}\varphi$$

$$+ (\beta+1)p^{\alpha-1}\sin^\beta\varphi\cos^{\gamma+2}\varphi - (\gamma+1)p^{\alpha-1}\sin^{\beta+2}\varphi\cos^\gamma\varphi$$

$$= \frac{\sin^\beta\varphi\cos^\gamma\varphi}{x}\{-(2\alpha+\beta+\gamma)p^\alpha + (4\alpha+\beta+\gamma-2+(2\alpha+\beta-1)x)p^{\alpha-1}$$

$$-2(\alpha-1)(1+x)p^{\alpha-2}\};$$

Integrirt man nach φ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so verschwindet die linke Seite, so lange β und $\gamma > -1$ sind, und man erhält die Relation:

$$(2\alpha+\beta+\gamma)f(\alpha)-(4\alpha+\beta+\gamma-2+(2\alpha+\beta-1)x)f(\alpha-1)$$
$$+2(\alpha-1)(1+x)f(\alpha-2)=0.$$

Eliminirt man zwischen dieser Gleichung und den zwei Differenzialformeln $f(\alpha-1)$ und $f(\alpha-2)$, so erhält man

$$y''+\frac{\beta+\gamma+2-(2\alpha-\beta-3)x}{2x(1+x)}y'-\frac{\alpha(\beta+1)}{2x(1+x)}y=0,$$

wo y', y'' die Differenzialquotienten nach x bezeichnen. Setzt man, um das Mittelglied zu entfernen,

$$y=\frac{(1+x)^{\frac{2\alpha+\gamma-1}{4}}}{x^{\frac{\beta+\gamma+2}{4}}}z,$$

so erhält die Gleichung folgende Form:

$$\frac{z''}{z}=\frac{a}{(1+x)^2}+\frac{b}{x(1+x)}+\frac{c}{x^2},$$

und zwar ist:

$$a=\frac{1}{16}(2\alpha+\gamma-1)(2\alpha+\gamma+3),$$

$$b=\frac{1}{2}\alpha(\beta+1)-\frac{1}{8}(2\alpha+\gamma-1)(\beta+\gamma+2),$$

$$c=\frac{1}{16}(\beta+\gamma+2)(\beta+\gamma-2).$$

Da man in der Auflösung über drei Constanten α, β, γ zu verfügen hat, so kann man in der Differenzialgleichung a, b, c als beliebig gegeben betrachten. Ihre Integration beruht alsdann bloss auf der Auflösung der letzten drei Gleichungen, die, wenn man

$$2\alpha+\gamma+1=2\lambda,\quad \beta+\gamma=2\mu,\quad \alpha(\beta+1)=\nu$$

setzt, folgende einfachere Form annehmen:

$$4a=\lambda^2-1,\quad 4c=\mu^2-1,\quad 2b=\nu-(\lambda-1)(\mu+1),$$

so dass sich ergiebt:

$$\lambda=\pm\sqrt{1+4a},\quad \mu=\pm\sqrt{1+4c},\quad \nu=2b+(-1\pm\sqrt{1+4a})(1\pm\sqrt{1+4c}).$$

Da ferner

$$2\alpha-(\beta+1)=2(\lambda-\mu-1), \quad -2\alpha(\beta+1)=-2\nu$$

ist, so sind 2α und $-(\beta+1)$ die Wurzeln der Gleichung

$$\xi^2-2(\lambda-\mu-1)\xi-2\nu=0,$$

woraus sich die Werthe ergeben:

$$2\alpha=\lambda-\mu-1\pm\sqrt{(\lambda-\mu-1)^2+2\nu},$$

$$\beta=-\lambda+\mu\pm\sqrt{(\lambda-\mu-1)^2+2\nu},$$

$$\gamma=\lambda+\mu\mp\sqrt{(\lambda-\mu-1)^2+2\nu};$$

oder durch a, b, c ausgedrückt:

$$2\alpha=\pm\sqrt{1+4a}\mp\sqrt{1+4c}-1\pm\sqrt{1+4(a+b+c)},$$

$$\beta=\mp\sqrt{1+4a}\pm\sqrt{1+4c}\pm\sqrt{1+4(a+b+c)},$$

$$\gamma=\pm\sqrt{1+4a}\pm\sqrt{1+4c}\mp\sqrt{1+4(a+b+c)};$$

wo die Vorzeichen der verschiedenen Quadratwurzeln von einander unabhängig sind. Man erhält demnach acht verschiedene Werthe von z, unter denen nur diejenigen zu verwerfen sind, wo β oder γ oder, falls sie imaginär sind, der reelle Theil einer dieser Grössen, nicht >-1 ist.

Wir betrachten zuerst den Fall, wo alle acht Auflösungen gültig sind. Hier hat man:

$$z=\frac{x^{\frac{\beta+\gamma+2}{4}}}{(1+x)^{\frac{2\alpha+\gamma-1}{4}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+x\sin^2\varphi)^\alpha\sin^\beta\varphi\cos^\gamma\varphi\,\partial\varphi,$$

und zwar ist

$$\frac{\beta+\gamma+2}{4}=\frac{1\pm\sqrt{1+4c}}{2},$$

hat demnach nur zwei verschiedene Werthe. Bezeichnen nun z_1 und z_2 zwei der acht Werthe von z, in denen $\sqrt{1+4c}$ verschiedenes Vorzeichen hat, so können dieselben kein constantes Verhältniss haben, weil ihr Quotient den Factor x, und ausser ihm keinen hat, der für $x=0$ verschwindet oder unendlich wird. Folglich ist

$$z=Az_1+Bz_2$$

das vollständige Integral der Differenzialgleichung, und jeder andere Werth von z muss für irgend welche Werthe von A und B damit identisch sein. Bezeichnet nun das z zur Linken eine von den sechs übrigen Particularauflösungen und man multiplicirt die Gleichung mit

$$x^{\frac{\sqrt{1+4c}-1}{2}},$$

so hat eine der Grössen Az_1, Bz_2 den Factor

$$x^{\sqrt{1+4c}},$$

die andere keinen mit x verschwindenden Factor. Setzt man jetzt $x=0$, so sieht man, dass entweder A oder $B=0$ sein muss. Folglich haben unter den acht Werthen von z je vier zu einander ein constantes Verhältniss, nämlich diejenigen, in welchen $\sqrt{1+4c}$ dasselbe Vorzeichen hat.

Die Verhältnisszahlen zu bestimmen hat nunmehr keine Schwierigkeit. Es sind unter den sechs Relationen nur zwei wesentlich verschiedene vorhanden: die übrigen ergeben sich aus jenen durch Substitutionen entgegengesetzter Constantenwerthe. Setzt man der Kürze wegen

$$l=\sqrt{1+4a},\quad m=\sqrt{1+4c},\quad n=\sqrt{1+4(a+b+c)},$$

so hat man folgende drei Systeme von Constantenwerthen in Betrachtung zu ziehen:

	$2\alpha+1$	β	γ	$\frac{\beta+\gamma}{2}$	$\frac{2\alpha+\gamma-1}{2}$
1	$l-m+n$	$-l+m+n$	$l+m-n$	m	$l-1$
2	$l-m-n$	$-l+m-n$	$l+m+n$	m	$l-1$
3	$-l-m+n$	$l+m+n$	$-l+m-n$	m	$-l-1$

Unterscheidet man die diesen Systemen zugehörigen Werthe von z durch die gleichnamigen Zeiger 1, 2, 3, so ist

$$\frac{z_3}{z_2}=(1+x)^l\frac{f\left(x,\frac{-l-m+n-1}{2},\ l+m+n,\ -l+m-n\right)}{f\left(x,\frac{l-m-n-1}{2},\ -l+m-n,\ l+m+n\right)},$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{f\left(x,\frac{l-m+n-1}{2},\ -l+m+n,\ l+m-n\right)}{f\left(x,\frac{l-m-n-1}{2},\ -l+m-n,\ l+m+n\right)}.$$

Da diese zwei Grössen constant sind, so kann man zur Rechten $x = 0$ setzen. Da alsdann α nicht mehr in den Ausdrücken vorkommt und β sich mit γ vertauschen lässt, so wird die erstere Grösse $= 1$, und man hat:

$$z_2 = z_3,$$

$$f\left(x, \frac{l-m-n-1}{2}, -l+m-n, l+m+n\right)$$

$$= (1+x)^l f\left(x, \frac{-l-m+n-1}{2}, l+m+n, -l+m-n\right).$$

In Betreff der zweiten Gleichung hat man

$$f(0, \beta, \gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\beta\varphi \cos^\gamma\varphi \partial\varphi,$$

das ist, durch Euler'sche Integrale ausgedrückt:

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\beta+\gamma}{2}+1\right)},$$

folglich ist:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\Gamma\left(\frac{1-l+m+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+l+m-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-l+m-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+l+m+n}{2}\right)}.$$

Setzt man zur Vereinfachung:

$$l = \frac{c-2a+1}{2}, \quad m = \frac{b+c}{2}, \quad n = \pm\frac{2a-b-1}{2},$$

wo das obere Zeichen auf die erstere, das untere auf die letztere Relation anzuwenden ist, so erhält man folgende zwei Transformationen eines bestimmten Integrals:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^b\varphi \cos^c\varphi \partial\varphi}{(1+x\sin^2\varphi)^a} = (1+x)^{\frac{c-2a+1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^c\varphi \cos^b\varphi \partial\varphi}{(1+x\sin^2\varphi)^{1-a+\frac{b+c}{2}}}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{c+1}{2}\right)}{\Gamma(a)\Gamma\left(1-a+\frac{b+c}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2a-1}\varphi \cos^{b+c-2a+1}\varphi \partial\varphi}{(1+x\sin^2\varphi)^{\frac{1+b}{2}}}.$$

Beide sind der Art, dass durch ihre Wiederholung das Integral auf seine anfängliche Form zurückgeführt wird.

Eine dritte Relation wird man zwischen den durch $(+m)$ und $(-m)$ charakterisirten Particularauflösungen finden, wenn man nach dem gewöhnlichen Verfahren aus einer solchen das vollständige Integral darstellt. Sind z_1 und z_2 zwei Auflösungen, die sich nur durch das Zeichen von m unterscheiden, so ist

$$z = Nz_1 \int \frac{\partial x}{z_1^2}$$

das vollständige Integral, in welchem daher auch z_2 enthalten ist. Setzt man z_2 für z, dividirt durch z_1 und differenziirt, so kommt

$$z_1 z_2' - z_2 z_1' = N.$$

Drückt man die z folgendermassen aus:

$$z_1 = x^{\frac{1-m}{2}} (1+x)^{\frac{1-l}{2}} S, \qquad z_2 = x^{\frac{1+m}{2}} (1+x)^{\frac{1-l}{2}} S_1,$$

wo

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+x\sin^2\varphi)^{\frac{l+m+n-1}{2}} \sin^{-l-m+n}\varphi \cos^{l-m-n}\varphi \partial\varphi,$$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+x\sin^2\varphi)^{\frac{l-m+n-1}{2}} \sin^{-l+m+n}\varphi \cos^{l+m-n}\varphi \partial\varphi$$

gesetzt ist, so giebt obige Gleichung:

$$x(1+x)^{1-l}(SS_1' - S_1S') + m(1+x)^{1-l} SS_1 = N,$$

das ist für $x = 0$:

$$N = mSS_1$$

$$= m \frac{\Gamma\left(\frac{1-l+m+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+l+m-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-l-m+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+l-m-n}{2}\right)}{\Gamma(1+m)\,\Gamma(1-m)}$$

$$= \frac{\pi \sin m\pi}{\cos(l-m-n)\frac{\pi}{2} \cos(l+m-n)\frac{\pi}{2}}.$$

Führt man diesen Werth, so wie die Werthe von z_1 und z_2 in die Gleichung

$$z_2 = N z_1 \int \frac{\partial x}{{z_1}^2}$$

ein, so kommt:

$$S_1 = \frac{\pi \sin m\pi x^{-m} S}{\cos(l-m-n)\frac{\pi}{2}\cos(l+m-n)\frac{\pi}{2}} \int_0 \frac{(1-x)^{l-1}\partial x}{x^{1-m} S^2}.$$

Die untere Grenze des Integrals muss nämlich $=0$ sein; denn, da die linke Seite für $x=0$ endlich bleibt, so fordert der Factor x^{-m} zur Rechten, dass das Integral mit x verschwindet.

Es war angenommen worden, dass sämmtliche acht Particularauflösungen existirten. Man bemerkt jedoch leicht, dass die Gültigkeit der aufgestellten Integralformeln durch die Bedingung $\beta > -1$, $\gamma > -1$ keine besondere Beschränkung erleidet, da die nicht gültigen Auflösungen divergente Integrale enthalten, mithin schon an sich ausser Anwendung kommen müssen.

IX.

Zur Kreistheilung.

Von

Herrn *C. Küpper*
in Trier.

Erster Satz. Theilt man von einem Punkte 0 aus den Kreisumfang einmal in a, und darauf in b gleiche Theile, so fallen von diesen beiden Theilungen so viele Theilpunkte zusammen, als der grösste Theiler von a und b Einheiten hat.

Beweis. t' sei irgend ein Theiler von a, b, und man habe: $a=t'.x'$, $b=t'.y'$. Man kann offenbar die Theilung des Kreises in a und b gleiche Theile in der Weise vollziehen, dass man denselben zuerst von 0 aus in t' gleiche Theile und hierauf jeden dieser Theile sowohl in x', als in y' gleiche Theile theilt.

Für jeden Theiler von a, b erhalten wir somit eben so viele zusammenliegende Theilpunkte, als dieser Theiler Einheiten enthält, und es ist klar, dass die Punkte, in welchen zwei Theilpunkte zusammenfallen, durch gleiche Bogen getrennt sind, auf deren jeden x' Theile der Theilung a und y' Theile der Theilung b gehen. Nun wollen wir die Punkte zählen, in welchen überhaupt Theilpunkte zusammenliegen: Von 0 an gerechnet falle zuerst der $x$te Theilpunkt der Theilung a mit dem $y$ten der Theilung b zusammen, so wird weiter der $2x$te, $3x$te,.... Theilpunkt der ersten Theilung mit dem $2y$ten, $3y$ten.... Theilpunkt der zweiten Theilung zusammenliegen; zwischen diesen Punkten aber keine anderen. Da nun der $a$te Theilpunkt der Theilung a und der $b$te Theilpunkt der Theilung b im Punkte 0 sich decken, so muss $a=t.x$, $b=t.y$ sein; d. i., a und b müssen zum gemeinschaftlichen Theiler die Zahl haben, welche anzeigt, wie viele Theilpunkte der einen Theilung mit solchen der anderen überhaupt zusammenfallen. Auch sind diese t Punkte durch gleiche Bogen getrennt, auf deren jeden x Theile der Theilung a und y Theile der Theilung b kommen.

Weil wir nun für einen beliebigen Theiler t' von a und b t' zusammenliegende Theilpunkte bekommen, welche durch gleiche Bogen getrennt sind, und diese letzteren Punkte unter den mit den Zahlen x, $2x$, $3x$,.... in der Theilung a, oder mit y, $2y$, $3y$,.... in der Theilung b bezeichneten enthalten sein müssen, so folgt, dass die Zahlen x', y' beziehlich dieselben Vielfachen von x, y sind, und also auch t ein Vielfaches von t' ist. (Denn sei $x'=m.x$, so hat man $a=tx=t'x'=m.t'.x$, also $t=m.t'$.)

t ist also ein gemeinschaftlicher Theiler von a, b, und zugleich ein Vielfaches von jedem anderen Theiler.

Anmerkung. Man kann auch sogleich zeigen, dass x, y relative Primzahlen sind. Denn hätte man $x=m.p$, $y=m.q$, so könnte man den Abstand $0x$ in x, y gleiche Theile theilen, indem man ihn erst in m gleiche Theile, darauf einen jeden dieser Theile in p und in q gleiche Theile theilte, dann aber würden zwischen 0 und x noch $m-1$ Theilpunkte beider Theilungen zusammenfallen, also im Ganzen: $t+t(m-1)=m.t$.

Zweiter Satz. Wenn man von zwei verschiedenen Punkten eines Kreises eine und dieselbe Theilung b abträgt, so fallen von diesen Theilungen entweder keine oder alle Theilpunkte zusammen, je nachdem nämlich der eine der gedachten Anfangspunkte auf der vom andern aus gemachten Theilung liegt, oder nicht. — Dies ist einleuchtend.

Benutzen wir also der Reihe nach jeden der Punkte 0, 1, 2, ... $x-1$ der Theilung a, um von demselben als Anfangspunkte den Kreis in b gleiche Theile zu theilen, so erhalten wir jedesmal b Theilpunkte, wovon keiner mit einem der früheren zusammenliegt. Vom Punkte x aus erhalten wir aber der Reihe nach die schon gemachten Theilungen wieder, so dass wir im Ganzen $x.b$ verschiedene Theilpunkte erhalten, wir mögen nun alle Punkte der Theilung a als Anfangspunkte nehmen oder nur beliebige x auf einander folgende. Dass die so erhaltenen $x.b$ Punkte durch gleiche Bogen getrennt sind, also den Kreis in $x.b$ gleiche Theile theilen, ergibt sich leicht, wie folgt: Denken wir uns von 0 aus den Kreis in $x.b$ oder nach obiger Bezeichnung in $x.y.t$ gleiche Theile getheilt, und markiren durch 0, 1, 2, ... $a-1$ solche Punkte, wovon jeder vom folgenden durch y jener Theile getrennt ist, so erhalten wir in denselben die Eintheilung des Kreises in $x.t=a$ gleiche Theile. Tragen wir von einem dieser Punkte 0, 1, 2.... als Anfangspunkt die Theilung b ab, so fallen wir stets auf Punkte der Theilung $x.y.t$, weil x von den Bogen, von denen $x.y.t$ auf den Kreisumfang gehen, einen Theil der Theilung b liefern. Verfahren wir ebenso für alle mit 0, 1, 2, ... bezeichnete Punkte, oder nur mit x auf einander folgenden, so erhalten wir $x.b$ verschiedene Theilpunkte, und da wir nie auf andere fallen, als die, welche den Kreis in $x.y.t=x.b$ gleiche Theile theilen, so erhalten wir diese sämmtlich, was zu beweisen war.

Ebenso kann man y auf einander folgende Theilpunkte der Theilung b als Anfangspunkte benutzen, um von denselben aus den Kreis jedesmal in a gleiche Theile zu theilen, und würde ihn dadurch in $y.a=x.b$ gleiche Theile getheilt erhalten.

Anwendung. Mascheroni hat gelehrt, wie man mit Hülfe bloss des Zirkels durch ein Verfahren, das grosse Genauigkeit zulässt, die Seiten des regulären Vierecks, Achtecks, Sechzehnecks, Fünfecks erhalten kann.

Mit Hülfe der vorangehenden Betrachtung führt man nun die Eintheilung des Kreises in 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240 gleiche Theile aus:

In 10 gleiche Theile.	Von jedem Theilpunkte der 2Theilung trage man die 5Theilung ab, oder umgekehrt.
„ 12 „ „	Von jedem Theilpunkte der 3Theilung die 4Theilung.
	Oder von 3 aufeinanderfolgenden Theilpunkten der 6Theilung die 4Theilung.
	Oder von 2 aufeinanderfolgenden Theilpunkten der 4Theilung die 6Theilung.
„ 15 „ „	Von 3 Theilpunkten der 3Theilung die 5Theilung, oder umgekehrt.
„ 24 „ „	Von 3 aufeinanderfolgenden Theilpunkten der 6Theilung die 8Theilung.
	Oder von 4 aufeinanderfolgenden Theilpunkten der 8Theilung die 6Theilung.
„ 30 „ „	Von 6 Theilpunkten der 6Theilung die 5Theilung, u. s. w.
„ $240 = 3.5.16$.	Von jedem Theilpunkte der 16Theilung in 5 gleiche Theile, von jedem der erhaltenen Theilpunkte in 3 gleiche Theile, u. s. w.

Auf diese Weise erhält man mithin die Eintheilung des Kreises in so viel gleiche Theile, als irgend ein Theiler des Products $2^4 \times 3 \times 5$ Einheiten hat. Solcher Theiler gibt es aber: $(4+1)(1+1)(1+1) = 20$ (die 1 mitgerechnet). Durch Hinzunahme der Construction der Siebzehnecksseite würde diese Zahl 40. Für die wirkliche Ausführung dürfte die Bemerkung von Nutzen sein, dass, um eine Theilung a aufzutragen, man nicht nöthig hat, die Sehne in den Zirkel zu nehmen, welche dem Bogen $\frac{1}{a}$ des Kreisumfangs entspricht, sondern, dass man dazu eine Sehne benutzen kann, die zu $\frac{n}{a}$ des Kreisumfangs gehört, wenn nur n und a relative Primzahlen sind.

X.

Untersuchung über geometrische Oerter, welche von Flächen zweiten Grades abhängig sind, nebst Vergleichung der Inhalte verschiedener Segmente von Flächen zweiten Grades.

Von

Herrn *L. Mossbrugger*,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

1.

Es ist Taf. III. Fig. 2. ein Ellipsoid, dessen Achsen $2a$, $2b$, $2c$ sind, gegeben; dasselbe wird durch zwei Systeme von Ebenen so geschnitten, dass die Ebenen des einen Systems mit der Ebene des Hauptschnitts (a, b) parallel sind und die des zweiten Systems mit der Ebene des Hauptschnitts (b, c). Ferner sollen zwei Ebenen, von denen die eine dem erstern und die andere dem zweiten Systeme angehört, eine solche Lage haben, dass das zwischen ihr und dem mit ihr parallelen Hauptschnitt enthaltene Stück des Ellipsoids an Inhalt demjenigen Segment des Ellipsoids gleich ist, das zwischen der anderen Ebene und dem mit ihr parallelen Hauptschnitt enthalten ist. Es wird nun gefragt, welches ist der geometrische Ort der Durchschnittslinien dieser Ebenenpaare?

Auflösung. Es sei $BAOCB$ ein Octant des gegebenen Ellipsoids; BO, AO und CO seien seine Halbachsen a, b, c, welche wir zugleich als Achsen der x, y und z annehmen; ferner seien die Ebenen der Schnitte $EJKD$, $FKGH$ parallel mit den Hauptschnitten (a, b) und (b, c), so muss nach der Bedingung

der Aufgabe, wenn wir den Inhalt des Segments *HFKGCAO* mit V und jenen von *EJABDO* mit V' bezeichnen:

$$V = V' \tag{1}$$

sein.

Bekanntlich ist aber:

$$V = bcx\frac{\pi}{4} - \frac{bcx^3\pi}{12a^2}, \tag{2}$$

$$V' = abz\frac{\pi}{4} - \frac{abz^3\pi}{12c^2}. \tag{3}$$

Aus (1), (2), (3) folgt:

$$bcx\frac{\pi}{4} - \frac{bcx^3\pi}{12a^2} = abz\frac{\pi}{4} - \frac{abz^3\pi}{12c^2}, \tag{4}$$

woraus wir

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \left\{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right\}\left\{\left(\frac{x}{a\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{xz}{3ac} + \left(\frac{z}{c\sqrt{3}}\right)^2\right\}$$

erhalten, oder auch:

$$\left\{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right\}\left\{\left(\frac{x}{a\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{xz}{3ac} + \left(\frac{z}{c\sqrt{3}}\right)^2 - 1\right\} = 0. \tag{5}$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wenn

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \tag{6}$$

und wenn

$$\left(\frac{x}{a\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{xz}{3ac} + \left(\frac{z}{c\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 0 \tag{7}$$

ist.

Die Gleichung (6) gehört einer auf die Ebene der xz senkrechten Ebene an, die mit der Ebene der xy einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente $\frac{c}{a}$ ist. Beschreiben wir daher um das gegebene Ellipsoid ein rechtwinklichtes Parallelepiped, wovon *CUTWAO* der achte Theil ist, und legen durch *AO* und die gegenüberliegende Kante *TU* eine Diagonalebene des Parallelepipeds, so ist diese Ebene derjenige gesuchte Ort, welcher durch die Gleichung (6) dargestellt ist.

Die Gleichung (7) stellt im Allgemeinen einen Cylinder vor, dessen Basis die in der Ebene der xz befindliche Ellipse (7) ist.

Um zu untersuchen, ob und in welchen Fällen die Gleichung (7) für unsere Aufgabe eine geometrische Bedeutung hat, so setzen wir zuerst in der Gleichung (7) $x=0$, so kommt $z=c\sqrt{3}$. Diese Werthe von x und z befriedigen allerdings die Gleichung (4); da aber $\sqrt{3}>1$, also auch $c\sqrt{3}>c$ ist, so trifft eine durch die Erzeugungslinie jenes Cylinders, deren Gleichungen $x=0$, $z=c\sqrt{3}$ sind, gelegte Ebene, die mit dem Hauptschnitt (a, b) parallel ist, das Ellipsoid nicht mehr, kann also hier nicht als geometrischer Ort betrachtet werden. Das Gleiche gilt für die Erzeugungslinie des Cylinders (7), deren Gleichungen $x=a\sqrt{3}$ und $z=0$ sind.

Um aber allgemein bestimmen zu können, ob wirklich einige Erzeugungslinien des Cylinders (7) vorhanden sind, die den Bedingungen der Aufgabe genügen, so wollen wir untersuchen, ob die Ellipsen, deren Gleichungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

$$\left(\frac{x}{a\sqrt{3}}\right)^2+\frac{xz}{3ac}+\left(\frac{z}{c\sqrt{3}}\right)^2=1$$

sind, einander in reellen Punkten schneiden oder nicht. Aus der ersten dieser Gleichungen erhalten wir

$$z=\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Dieser Werth von z, in der letzten Gleichung substituirt, gibt:

$$x=\pm a\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{-15}}{2}},\quad z=\pm c\sqrt{\frac{1\mp\sqrt{-15}}{2}}.$$

Da diese Werthe von x und z imaginär sind, so finden zwischen jenen beiden Ellipsen auch nur vier imaginäre Durchschnittspunkte statt, woraus hervorgeht, dass die letztere Ellipse die erstere ganz umschliesst, ohne sie zu berühren oder zu schneiden; mithin hat auch die Gleichung (7) nur eine algebraische, keineswegs aber eine geometrische Bedeutung.

Hätten wir den geometrischen Ort der Linien gesucht, die so gelegen sind, dass, wenn man durch eine jede derselben zwei, das Ellipsoid schneidende Ebenen legt, von denen die eine parallel mit dem Hauptschnitt (a, c) und die andere parallel mit dem Hauptschnitt (b, c) ist, und dabei die Bedingung gegeben, dass diejenigen Stücke des Ellipsoids, von welchen das eine zwischen dem Hauptschnitt (a, c) und der mit diesem Schnitt parallelen Ebene enthalten ist, das andere aber zwischen dem Hauptschnitt

(b, c) und der mit diesem parallelen Ebene liegt, immer gleiche Inhalte haben, so würden wir, wenn wir den Inhalt des ersteren mit V'' bezeichnen; wie oben gefunden haben:

$$V''=acy\frac{\pi}{4}-\frac{acy^3\pi}{12b^2}, \tag{10}$$

und da der gegebenen Bedingung zufolge $V=V''$ sein soll, so hätten wir für die Gleichungen der geometrischen Oerter jener Linien wie oben gefunden:

$$\frac{y}{b}-\frac{x}{a}=0, \tag{11}$$

$$\left(\frac{y}{b\sqrt{3}}\right)^2+\frac{xy}{3ab}+\left(\frac{x}{a\sqrt{3}}\right)^2=1. \tag{12}$$

Die Gleichung (11) stellt eine durch die Achse $2c$ und die ihr gegenüberliegende Kante TW des umschriebenen Parallelepipeds gehende Diagonalebene vor; die letztere hingegen wieder einen imaginären Cylinder.

Hätten wir den geometrischen Ort der geraden Linien gesucht, durch welche schneidende Ebenen gelegt sind, die mit den Hauptschnitten (a, b) und (a, c) parallel laufen, und welche von dem Ellipsoid gleiche Stücke abschneiden, so würden wir für die Oerter dieser Linien die Gleichungen:

$$\frac{z}{c}-\frac{y}{b}=0, \tag{13}$$

$$\left(\frac{z}{c\sqrt{3}}\right)^2+\frac{yz}{3bc}+\left(\frac{y}{b\sqrt{3}}\right)^2=1 \tag{14}$$

gefunden haben. Die Gleichung (13) stellt eine durch die Achse $2a$ und die ihr gegenüberliegende Kante PT gehende Diagonalebene des Parallelepipeds vor, die Gleichung (14) aber einen imaginären Cylinder.

Wäre endlich die Bedingung gegeben, dass

$$V=V'=V'' \tag{15}$$

sein soll, so liessen sich diese drei Gleichungen auf folgende reduciren:

$$\frac{z}{c}-\frac{x}{a}=\frac{y}{b}-\frac{x}{a}=\frac{z}{c}-\frac{y}{b}=0. \tag{16}$$

Da die dritte dieser drei Gleichungen immer eine Folge der beiden übrigen ist, so stellen je zwei dieser Gleichungen zusammen

die Durchschnittslinie der durch jede derselben ausgedrückten Diagonalebenen des oft erwähnten Parallelepipeds vor. Die Diagonalen dieses Parallelepipeds sind daher die geometrischen Oerter der Punkte, welche die Eigenschaft besitzen, dass wenn man durch jeden derselben drei Ebenen legt, wovon je eine derselben mit einer der Hauptschnitte des Ellipsoids parallel geht, die Stücke dieses letztern, die zwischen einer solchen Ebene und dem ihr parallelen Hauptschnitt enthalten sind, gleich grossen Inhalt haben.

2.

Sind statt der Achsen des Ellipsoids drei zugeordnete Durchmesser $2a'$, $2b'$, $2c'$ desselben gegeben, und bilden die beiden letztern, $2b'$, $2c'$, mit einander einen Winkel λ; ist ferner μ der Winkel, den der erste, $2a'$, mit der Ebene der beiden andern macht, so ist, wenn wir diese drei Durchmesser zu Coordinaten-Achsen annehmen und v in Beziehung auf diese Annahmen dasselbe bezeichnet, was V in 1.:

$$v = \sin\lambda \sin\mu \iint z\,dx\,dy.$$

Mittelst dieser Formel finden wir auf dem bekannten Wege:

$$v = \frac{b'c'\pi}{12a'^2} \sin\lambda \sin\mu \,\{3a'^2x - x^3\}. \qquad (1)$$

Bezeichnet ferner λ' den Winkel, den die Achse der y mit der Achse der x, oder $2b'$ mit $2a'$ bildet, und μ' den Winkel der Achse der z gegen die Ebene der xy, oder den Winkel des Durchmessers $2c'$ mit der Ebene der Durchmesser $2a'$ und $2b'$; bezeichnet endlich v' in dieser Annahme das nämliche, was V' in 1., so ist:

$$v' = \frac{a'b'\pi}{12c'^2} \sin\lambda' \sin\mu' \,\{3c'^2z - z^3\}. \qquad (2)$$

Ist endlich λ'' der Winkel, den die Achse der z mit der Achse der x bildet, und μ'' der Winkel der Achse der y gegen die Ebene der xz, und bedeutet v'' das dem V'' in 1. entsprechende Segment, so ist:

$$v'' = \frac{a'c'\pi}{12b'^2} \sin\lambda'' \sin\mu'' \,\{3b'^2y - y^3\}. \qquad (3)$$

Aus den Werthen von v, v', v'' sehen wir, dass bei den entsprechenden Bestimmungen, die wir in 1. bei V, V', V'' gemacht haben, die gleichen Sätze, wie in 1. hervorgehen würden; nur mit dem Unterschiede, dass das dem Ellipsoid umschriebene Pa-

rallelepiped Seitenflächen hat, die den hier angenommenen Coordinaten-Ebenen parallel sind. Zwischen den Winkeln λ, μ, λ', μ', λ'', μ'' finden nachstehende Beziehungsgleichungen statt:

$$\sin\lambda\sin\mu = \sin\lambda'\sin\mu' = \sin\lambda''\sin\mu'', \tag{4}$$

$$\cos\lambda = \cos\lambda'\cos\lambda'' + \sin\lambda'\sqrt{\sin(\lambda''+\mu')\sin(\lambda''-\mu')}, \tag{5}$$

$$\cos\lambda' = \cos\lambda\cos\lambda'' + \sin\lambda\sqrt{\sin(\lambda''+\mu)\sin(\lambda''-\mu)}, \tag{6}$$

$$\cos\lambda'' = \cos\lambda'\cos\lambda + \sin\lambda'\sqrt{\sin(\lambda+\mu')\sin(\lambda-\mu')}; \tag{7}$$

oder auch statt der drei letzteren:

$$\cos\lambda = \cos\lambda'\cos\lambda'' + \sin\lambda''\sqrt{\sin(\lambda'+\mu'')\sin(\lambda'-\mu'')}, \tag{8}$$

$$\cos\lambda' = \cos\lambda\cos\lambda'' + \sin\lambda''\sqrt{\sin(\lambda+\mu'')\sin(\lambda-\mu'')}, \tag{9}$$

$$\cos\lambda'' = \cos\lambda\cos\lambda' + \sin\lambda\sqrt{\sin(\lambda'+\mu)\sin(\lambda'-\mu)}. \tag{10}$$

3.

Nehmen wir jetzt (Taf. III. Fig. 3.) ein geradlinichtes Paraboloid an, dessen Leit- und Erzeugungslinien die Parabeln SOS' und LOL' sind, von welchen die erste in der Ebene der yz und die andere in der Ebene der xz liegend angenommen wird. Dieses Paraboloid schneiden wir zuerst durch eine mit der Leitparabel SOS' parallele Ebene BLB' und bestimmen den Inhalt V des Solidums, das einerseits von dem parabolischen Schnitt BLB', andererseits von dem diesen Schnitt auf die Ebene yz der Leitparabel projicirenden Cylinderstück $BLB'M'KM$, und drittens von der Ebene $B'O'BMOM'$, die wir als Ebene der xy annehmen, begränzt ist. Ferner bestimmen wir den Inhalt V' des Solidums, das einerseits von dem Theil $OO'BM$ der Ebene der xy, andererseits von dem in der Entfernung $OM=y$ parallel mit der Erzeugungsparabel gelegten Schnitt $BSMB''$, und von der halben Leitparabel SO, und endlich von der zwischen diesen Gränzen enthaltenen Oberfläche des Paraboloids eingeschlossen ist.

Wir suchen ferner den geometrischen Ort der Durchschnittslinien der beiden Systeme von Ebenen, von welchen die des einen Systems parallel mit der Ebene der Leitparabel, und die des andern parallel mit der Ebene der Erzeugungsparabel so gelegt sind, dass Solida, wie die obengenannten V und V', immer gleichen Inhalt haben.

Um den ersten Theil dieser Aufgabe zu lösen, nehmen wir die drei durch den Scheitel O des Paraboloids gehenden Linien OX, OY und OZ, von welchen die letzte auf die gemeinschaftliche Achse der Leit- und Erzeugungsparabel fällt, die zweite aber in der Ebene der Leitparabel senkrecht auf OZ ist, und die erste OX auf den beiden andern senkrecht steht, als Achsen der x, y und z an; ferner soll p' der Parameter der Leit- und p der Parameter der Erzeugungsparabel sein; alsdann haben wir für die Gleichung des Paraboloids:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{p'} = z. \tag{1}$$

Bezeichnet Q den Inhalt des Parabelstücks BLB', so ist:

$$V = \int Q dx \tag{2}$$

und

$$Q = 2.\tfrac{2}{3}yz. \tag{3}$$

Da aber auch

$$y = \pm\sqrt{p'z}, \quad z = \frac{x^2}{p}, \tag{4}$$

so erhalten wir:

$$Q = 2.\tfrac{2}{3}\frac{x^3}{p}.\sqrt{\frac{p'}{p}}, \tag{5}$$

also

$$V = \tfrac{1}{3}\frac{x^4}{p}\sqrt{\frac{p'}{p}}. \tag{6}$$

Um den Inhalt V' zu bestimmen, setzen wir den Inhalt des Parabelstücks $BSB''M = Q'$, so ist:

$$V' = \int Q'dy, \tag{7}$$

und da

$$Q' = 2.\tfrac{2}{3}xz, \tag{8}$$

so finden wir mittelst der Gleichungen (4) wie oben:

$$V' = \tfrac{1}{3}\frac{y^4}{p'}\sqrt{\frac{p}{p'}}. \tag{9}$$

Soll endlich $V = V'$ sein, so erhalten wir:

$$\frac{x^4}{p}\sqrt{\frac{p'}{p}} = \frac{y^4}{p'}\sqrt{\frac{p}{p'}}, \tag{10}$$

woraus

$$x = \pm y \sqrt{\frac{p}{p'}} \qquad (11)$$

folgt. Die geometrischen Oerter, welche die zweite Bedingung der Aufgabe erfüllen, sind daher zwei Ebenen, von welchen die eine durch die gemeinschaftliche Achse der Leit- und der Erzeugungsparabel und durch eine im Scheitel O des Paraboloids gehende gerade Erzeugungslinie desselben geht; die andere aber geht ebenfalls durch jene Achse des Paraboloids und durch die in O stehende gerade Erzeugungslinie OB' des Paraboloids; jedoch ist diese Erzeugungslinie vom zweiten System, wenn die vorerwähnte OB vom ersten ist.

4.

Es sind zwei eintheilige Hyperboloide gegeben, das erstere hat seine reellen Achsen $2b, 2c$ in der Ebene der yz und die imaginäre $2\sqrt{-a^2}$ fällt auf die Achse der x; das zweite hat seine reellen Achsen $2a, 2b$ in der Ebene der xy, und seine imaginäre $2\sqrt{-c^2}$ fällt auf die Achse der z. Beide haben ihren Mittelpunkt im Coordinatenanfang. Es soll der geometrische Ort der Durchschnittslinien zweier Systeme von Ebenen gefunden werden, von welchen die des erstern Systems senkrecht auf die Achse der x sind und vom erstern Hyperboloid Stücke abschneiden, die von der Kehlellipse und der Durchschnittsellipse einer solchen Ebene mit dem Hyperboloid begränzt sind; und die Ebenen des zweiten Systems sollen senkrecht auf die Achse der z sein und vom zweiten Hyperboloid Stücke abschneiden, welche von seiner Kehlellipse und der Durchschnittsellipse einer solchen Ebene mit dem zweiten Hyperboloid begränzt sind. Endlich ist die Bedingung gegeben: dass je zwei der genannten Solida gleichen Inhalt haben.

Auflösung. Die Gleichung des erstern Hyperboloids ist:

$$-\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1; \qquad (1)$$

die des zweiten:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1. \qquad (2)$$

Der Inhalt des erstern Solidums, den wir mit V bezeichnen wollen, ist:

$$V=\frac{bc\pi}{3a^2}(3a^2x+x^3). \qquad (3)$$

Bezeichnen wir den Inhalt des zweiten Solidums mit V', so ist:

$$V'=\frac{ab\pi}{3c^2}(3c^2z+z^3). \qquad (4)$$

Da aber der Bedingung der Aufgabe zufolge $V=V'$ sein soll, so ist:

$$\frac{ab\pi}{3c^2}(3c^2z+z^3)=\frac{bc\pi}{3a^2}(3a^2x+x^3),$$

woraus

$$\left(\frac{z}{c}-\frac{x}{a}\right)\left\{\left(\frac{z}{c\sqrt{3}}\right)^2+\frac{xz}{3ac}+\left(\frac{x}{a\sqrt{3}}\right)^2+1\right\}=0 \qquad (5)$$

folgt. Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wenn

$$\frac{z}{c}-\frac{x}{a}=0, \qquad (6)$$

$$\left(\frac{z}{c\sqrt{3}}\right)^2+\frac{xz}{3ac}+\left(\frac{x}{a\sqrt{3}}\right)^2+1=0 \qquad (7)$$

ist. Beschreiben wir aus den absoluten Grössen $2a$, $2b$, $2c$ ein rechtwinklichtes Parallelepiped, dessen Mittelpunkt der gemeinsame Mittelpunkt der Hyperboloide ist und dessen Seitenflächen mit den Coordinatenebenen parallel sind, so stellt die Gleichung (6) eine durch die Achse $2b$ und die ihr gegenüberliegende Kante des Parallelepipeds gehende Diagonalebene desselben vor. Diese Ebene ist daher ein geometrischer Ort der in der Aufgabe genannten Durchschnittslinien. Ist noch ein drittes Hyperboloid gegeben, dessen imaginäre Achse $2\sqrt{-b^2}$ auf die Achse der y und dessen reelle Achsen $2a$ und $2c$ auf die Achsen der x und z fallen, dessen Gleichung also

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1 \qquad (8)$$

ist, und wird dieses durch eine mit seiner Kehlellipse parallele Ebene in der Entfernung y von seinem Mittelpunkte geschnitten, und der Inhalt des Solidums, das sich zwischen der Kehlellipse und jenem Schnitt befindet, mit V'' bezeichnet, so ist:

$$V''=\frac{ac\pi}{3b^2}(3b^2y+y^3). \qquad (9)$$

Soll nun $V = V''$ sein, so finden wir, wie oben, für die Gleichungen der geometrischen Oerter der Durchschnittslinien der Schnittebenen, welche bei dem Hyperboloid (1) und dem Hyperboloid (8) parallel mit ihren respektiven Kehlellipsen gemacht wurden, folgende:

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0. \qquad (10)$$

$$\left(\frac{y}{b\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{xy}{3ab} + \left(\frac{x}{a\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = 0. \qquad (11)$$

Die erste dieser Gleichungen gehört der durch die Achse der z und die ihr gegenüberliegende Kante des Parallelepipeds gehenden Diagonalebene an. Die Gleichung (11), so wie die Gleichung (7), werden nachher untersucht. Ist ferner die Bedingung gegeben, dass $V' = V''$ sein soll, so finden wir für die Gleichungen der geometrischen Oerter der Durchschnittslinien der Schnittebenen, die bei dem Hyperboloid (2) und bei dem Hyperboloid (8) parallel mit ihren Kehlellipsen angebracht sind, folgende:

$$\frac{z}{c} - \frac{y}{b} = 0. \qquad (12)$$

$$\left(\frac{z}{c\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{yz}{3bc} + \left(\frac{y}{b\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = 0. \qquad (13)$$

Die Gleichung (12) gehört der durch die Achse der x und die ihr gegenüberliegende Kante gehenden Diagonalebene des oben genannten Parallelepipeds an. Die Gleichung (13), so wie auch die Gleichungen (7) und (11), drücken im Allgemeinen drei hyperbolische Cylinder aus, deren Bogen respektive in den Ebenen der xz, xy und yz liegen. Wir wollen untersuchen, ob einige Erzeugungslinien dieser Cylinder reell sind oder nicht. Bei dem Cylinder (7) hängt natürlich die Reellität davon ab, ob die Hyperbel (7) von der in der Ebene der xz befindlichen Durchschnittshyperbel der Ebene der xz und des Hyperboloids (1) geschnitten wird oder nicht; ferner ob die gleiche Hyperbel (7) von der Durchschnitts-Hyperbel der Ebene xz und des Hyperboloids (2) geschnitten wird. Um das erstere zu untersuchen, verbinden wir die beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1 = 0, \qquad (14)$$

$$\left(\frac{z}{c\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{xz}{3ac} + \left(\frac{x}{a\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = 0. \qquad (15)$$

Aus (14) ist:

$$\frac{z}{c}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Diesen Werth von $\frac{z}{c}$ in (15) substituirt gibt:

$$3x^4+15a^2x^2+16a^4=0,$$

woraus wir

$$x=\pm a\sqrt{-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}},\quad z=\pm c\sqrt{-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}}$$

oder

$$x=\pm a\sqrt{\frac{-5\sqrt{3}\pm\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}},\quad z=\pm c\sqrt{\frac{-3\sqrt{3}\pm\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}}$$

erhalten. Da sowohl $5\sqrt{3}>\sqrt{11}$, als auch $3\sqrt{3}>\sqrt{11}$ ist, so ist der Werth von x und der von z imaginär. Es gibt also keine reelle Erzeugungslinien des Cylinders (7), welche der Bedingung der Aufgabe Genüge leisten; er ist daher imaginär.

Ist endlich die Bedingung gegeben, dass

$$V=V'=V''$$

sein soll, so reducirt sich diese darauf, dass

$$\frac{z}{c}-\frac{x}{a}=\frac{y}{b}-\frac{x}{a}=\frac{z}{c}-\frac{y}{b}=0 \qquad (16)$$

ist. Da diese Gleichungen mit jenen in Nr. 1. (16) identisch sind, so lassen sich auch hier wie dort die gleichen Schlüsse und Folgerungen daraus ableiten, so dass also die Diagonalen des oben genannten Parallelepipeds die geometrischen Oerter sind, welche der hier gegebenen Bedingung genügen.

5.

Untersuchen wir in dieser Nummer noch in gleicher Ordnung wie in 4. dasselbe bei den drei zweitheiligen Hyperboloiden, welche durch nachstehende drei Gleichungen charakterisirt sind:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1, \qquad (1)$$

$$-\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1, \qquad (2)$$

$$-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1. \qquad (3).$$

Um bei dem Hyperboloid (1) den Inhalt V des Stücks zu finden, das zwischen dem Scheitel einer Schale desselben und dem in der Entfernung x von seinem Mittelpunkt senkrecht auf die Achse der x gelegten Schnitt Q enthalten ist, so bemerken wir, dass

$$Q = \frac{bc\pi}{a^2}(x^2 - a^2) \tag{1}$$

und

$$V = \int Q dx + \text{Const.} \tag{2}$$

ist. Wir finden daher:

$$V = \frac{bc\pi}{a^2}\left(\frac{x^3}{3} - a^2 x\right) + \text{Const.}, \tag{3}$$

und da $V=0$ sein muss für $x=a$, so ist Const. $= \frac{2abc\pi}{3}$, folglich:

$$V = \frac{bc\pi}{a^2}\left(\frac{x^3}{3} - a^2 x + \frac{2a^3}{3}\right). \tag{4}$$

Auf gleiche Art finden wir bei dem Hyperboloid (2) den Inhalt V' des Solidums, das zwischen dem auf der positiven Seite der Achse der y liegenden Scheitel desselben und dem in der Entfernung y von seinem Mittelpunkt senkrecht auf die Achse der y gemachten Schnitt Q' enthalten ist:

$$V' = \frac{ac\pi}{b^2}\left\{\frac{y^3}{3} - b^2 y + \frac{2b^3}{3}\right\}. \tag{5}$$

Endlich ist der Inhalt V'' des Solidums, das zwischen dem auf der positiven Seite der Achse der z befindlichen Scheitel des Hyperboloids (3) und einem in der Entfernung z vom Mittelpunkt senkrecht auf die Achse der z gemachten Schnitt Q'' enthalten ist:

$$V'' = \frac{ab\pi}{c^2}\left\{\frac{z^3}{3} - c^2 z + \frac{2c^3}{3}\right\}. \tag{6}$$

Ist $V = V'$, so sind die Gleichungen der geometrischen Oerter der Durchschnittslinien der entsprechenden Schnittebenen:

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0, \tag{7}$$

$$\left(\frac{y}{b\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{xy}{3ab} + \left(\frac{x}{a\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 0. \tag{8}$$

Ist $V = V''$, so sind die Gleichungen der hierbei stattfindenden geometrischen Oerter der Durchschnittslinien der entsprechenden Schnittebenen:

$$\frac{z}{c}-\frac{x}{a}=0, \tag{9}$$

$$\left(\frac{z}{c\sqrt{3}}\right)^2+\frac{xz}{3ac}+\left(\frac{x}{a\sqrt{3}}\right)^2-1=0. \tag{10}$$

Ist $V'=V''$, so sind:

$$\frac{z}{c}-\frac{y}{b}=0, \tag{11}$$

$$\left(\frac{z}{c\sqrt{3}}\right)^2+\frac{yz}{3bc}+\left(\frac{y}{b\sqrt{3}}\right)^2-1=0 \tag{12}$$

die Gleichungen der geometrischen Oerter der Durchschnittslinien der entsprechenden Schnittebenen. Ist endlich gegeben, dass

$$V=V'=V''$$

sein soll, so sind die Gleichungen, welche diesen Bedingungen genügen:

$$\frac{y}{b}-\frac{x}{a}=\frac{z}{c}-\frac{x}{a}=\frac{z}{c}-\frac{y}{b}=0. \tag{13}$$

Die geometrischen Bedeutungen aller dieser Gleichungen sind in den vorhergehenden Nummern hinlänglich bestimmt worden.

6.

Geben wir endlich noch drei elliptische Paraboloide, deren Gleichungen:

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p'}=x, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{p'}+\frac{z^2}{p}=y, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p'}=z \tag{3}$$

sind, und schneiden das erste in der Entfernung x von seinem Scheitel durch eine auf die Achse der x senkrechte Ebene; das zweite durch eine auf die Achse der y senkrechte Ebene in der Entfernung y von seinem Scheitel; das dritte durch eine auf die Achse der z senkrechte Ebene, welche von seinem Scheitel den Abstand z hat. Die Inhalte V, V', V'' der Solida, die zwischen den Scheiteln dieser Paraboloide und den genannten Schnittebenen liegen, sind:

$$V = \pi \sqrt{pp'} \cdot \frac{x^2}{2}, \quad (4)$$

$$V' = \pi \sqrt{pp'} \cdot \frac{y^2}{2}, \quad (5)$$

$$V'' = \pi \sqrt{pp'} \cdot \frac{z^2}{2}. \quad (6)$$

Ist die Bedingung gegeben, dass immer $V = V'$ sein soll, so erhalten wir für die Gleichungen der geometrischen Oerter der Durchschnittslinien der Ebenen, welche die Paraboloide (1) und (2) in den Entfernungen x, y, x', y', u. s. w. schneiden, folgende:

$$x + y = 0, \quad (7)$$

$$y - x = 0. \quad (8)$$

Diese Gleichungen gehören zwei Ebenen an, welche beide durch die Achse der z gehen und mit den Ebenen der xz und der yz Winkel von 45° bilden.

Soll $V = V''$ sein, so sind die Gleichungen der geometrischen Oerter der Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenen:

$$z + x = 0, \quad (9)$$

$$z - x = 0; \quad (10)$$

ebenfalls zwei Ebenen, die durch die Achse der y gehen und mit den Ebenen der xy und yz Winkel von 45° bilden.

Ist $V' = V''$, so sind die Ortsgleichungen:

$$z + y = 0, \quad (11)$$

$$z - y = 0. \quad (12)$$

Die durch diese Gleichungen dargestellten Ebenen gehen durch die Achse der x und bilden mit den Ebenen der xy und xz ebenfalls halbe rechte Winkel.

Ist endlich $V = V' = V''$, so sind die Gleichungen der geometrischen Oerter der Punkte, in welchen sich je drei zusammengehörige, in der Aufgabe genannte Ebenen schneiden:

$$y + x = z + x = z + y = 0; \quad (13)$$

$$y - x = z - x = z - y = 0. \quad (14)$$

Je zwei der Gleichungen (13) und je zwei der Gleichungen (14) gehören der Durchschnittslinie der Ebenen an, welche durch jede derselben dargestellt ist.

7.

Schliesslich wollen wir noch eine Vergleichung der Inhalte der Segmente der Flächen des zweiten Grades folgen lassen.

Wir setzen der Symmetrie der Gleichungen wegen in der Gleichung Nr. 6. (1) des elliptischen Paraboloids, $p=\frac{b^2}{a}$, $p'=\frac{c^2}{a}$, so dass jene übergeht in:

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{a}. \qquad (1)$$

Ebenso setzen wir in der Gleichung $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{p'}=x$ eines geradlinichten Paraboloids $p=\frac{b^2}{a}$, $p'=\frac{c^2}{a}$, so dass diese Gleichung übergeht in:

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{a}. \qquad (2)$$

Bezeichnen wir den Inhalt des Solidums von dem durch die Gleichung (1) dargestellten Paraboloid, das durch eine Ebene in der Entfernung x vom Scheitel senkrecht auf die Achse der x geschnitten wird, mit V_x, und jenen, wenn $x=a$ wird, mit V_a, so ist:

$$V_x=\pi.\frac{bc}{a}\cdot\frac{x^2}{2}, \quad V_a=\frac{abc\pi}{2}. \qquad (3)$$

Bei analoger Bezeichnung der Inhalte der Solida von dem geradlienichten Paraboloid, das durch die Gleichung (2) dargestellt ist, haben wir:

$$V_x'=\frac{1}{3}\frac{bc}{a}x^2, \quad V_a'=\frac{abc}{3}. \qquad (4)$$

Setzen wir nämlich in der Gleichung Nr. 2. (1) z statt x und vertauschen p mit p', ferner x statt z, so wird jene Gleichung (1) zu $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{p'}=x$, und der dortige Werth von V in der Gleichung (6) wird zu: $V=\frac{1}{3}\frac{z^4}{p'}\cdot\sqrt{\frac{p}{p'}}$, oder, da $z^2=p'x$, so wird:

$$V=\frac{1}{3}x^2\sqrt{pp'}=\frac{1}{3}\frac{bc}{a}.x^2.$$

Ferner ist bei immer gleichmässiger Bezeichnung bei dem Ellipsoid:

$$\left.\begin{aligned} V_x'' = bc\pi . x - \frac{bcx^3\pi}{3a^2}, \quad V_a'' = \frac{2abc\pi}{3}, \\ \text{also der Inhalt des ganzen Ellipsoids} = \frac{4abc\pi}{3}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Bei dem eintheiligen Hyperboloid:

$$V_x''' = \frac{bc\pi}{3a^2}(3a^2x + x^3), \quad V_a''' = \frac{4abc\pi}{3}. \quad (6)$$

Bei dem zweitheiligen Hyperboloid:

$$V_x^{IV} = \frac{bc\pi}{3a^2}(x^3 - 3a^2x + 2a^3), \quad V_{2a}^{IV} = \frac{4abc\pi}{3}. \quad (7)$$

Aus (5), (6) und (7) folgt, dass wenn ein Ellipsoid, ein eintheiliges und ein zweitheiliges Hyperboloid Achsen $2a$, $2b$, $2c$ von gleicher absoluter Grösse haben, und die gleichnamigen bei allen drei Körpern auf einander liegen, ferner wenn das eintheilige Hyperboloid in der Entfernung a von seinem Mittelpunkt, das zweitheilige aber in der Entfernung $2a$ ebenfalls vom gemeinschaftlichen Mittelpunkt durch Ebenen, die auf der Achse $2a$ senkrecht sind, geschnitten werden, die abgeschnittenen Stücke der beiden Hyperboloide gleichen Inhalt haben, nämlich jeder so gross, als der Inhalt des ganzen Ellipsoids.

Ferner, wenn die durch die Gleichungen (1) und (2) dargestellten Paraboloide ebenfalls durch Ebenen, die auf der Achse der x oder $2a$ in der Entfernung a von ihrem Scheitel geschnitten werden, die Verhältnisse:

$$\left.\begin{aligned} V_a : V_a' &= 3\pi : 2, \\ V_a : V_a'' &= 3 : 4, \\ V_a' : V_a'' &= 1 : 2\pi \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

stattfinden.

Setzen wir in (7) $a + x$ statt x, d. h. verlegen wir den Scheitel des zweitheiligen Hyperboloids in den Coordinaten-Anfang, der zugleich Mittelpunkt des eintheiligen Hyperboloids und des Ellipsoids ist, so wird die erste der Gleichungen (7):

$$V_x^{IV} = \frac{bc\pi x^2}{a} + \frac{bc\pi x^3}{3a^2}. \quad (16)$$

Setzen wir diesen Werth von V_x^{IV} dem Werthe von V_x'' in der Gleichung (5) gleich, und bestimmen aus der resultirenden Gleichung den Werth von x, d. h. suchen wir die Abscisse x, in deren Endpunkt wir eine auf die Achse der x senkrechte Ebene errichten müssen, die von dem Hyperboloid und von dem Ellipsoid Stücke abschneidet, die gleichen Inhalt haben, so finden wir aus der Gleichung

$$bc\pi x - \frac{bc\pi x^3}{3a^2} = \frac{bc\pi x^2}{a} + \frac{bc\pi x^3}{3a^2}$$

den Ausdruck

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{4}\{-\sqrt{3} \pm \sqrt{11}\}. \qquad (17)$$

Hier muss natürlich das obere Zeichen gebraucht werden.

Soll $V_x''' = V_x^{IV}$ sein, so wird das Gleiche wie vorhin jetzt bei dem ein- und dem zweitheiligen Hyperboloid untersucht. Dadurch finden wir übereinstimmend mit dem Obigen: $x = a$.

XI.

Einige Aufgaben nebst deren Auflösungen.

Von

Herrn *Gustav Skrivan*,

Lehrer der Mathematik am P. Bilka'schen Erziehungs-Institute zu Wien.

I.

Die drei Abstände h_1, h_2, h_3 der Seiten a, b, c vom Mittelpunkte des um ein Dreieck ABC (Taf. III. Fig. 4.) beschriebenen Kreises sind nebst einem Dreieckswinkel C gegeben, man soll das Dreieck auflösen.

Setzt man $OD=h_1$, $OE=h_2$, $OF=h_3$, $OC=OB=AO=r$, so ist:

$$\left.\begin{aligned} c.r &= h_3.a+h_1.b, \\ b.r &= h_2.a+h_1.c. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$c+b=\frac{a(h_2+h_3)}{r-h_1}, \quad c-b=\frac{a(h_2-h_3)}{r+h_1};$$

daher

$$\frac{h_2+h_3}{r-h_1}:\frac{h_2-h_3}{r+h_1}=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}:\operatorname{tg}\frac{C-B}{2}$$

oder

$$\frac{h_2+h_3}{h_2-h_3}:\frac{r-h_1}{r+h_1}=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}:\operatorname{tg}\frac{C-B}{2}; \qquad (2)$$

ferner ist bekannt: $r=\frac{h_1}{\cos A}$; substituirt man diesen Werth in (2), so ergiebt sich nach einer einfachen Reduction:

$$\frac{h_2+h_3}{h_2-h_3}:\operatorname{tg}\frac{A^2}{2}=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}:\operatorname{tg}\frac{C-B}{2},$$

und daraus:

$$\operatorname{tg}\frac{C-B}{2}=\frac{h_2-h_3}{h_2+h_3}.\operatorname{tg}\frac{A}{2} \text{ u. s. w.}$$

II.

Die drei Höhen h_1, h_2, h_3 eines Dreieckes ABC (Taf. III. Fig. 5.) sind bekannt, man soll das Dreieck auflösen.

Es sei $AF=h_1$, $BE=h_2$, $CD=h_3$, so trage man h_1 von C bis m, und h_2 von C bis n auf, ziehe mn, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CEB und ACF:

$$h_1:h_2=b:a,$$

folglich die Gerade $mn \parallel AB$, daher:

$$\left\{\begin{array}{l} mn:h_2=c:a \text{ und, wegen } \Delta\, ABF \backsim CDB, \\ c:a=h_1:h_3 \end{array}\right.$$

oder
$$mn=\frac{h_2.h_1}{h_3}. \qquad (1)$$

Nun ist

$$\overline{mn}^2=h_1^2+h_2^2-2h_1.h_2.\cos C, \qquad (2)$$

mithin aus (1) und (2):

$$\cos C=\frac{h_3^2(h_1^2+h_2^2)-h_1^2h_2^2}{h_1.h_2.h_3^2}, \text{ u. s. w.}$$

III.

Der Integral-Ausdruck

$$u=\int\frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}$$

kann auch mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen aufgelöst werden.

Setzt man $x=\cos x$, so folgt:

$$u=\int\frac{dx}{\sqrt{x+i.\sqrt{1-x^2}}}=-\int\frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi+i.\sin\varphi}}=+4\int\frac{\cos\frac{\varphi}{2}d.\operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2}}{(\cos\varphi+i.\sin\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=4\int\frac{\cos\frac{\varphi}{2}d.\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}+i.\sin\frac{\varphi}{2}}=4\int\frac{\left(\cos\frac{\varphi}{2}-i.\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}.d\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi^2}{2}+\sin\frac{\varphi^2}{2}}$$

$$=4\int\cos^2\frac{\varphi}{2}d.\cos\frac{\varphi}{2}-4.i\int\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}.d.\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$=\frac{4}{3}\left(\cos^3\frac{\varphi}{2}+i.\sin^3\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{1+x}{2}\sqrt{\frac{1+x}{2}}+i.\frac{1-x}{2}\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left[\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}+x\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}\right]+C.$$

IV.

Uebungsaufgabe für Schüler. Welche Bedingungen sind nothwendig, dass die Gleichung

$$x^2+\frac{a}{x}=b$$

als eine quadratische behandelt werden kann?

Offenbar wenn $a+1=b$ ist, denn dann folgt:

$$x^2+\frac{b-1}{x}=b$$

oder

$$x^3-bx+b-1=0,$$
$$(x-1)(x^2+x+1)-b(x-1)=0,$$
$$(x-1)(x^2+x+1-b)=0,$$
$$x-1=0 \text{ oder } x^2+x+1-b=0.$$

XII.

Zwei Theilungsaufgaben zu geodätischer Anwendung.

Von

Herrn Professor *C. W. Baur*
an der polytechnischen Schule zu Stuttgart.

Zu der ersten der beiden folgenden Aufgaben ist die hier gegebene, ebenso theoretisch einfache, als praktisch brauchbare Auflösung zwar schon mehrfach in geometrischen Schriften mitgetheilt worden; da sie aber vielleicht nicht allen Lesern bekannt ist und die der zweiten Aufgabe auf ihr beruht, so musste sie in Kürze abgehandelt werden.

Aufgabe. Durch einen Punkt P (Taf. III. Fig. 6. und 7.) eine Gerade zu ziehen, welche mit den Schenkeln eines nach Lage und Grösse gegebenen Winkels LON ein Dreieck OXY von gegebenem Inhalt q bilde.

Analysis und Auflösung. Denkt man sich in dem Winkel LON ein Parallelogramm $OFGH$ mit dem gegebenen Inhalte q so construirt, dass eine Seite GH nöthigenfalls verlängert durch den Punkt P geht, so soll $OXY = OFGH$ oder

$$\Delta PHS = \Delta PYG + \Delta FXS,$$

oder, wegen der Aehnlichkeit dieser Dreiecke,

$$PH^2 = PG^2 + FX^2$$

werden. Hieraus folgt aber:

$$FX = \sqrt{PH^2 - PG^2} = \sqrt{(PH + PG)(PH - PG)}.$$

Da sich nun das Parallelogramm aus seinem Inhalte q und der aus P auf OL gefällten Senkrechten p als seiner Höhe bestimmt, so hat man nur von der Ecke F aus FX nach obigem Werth auf FL abzutragen, dann ist die Verbindungslinie des Punktes X mit P die verlangte Gerade.

Liegt Punkt P innerhalb des Winkels, so ist die Auflösung nur möglich, wenn $PH > PG$, ist aber diese Bedingung erfüllt, so erhält man eine zweite Auflösung, wenn FX, welche alsdann immer kleiner als PH ausfällt, von F aus gegen O abgetragen wird.

Liegt dagegen P ausserhalb des Winkels, so ist die Auflösung innerhalb des Winkels immer, aber nur einmal möglich, weil stets $PH > PG$, aber der Endpunkt der von F aus rückwärts abgetragenen FX über den Scheitel O hinaus, und zwar näher bei O als P bei G, fällt; die rückwärts abgetragene FX gibt daher die Auflösung in dem Scheitelwinkel von LON.

Bei der Ausführung auf dem Felde braucht weder das ganze Parallelogramm $OFGH$, noch die Ecke F desselben ausgesteckt zu werden; ist nur p und $PG = g$ gemessen, so erhält man für die Lage des Punktes P innerhalb des Winkels:

$$OX = \frac{q \pm \sqrt{q(q - 2pg)}}{p};$$

für die Lage von P ausserhalb des Winkels:

$$OX = \frac{q + \sqrt{q(q + 2pg)}}{p}.$$

Aufgabe. Von einem Vieleck vermittelst einer Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, ein Stück von gegebenem Inhalte abzuschneiden.

Hat man diejenige Ecke des Vielecks ausfindig gemacht, deren Verbindungslinie mit dem gegebenen Punkte, verlängert, die Bedingung möglichst annähernd erfüllt (und sich im Allgemeinen am Zweckmässigsten zur Aufnahmslinie eignen wird), so ist die Aufgabe auf die folgende zurückgeführt:

Ein Vieleck durch Drehung einer Seite um einen auf ihr oder ihrer Verlängerung gegebenen Punkt um einen gegebenen Inhalt q zu vergrössern oder zu verkleinern.

Da ferner mit dem Dreieck, welches die fragliche Seite mit den verlängerten beiden anstossenden Seiten bildet, der Grösse nach dieselbe Veränderung, nur vielleicht in entgegengesetztem Sinne, vorgeht, wie mit dem letzteren Vieleck selbst, so kann die Aufgabe auch in Beziehung auf ein Dreieck anstatt auf ein Vieleck ausgesprochen werden, unter dem Vorbehalt jedoch, dass bei der Auflösung weder die der fraglichen Seite gegenüberliegende Ecke, welche im Allgemeinen als umständlich bestimmbar oder als unzugänglich betrachtet werden muss, noch der Inhalt des Dreieckes nicht benützt werden darf.

Es sei nun OAB (Taf. III. Fig. 8., Taf. IV. Fig. 1. und 2.) das Dreieck, dessen Inhalt durch Drehung der Seite AB um den auf ihr oder ihrer Verlängerung gegebenen Punkt P um den Betrag q vermehrt oder vermindert werden soll.

Es lässt sich einsehen, dass für die Lage von P ausserhalb jede, für die Lage innerhalb aber wenigstens eine kleine Drehung der AB den Inhalt OAB in demselben Sinne verändert wie den Inhalt des Dreiecks, welches die grössere von den Strecken PA und PB mit der anstossenden Dreiecksseite und der Verbindungslinie OP bildet. Wir nehmen daher, was durch eine Verwechslung der Seitenbezeichnungen immer möglich ist, in der Folge stets $PA > PB$, und die Drehung der PA von oder gegen O an, je nachdem das Dreieck OAB vergrössert oder verkleinert werden soll.

Lässt sich nun auch die Ecke F eines Parallelogramms $OFGH$, dessen Inhalt gleich OAB sein soll, nicht durch Messung von O aus abstecken, so kann doch der Durchschnittspunkt S der Seite FH mit der nöthigenfalls verlängerten AB ohne Kenntniss des Inhalts OAB und des Punktes O angegeben werden. Es ist nämlich wieder

$$\Delta PSH = \Delta PBG + \Delta FAS,$$

oder vermöge der Aehnlichkeit dieser Dreiecke:

$$PS^2 = PB^2 + AS^2,$$

$$PS^2 - AS^2 = PB^2. \quad (1)$$

Da aber je nach Umständen $PS \pm AS = PA$ gegeben ist, so wird

$$PS \mp AS = \frac{PB^2}{PA},$$

$$PS = \tfrac{1}{2}\left(PA + \frac{PB^2}{PA}\right). \quad (2)$$

Da dieser Werth unter der angenommenen Voraussetzung $PA > PB$ immer kleiner als PA bleiben muss, so zeigt sich der in Taf. IV. Fig. 2. angenommene Fall als unmöglich, und wir haben stets S auf PA selbst in der Entfernung

$$AS = \tfrac{1}{2}\left(PA - \frac{PB^2}{PA}\right) \quad (2)$$

von A.

Soll jetzt OAB um den Inhalt q vergrössert oder verkleinert werden, so erhalten wir den Punkt T, durch welchen die Seite $F'H'$ des Parallelogramms $OF'G'H'$ vom Inhalt $OAB \pm q$ geht, wenn wir $ST = \frac{q}{p}$ parallel OA vorwärts oder rückwärts abstecken. Nun folgt aus der verlangten Gleichheit

$$\Delta OXY = OF'GH'$$

oder

$$\Delta PS'H' = \Delta F'S'X + \Delta PGY,$$

vermöge der Aehnlichkeit dieser Dreiecke:

$$PS'^2 = S'X^2 + PY^2,$$

oder, wenn PA von $F'H'$ in U, von einer durch X zu OB gezogenen Parallelen aber in V geschnitten wird, vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke $PS'U$, PXV und PYB auch:

$$PU^2 = UV^2 + PB^2. \quad (3)$$

Der Punkt U lässt sich von T aus bestimmen, es ist also

$$UV = \sqrt{PU^2 - PB^2} = \sqrt{(PU + PB)(PU - PB)} \quad (4)$$

als bekannt und der Punkt V als gefunden zu betrachten.

Wir könnten nun Punkt X vermittelst einer Parallelen durch V zu OB bestimmen, es ist aber unter allen Umständen zweckmässiger, für den Fall einer geringen Convergenz von AO und BO sogar allein praktisch ausführbar, diese Bestimmung durch Berechnung der AX auszuführen. Wir haben zu diesem Zweck aus den ähnlichen Dreiecken AVX und SUT:

$$AX = \frac{AV}{SU} \cdot ST.$$

Die Strecken AV und SU sind zwar bekannt, da sie aber für den Fall einer geringen Convergenz von AO und BO klein ausfallen und desshalb den Quotienten $\frac{AV}{SU}$ ungenau liefern, ist es nothwendig, denselben folgendermassen umzuwandeln: Vermöge der Gleichungen (1) und (3) ist:

$$PS^2 - AS^2 = PB^2 = PU^2 - UV^2,$$

$$UV^2 - AS^2 = PU^2 - PS^2,$$

$$(UV - AS)(UV + AS) = (PU - PS)(PU + PS),$$

$$(AV - SU)(UV + AS) = SU(PU + PS),$$

$$\frac{AV}{SU} = 1 + \frac{PU + PS}{UV + AS} = \frac{PA + PV}{AS + UV},$$

also endlich, und zwar für den Fall der Vergrösserung, wie der Verkleinerung:

$$AX = ST . \frac{PA + PV}{AS + UV}. \qquad (5)$$

Die Auflösung ist nun neben den Angaben über die Parallelen ST und TU in den Gleichungen (2), (4) und (5) vollständig enthalten.

Bemerkung. Auf die jetzt getroffene Bestimmung des Punktes X hat nun eine geringe Convergenz der Linien AO und BO nicht mehr den geringsten ungünstigen, sondern nur den Einfluss, dass, je kleiner SU, desto kleiner auch AV wird, und desto mehr sich also die Werthe von PU und UV den Werthen PS und AS nähern, desto näher also endlich auch der Quotient $\frac{PA + PV}{AS + UV}$ dem Grenzwerthe $\frac{PA}{AS}$ kommt, welcher für den Fall des vollständigen Parallelismus von AO und BO als Coefficient

von ST im Ausdruck für AX leicht nachzuweisen ist. Es führt nämlich, da in diesem Fall

$$PBY = PAX.\frac{PB^2}{PA^2} \text{ und überdiess } PAX = \frac{AX.p}{2},$$

die Bedingung

$$PAX - PBY = q = ST.p$$

auf

$$\frac{AX.p}{2}(1 - \frac{PB^2}{PA^2}) = ST.p$$

oder

$$AX = ST.\frac{PA}{\frac{1}{2}(PA - \frac{PB^2}{PA})} = ST.\frac{PA}{AS}.$$

ST braucht natürlich in diesem Fall nicht ausgesteckt oder auch nur für sich berechnet zu werden, sondern man nimmt kurzweg:

$$AX = \frac{2q.PA^2}{p(PA^2 - PB^2)}.$$

Liegt übrigens unter dieser Voraussetzung Punkt P nicht zu nahe der Mittellinie zwischen AO und BO, so wird die verlangte Theilungslinie bekanntlich einfacher dadurch erhalten, dass man vom Halbirungspunkte der AB aus auf der Mittellinie eine Strecke abmisst, deren Länge gefunden wird, wenn man den Inhalt q durch den Abstand beider gegebenen Parallelen dividirt. Der Endpunkt der abgemessenen Linie mit dem Punkte P verbunden gibt die verlangte Theilungslinie.

Um aber von dem Umfange der Rechnungen, welche im allgemeineren Fall die Anwendung der Gleichungen (2), (4) und (5) erheischt, eine Vorstellung zu geben, fügen wir noch ein Zahlenbeispiel mit vollständig ausgeführten Zifferrechnungen bei, so wie sie unter Anwendung der Tafel der Quadrate der 1- bis 3ziffrigen Zahlen anzustellen sind.

Gemessen $PB = 45,2$
Gemessen $PA = 68,7$ $\quad PB^2 = 2043,04$

$$\frac{PB^2}{PA} = 29,74$$

$2PS = 98,44$
$2AS = 38,96$
$PS = 49,22$
$AS = 19,48$
Gemessen $SU = 2,6$
$PU = 51,82$
$PU + PB = 97,02$
$PU - PB = 6,62$

```
 2043,04 | 1374
  6690
  6183
   5074
   4809
    265
```

```
 582,12
 58,21
  1,94
 UV² = 642,27
    009
 51 | 218
```

```
 51,82 = PU
 25,34 = UV
 77,16 = PV
 68,7  = PA
145,86 = PA + PV
  8,13 = ST
1166,88
  14,59
   4,38
1185,85
```

Gemessen $p = 52,1$
Gegeben $q = 423,4 \mid 8,13 = ST$

```
 4168
   66
   52
   14
```

$UV = 25,34$
$AS = 19,48$

$UV + AS = 44,82 \mid 1185,85 \mid 26,46 = AX.$

```
 896 4
 289 45
 268 92
  20 53
  17 93
   2 60
```

Wenn der Zeitaufwand bekannt ist, den nicht nur planlose, sondern auch wohlangelegte Versuche, welche der Mühe des Rechnens auch nicht überheben, stets mit sich bringen, der wird den Rechnungsaufwand, den obiger Darstellung gemäss die angegebene Auflösung erheischt, als keinen zu theuren Kaufpreis für einen vollkommen sicheren Weg erachten.

Endlich folge noch, Liebhabern streng euklidischer Form zu Gefallen, in solcher für die Richtigkeit unserer Auflösung der

Beweis:

Wegen Aehnlichkeit nachbenannter Dreiecke ist:

$$\Delta PBY : \Delta PVX = PB^2 : PV^2,$$

vermöge (3) aber:

$$PB^2 = PU^2 - UV^2 = (PU + UV)(PU - UV)$$
$$= PV(PU - UV),$$

somit

$$\Delta PBY : \Delta PVX = PU - UV : PV,$$

ferner

$$PVX : PAX = PV : PA,$$

also

$$PBY : PAX = PU - UV : PA$$

und

(6) $$PAX - PBY : PAX = PA - PU + UV : PA,$$

sodann aber auch

$$PAX : FF'HH' = AX : 2ST$$

oder vermöge (5):

(7) $$PAX : FF'HH' = PA + PU + UV : 2(AS + UV).$$

Aus (6) und (7) folgt aber:

$$PAX - PBY . FF'HH'$$
$$= (PA - PU + UV)(PA + PU + UV) : 2PA.(AS + UV).$$

Es ist aber das dritte Glied dieser Proportion:

$$(PA + UV)^2 - PU^2 = PA^2 + UV^2 - PU^2 + 2PA.UV,$$

und vermöge (2) und (3):

$$PA^2 + UV^2 - PU^2 = PA^2 + AS^2 - PS^2$$
$$= PA^2 + AS^2 - (PA - AS)^2$$
$$= 2PA.AS,$$

also jenes dritte Glied

$$2PA.AS + 2PA.UV = 2PA.(AS + UV)$$

dem vierten gleich, daher auch das erste dem zweiten, nämlich

$$PAX - PBY = FF'HH' = q,$$

wie verlangt war.

Determination. Gleichung (3) zeigt noch, dass die Auflösung unmöglich wird, wenn $PU < PB$, was nur im Fall der Inhaltsverkleinerung des Dreiecks und der Lage des Punktes P innerhalb stattfinden kann. Im Fall der Inhaltsvergrösserung ist die Auflösung stets möglich, wie man sich leicht überzeugt, wenn bemerkt wird, dass der Dreiecksinhalt dem Unendlichgrossen um so näher kommt, je näher die AB gegen die zu einer der Linien OA und OB parallele Lage gedreht wird.

Kehren wir zur Aufgabe in ihrer ersten, auf's Vieleck bezüglichen Form zurück, so wird für die Lage des Punkts ausserhalb des Vielecks ihre Auflösung stets, und zwar im Allgemeinen auf zweierlei Arten möglich sein, wenn nur das verlangte Stück kleiner ist, als der ganze Inhalt. Für die Lage des Punktes innerhalb des Vielecks aber wird man eine Hauptlage der durch den Punkt gehenden Geraden unterscheiden können, in welcher sie das Vieleck in zwei Theile von beziehungsweise **absolut** grösstem und kleinstem möglichen Inhalt theilt, und die Bedingung der Möglichkeit der Auflösung darin erkennen, dass das verlangte Stück nicht grösser als der grössere und nicht kleiner als der kleinere der beiden Theile sei. Da der Uebergang vom grössten zum kleinsten Inhalt in Folge einer Drehung der Geraden um 180° nur stetig erfolgen kann, so wird man auch mit unserer Auflösung am Dreieck seinen Zweck erreichen, so bald man nur nach Augenmass und durch Versuche solche zwei gegenüberliegende Seiten oder Strecken von Seiten entdeckt hat, über welche die Linie, ohne wieder über eine Ecke zu treten, sich drehen muss, wenn der Durchgang des Inhalts des einen Stücks durch den verlangten Betrag stattfinden soll. Jene Drehung um 180° kann nun in zwei entgegengesetzten Richtungen vorgenommen werden, es wird desshalb, jenachdem man die eine oder andere Richtung einschlägt, auch in diesem Fall im Allgemeinen zwei Auflösungen der Aufgabe geben, die, wie für die Lage des Punkts ausserhalb, in Eine zusammengehen, wenn die Hälfte des Vielecks abgeschnitten, d. h. wenn dasselbe vom Punkt aus halbirt werden soll.

Solche Lagen der Geraden aber, in welchen sie das Vieleck in zwei Theile von **relativ** grösstem und kleinstem Inhalte theilt, können zu manchen, fruchtlosen Versuchen, aber auch zu mehr als zweifachen Auflösungen Veranlassung geben.

XIII.

Ueber die Bestimmung des Flächeninhalts gewisser Theile des Kreises.

Von
dem Herausgeber.

In der Ebene eines aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser a beschriebenen Kreises wollen wir uns einen beliebigen Punkt A denken, der sowohl innerhalb, als auch ausserhalb des Kreises liegen kann. Von diesem Punkte A aus denken wir uns nach zwei Punkten B und C der Peripherie des Kreises die Linien AB und AC gezogen, welche nach der Seite der Kreisperipherie hin den von AB an nach einer gewissen Richtung hin genommenen Winkel α mit einander einschliessen, so entsteht ein Sector BAC, welcher von den Linien AB, AC und dem, dem Winkel α entsprechenden Kreisbogen AB begränzt wird; den Flächeninhalt F dieses Sectors wollen wir zu bestimmen suchen.

Zu dem Ende legen wir durch den Mittelpunkt O des Kreises ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xy und nehmen die Axe der x der Linie AB parallel an; der positive Theil der Axe der x soll in diesem Systeme von O an nach derselben Seite hin gerichtet sein, wie die Linie AB von dem Punkte A an, und der positive Theil der Axe der y soll so angenommen werden, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach derselben Seite hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von der Linie AB an durch den Winkel α hindurch zu der Linie AC zu gelangen. In diesem rechtwinkligen Coordinatensysteme wollen wir die Coordinaten des Punktes A durch f, g bezeichnen. Von dem Punkte

A als Pol aus denke man sich nun einen Vector r gezogen und bezeichne den von demselben mit der Linie AB eingeschlossenen, in demselben Sinne wie den Winkel α genommenen Winkel durch φ, so sind die rechtwinkligen Coordinaten des Endpunkts dieses Vectors offenbar $f+r\cos\varphi$ und $g+r\sin\varphi$, und wir haben daher die Gleichung

$$(f+r\cos\varphi)^2+(g+r\sin\varphi)^2=a^2,$$

die man leicht auf die Form

$$r^2+2(f\cos\varphi+g\sin\varphi)r=a^2-f^2-g^2$$

bringt. Bestimmt man nun aus dieser Gleichung r, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$r=-(f\cos\varphi+g\sin\varphi)\pm\sqrt{a^2-(f\sin\varphi-g\cos\varphi)^2},$$

wo sich nun frägt, welches Zeichen man in dieser Formel zu nehmen hat. Multiplicirt man die beiden Werthe von r in einander, so erhält man als Product die Grösse $f^2+g^2-a^2$, welche negativ oder positiv ist, jenachdem der Punkt A innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt, so dass also die beiden Werthe von r ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben, jenachdem der Punkt A innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt. Hieraus ergiebt sich nun leicht, dass man im ersten Falle, wenn nämlich A innerhalb des Kreises liegt, das obere Zeichen nehmen, und also

$$r=-(f\cos\varphi+g\sin\varphi)+\sqrt{a^2-(f\sin\varphi-g\cos\varphi)^2}$$

setzen muss; denn ist $f\cos\varphi+g\sin\varphi$ negativ, so ist

$$-(f\cos\varphi+g\sin\varphi)+\sqrt{a^2-(f\sin\varphi-g\cos\varphi)^2}$$

offenbar positiv, also

$$-(f\cos\varphi+g\sin\varphi)-\sqrt{a^2-(f\sin\varphi-g\cos\varphi)^2}$$

negativ; und ist $f\cos\varphi+g\sin\varphi$ positiv, so ist

$$-(f\cos\varphi+g\sin\varphi)-\sqrt{a^2-(f\sin\varphi-g\cos\varphi)^2}$$

offenbar negativ, also

$$-(f\cos\varphi+g\sin\varphi)+\sqrt{a^2-(f\sin\varphi-g\cos\varphi)^2}$$

positiv. Wenn der Punkt A ausserhalb des Kreises liegt, so ist

$$a^2<f^2+g^2,$$

also

$$a^2 < (f\sin\varphi - g\cos\varphi)^2 + (f\cos\varphi + g\sin\varphi)^2,$$

folglich

$$a^2 - (f\sin\varphi - g\cos\varphi)^2 < (f\cos\varphi + g\sin\varphi)^2.$$

Insofern nun der Kreis von dem, dem Winkel φ entsprechenden Vector r wirklich geschnitten wird, muss offenbar $f\cos\varphi + g\sin\varphi$ negativ sein, weil sonst, wie aus dem Vorstehenden und der Formel

$$r = -(f\cos\varphi + g\sin\varphi) \pm \sqrt{a^2 - (f\sin\varphi - g\cos\varphi)^2}$$

auf der Stelle erhellet, beide Werthe von r negativ sein würden, was ungereimt ist. Dann sind aber offenbar beide Werthe von r positiv und das obere Zeichen liefert einen grösseren Werth als das untere; und da nun im vorliegenden Falle in der That jedem Winkel φ, für welchen r überhaupt möglich ist, offenbar zwei Vectoren entsprechen, so sieht man, dass man für den grösseren dieser beiden Vectoren das obere, für den kleineren das untere Zeichen nehmen muss. Ueberhaupt ergiebt sich daher aus dieser Betrachtung, dass man in der Formel

$$r = -(f\cos\varphi + g\sin\varphi) \pm \sqrt{a^2 - (f\sin\varphi - g\cos\varphi)^2},$$

wenn A innerhalb des Kreises liegt, immer das obere, wenn dagegen A ausserhalb des Kreises liegt, das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem man den kleineren oder grösseren der beiden von A ausgehenden, dem Winkel φ entsprechenden Vectoren in's Auge fasst, eine Bestimmung, die wir von nun an in Beziehung auf alle im Folgenden vorkommenden Formeln und Gleichungen unverändert festhalten werden.

Nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie ist

$$F = \tfrac{1}{2}\int_0^\alpha r^2 \partial\varphi,$$

also nach dem Obigen:

$$F = \tfrac{1}{2}\int_0^\alpha \{f\cos\varphi + g\sin\varphi \mp \sqrt{a^2 - (f\sin\varphi - g\cos\varphi)^2}\}^2 \partial\varphi,$$

oder, wie man leicht findet:

$$F = \tfrac{1}{2}\int_0^\alpha \{a^2 + (f^2 - g^2)\cos 2\varphi + 2fg\sin 2\varphi$$

$$\mp 2(f\cos\varphi + g\sin\varphi)\sqrt{a^2 - (f\sin\varphi - g\cos\varphi)^2}\}\partial\varphi.$$

Bekanntlich ist nun

$$\int_0^\alpha \cos 2\varphi\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha,\quad \int_0^\alpha \sin 2\varphi\partial\varphi = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

oder

$$\int_0^\alpha \cos 2\varphi\partial\varphi = \sin\alpha\cos\alpha,\quad \int_0^\alpha \sin 2\varphi\partial\varphi = \sin\alpha\,\sin\alpha;$$

und wenn man

$$u = f\sin\varphi - g\cos\varphi$$

setzt, so ist

$$\partial u = (f\cos\varphi + g\sin\varphi)\partial\varphi,$$

also

$$(f\cos\varphi + g\sin\varphi)\partial\varphi\sqrt{a^2-(f\sin\varphi - g\cos\varphi)^2} = \partial u\sqrt{a^2-u^2}.$$

Nach einer bekannten Formel der Integralrechnung ist

$$\int \partial u\sqrt{a^2-u^2} = \tfrac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \tfrac{1}{2}a^2\operatorname{Arcsin}\frac{u}{a},$$

wo man den Bogen so nehmen muss, dass er sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, jenachdem u positiv oder negativ ist. Also ist

$$\int (f\cos\varphi + g\sin\varphi)\partial\varphi\sqrt{a^2-(f\sin\varphi - g\cos\varphi)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(f\sin\varphi - g\cos\varphi)\sqrt{a^2-(f\sin\varphi - g\cos\varphi)^2} + \tfrac{1}{2}a^2\operatorname{Arcsin}\frac{f\sin\varphi - g\cos\varphi}{a},$$

und folglich

$$\int_0^\alpha (f\cos\varphi + g\sin\varphi)\partial\varphi\sqrt{a^2-(f\sin\varphi - g\cos\varphi)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{(f\sin\alpha - g\cos\alpha)\sqrt{a^2-(f\sin\alpha - g\cos\alpha)^2} + g\sqrt{a^2-g^2}\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}a^2\{\operatorname{Arcsin}\frac{f\sin\alpha - g\cos\alpha}{a} - \operatorname{Arcsin}\frac{-g}{a}\}.$$

Führt man nun alle einzelnen Integrale in den obigen Ausdruck von F ein, so erhält man:

$$F=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}a^2\alpha+(f^2-g^2)\sin\alpha\cos\alpha+2fg\sin\alpha\sin\alpha\\ \mp[(f\sin\alpha-g\cos\alpha)\sqrt{a^2-(f\sin\alpha-g\cos\alpha)^2}+g\sqrt{a^2-g^2}]\\ \mp a^2[\mathrm{Arcsin}\frac{f\sin\alpha-g\cos\alpha}{a}-\mathrm{Arcsin}\frac{-g}{a}]\end{array}\right\}.$$

Um die Richtigkeit dieser Formel an einem Beispiele zu prüfen, wollen wir den Flächeninhalt eines Kreissegments suchen, welches kleiner als der Halbkreis ist. Die unter den oben gemachten Voraussetzungen in diesem Falle als positiv zu betrachtende Entfernung der Sehne des Segments vom Mittelpunkte des Kreises sei f. Ausserdem ist im Obigen $g=0$ und $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ zu setzen. Dadurch erhalten wir aus der obigen Formel, in welcher die oberen Zeichen zu nehmen sind, wenn wir den Flächeninhalt des Segments durch S bezeichnen:

$$S=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}a^2\pi-f\sqrt{a^2-f^2}-a^2\mathrm{Arcsin}\frac{f}{a})$$

oder

$$S=\tfrac{1}{4}a^2\pi-\tfrac{1}{2}f\sqrt{a^2-f^2}-\tfrac{1}{2}a^2\mathrm{Arcsin}\frac{f}{a},$$

wo der Bogen nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist.

In Taf. IV. Fig. 3., wo $\overline{OA}=f$ ist, ist $\frac{1}{4}a^2\pi$ der Flächeninhalt des Kreisquadranten, $\frac{1}{2}f\sqrt{a^2-f^2}$ der Flächeninhalt des Dreiecks $\overline{AOC}$, und $\frac{1}{2}a^2\mathrm{Arcsin}\frac{f}{a}$ der Flächeninhalt des Kreissectors $\overline{COD}$, so dass also die Richtigkeit der obigen Formel auf der Stelle in die Augen fällt. Setzen wir für ein Kreissegment in Taf. IV. Fig. 4., welches grösser als der Halbkreis ist, wieder $OA=f$, so müssen wir, um dessen Flächeninhalt zu finden, im Obigen $-f$ für f setzen, wodurch wir die Formel

$$S=\tfrac{1}{4}a^2\pi+\tfrac{1}{2}f\sqrt{a^2-f^2}-\tfrac{1}{2}a^2\mathrm{Arcsin}\frac{-f}{a}$$

oder

$$S=\tfrac{1}{4}a^2\pi+\tfrac{1}{2}f\sqrt{a^2-f^2}+\tfrac{1}{2}a^2\mathrm{Arcsin}\frac{f}{a},$$

erhalten, wo der Bogen wieder nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist; auch die Richtigkeit dieser Formel erhellet aus Taf. IV. Fig. 2. auf der Stelle.

XIV.

Ueber die Rectification der Ellipse.

Von
dem Herausgeber.

Die in Taf. IV. Fig. 5. verzeichnete Ellipse sei mit der grossen Axe $2a$ und der kleinen Axe $2b$ aus dem Mittelpunkte C beschrieben. In den Scheiteln A und A_1 der grossen Axe AA_1 errichte man auf dieselbe die der kleinen Axe BB_1 gleichen Perpendikel DD' und D_1D_1', so dass $AD = AD' = b$ und $A_1D_1 = A_1D_1' = b$ ist und ziehe die Linien DD_1' und $D'D_1$. Weil diese Linien offenbar durch den Mittelpunkt C der Ellipse gehen werden, so bestimmen dieselben die Durchmesser $A'A_1'$ und $B'B_1'$ der Ellipse, von denen sich auf folgende Art leicht übersehen lässt, dass sie conjugirte Durchmesser sind.

Nehmen wir die beiden Axen der Ellipse als Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ an, und bezeichnen in diesem Coordinatensysteme die Coordinaten des Punktes A' durch $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, so ist bekanntlich die Gleichung der durch den Punkt A' gelegten Berührenden der Ellipse:

$$\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_0=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\mathfrak{x}_0}{\mathfrak{y}_0}(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0).$$

Nach der Construction ist aber offenbar

$$\mathfrak{x}_0:\mathfrak{y}_0=a:b,\quad \text{also}\quad \frac{\mathfrak{x}_0}{\mathfrak{y}_0}=\frac{a}{b};$$

und folglich die Gleichung der Berührenden der Ellipse in dem Punkte A':

$$\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_0=-\frac{b}{a}(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0).$$

Also ist $\frac{b}{a}$ die trigonometrische Tangente des spitzen Neigungswinkels der Berührenden der Ellipse in dem Punkte A' gegen die grosse Axe, und folglich offenbar der trigonometrischen Tangente des spitzen Neigungswinkels des Durchmessers $B'B_1'$ gegen die grosse Axe gleich, woraus sich ergiebt, dass dieser Durchmesser der Berührenden der Ellipse in dem Punkte A' parallel ist, und dass also $A'A_1'$ und $B'B_1'$ zwei conjugirte Durchmesser der Ellipse sind, wie behauptet wurde. Auch fällt auf der Stelle in die Augen, dass diese beiden conjugirten Durchmesser einander gleich sind, so dass wir also einen jeden derselben durch $2a'$ bezeichnen können.

Nehmen wir nun CA' als den positiven Theil der Axe der x und CB' als den positiven Theil der Axe der y eines schiefwinkligen Coordinatensystems der xy an, so ist die Gleichung der Ellipse in Bezug auf dieses Coordinatensystem bekanntlich:

$$\left(\frac{x}{a'}\right)^2+\left(\frac{y}{a'}\right)^2=1 \text{ oder } x^2+y^2=a'^2.$$

Es ist aber

$$a'^2=\mathfrak{x}_0^2+\mathfrak{y}_0^2,$$

und zwischen $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{y}_0$ hat man die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\mathfrak{x}_0}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{y}_0}{b}\right)^2=1,\quad \frac{\mathfrak{x}_0}{a}=\frac{\mathfrak{y}_0}{b};$$

woraus sich auf der Stelle

$$\mathfrak{x}_0^2=\frac{a^2}{2},\quad \mathfrak{y}_0^2=\frac{b^2}{2};\text{ also } \mathfrak{x}_0=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad \mathfrak{y}_0=\frac{b}{\sqrt{2}};$$

folglich nach dem Obigen

$$a'^2=\frac{a^2+b^2}{2}$$

ergiebt, so dass also

$$x^2+y^2=\frac{a^2+b^2}{2}$$

die Gleichung der Ellipse in Bezug auf das System der beiden conjugirten Durchmesser $A'A_1'$ und $B'B_1'$ ist.

Es ist auffallend, dass man diese beiden conjugirten Durchmesser noch nie einer aufmerksameren Betrachtung gewürdigt hat, da sie in der That zuweilen besondere Vortheile gewähren können, was ich jetzt an der Rectification der Ellipse zeigen will, wo die Betrachtung dieser beiden conjugirten Durchmesser zu ein Paar Reihen führt, die ich für bemerkenswerth halte und daher im Folgenden mittheilen will, wenn auch die eine, jedoch nur in einem besonderen Falle und auf ganz anderem Wege schon von **Euler** gefunden worden ist.

Als Anfangspunkt der elliptischen Bogen, die wir immer im Allgemeinen durch s bezeichnen werden, wollen wir den Scheitel B' des Durchmessers $B'B_1'$ annehmen. Der Endpunkt des Bogens s werde durch die Coordinaten x, y bestimmt. Der Winkel $A'CB'$ soll durch α bezeichnet werden. Die sämmtlichen Bogen wollen wir aber von B' an nur bis A' und A_1' hin nehmen, was offenbar zur Bestimmung aller Bogen der Ellipse hinreicht. Auch sollen x und y, man mag den Bogen s von B' nach A' hin oder von B' nach A_1' hin rechnen, immer beide als positiv angenommen werden. Unter diesen Voraussetzungen erhellet aus einer blossen Betrachtung von Taf. IV. Fig. 6. mit Hülfe eines bekannten trigonometrischen Elementarsatzes auf der Stelle, dass, wenn der Bogen s von B' nach A' hin gerechnet ist,

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 - 2\partial x(-\partial y)\cos\alpha$$

oder

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + 2\partial x\partial y\cos\alpha;$$

und, wenn der Bogen s von B' nach A_1' hin gerechnet ist,

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 - 2\partial x(-\partial y)\cos(180^0 - \alpha)$$

oder

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 - 2\partial x\partial y\cos\alpha$$

ist. Nimmt man also im Folgenden immer das obere oder das untere Zeichen, jenachdem der Bogen s von B' nach A' oder nach A_1' hin gerechnet ist, so ist allgemein

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 \pm 2\partial x\partial y\cos\alpha,$$

und folglich, weil unter den gemachten Voraussetzungen ∂x und ∂s offenbar immer gleiche Vorzeichen haben:

$$\partial s = \partial x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \pm 2\frac{\partial y}{\partial x}\cos\alpha}.$$

Aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

folgt durch Differentiation:

$$x+y\frac{\partial y}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{y};$$

also

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{y^2}=\frac{a^2+b^2}{2y^2},$$

und folglich

$$\partial s=\partial x\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2y^2}\mp 2\frac{x}{y}\cos\alpha}$$

oder

$$\partial s=\frac{\sqrt{a^2+b^2\mp 4xy\cos\alpha}}{y\sqrt{2}}\partial x.$$

Bezeichnen wir den spitzen Neigungswinkel des Durchmessers $A'A_1'$ oder $B'B_1'$ gegen die Hauptaxe der Ellipse durch μ, so ist offenbar $\alpha=180^0-2\mu$, und folglich

$$\cos\alpha=-\cos 2\mu,\quad \sin\alpha=\sin 2\mu.$$

Nun ist aber

$$\operatorname{tang}\mu=\frac{b}{a},$$

also

$$\cos\mu^2=\frac{1}{1+\operatorname{tang}\mu^2}=\frac{a^2}{a^2+b^2},\quad \sin\mu^2=\frac{\operatorname{tang}\mu^2}{1+\operatorname{tang}\mu^2}=\frac{b^2}{a^2+b^2};$$

folglich

$$\cos 2\mu=\cos\mu^2-\sin\mu^2=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

$$\sin 2\mu=2\sin\mu\cos\mu\quad=\frac{2ab}{a^2+b^2};$$

und daher nach dem Obigen:

$$\cos\alpha=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\quad \sin\alpha=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Weil ferner

$$x^2+y^2=\frac{a^2+b^2}{2}$$

ist, so ist

$$y^2=\frac{a^2+b^2}{2}-x^2=\frac{a^2+b^2}{2}\left(1-\frac{2x^2}{a^2+b^2}\right);$$

also nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$\partial s = \sqrt{\frac{a^2+b^2 \pm 4\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}.x\sqrt{1-\dfrac{2x^2}{a^2+b^2}}}{(a^2+b^2)(1-\dfrac{2x^2}{a^2+b^2})}}\,\partial x$$

oder

$$\partial s = \frac{\partial x}{\sqrt{1-\dfrac{2x^2}{a^2+b^2}}}\sqrt{1 \pm \frac{2(a^2-b^2)x\sqrt{2}}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{1-\frac{2x^2}{a^2+b^2}}}.$$

Setzen wir nun

$$\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=u,\quad \frac{2x^2}{a^2+b^2}=u^2,\quad \partial x=\partial u\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};$$

so wird:

$$\partial s=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.\frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}}\sqrt{1\pm 2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}u\sqrt{1-u^2}}.$$

Wegen der Gleichung

$$x^2+y^2=\frac{a^2+b^2}{2}$$

ist immer

$$x \overset{=}{<} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\quad \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}} \overset{=}{<} 1,\quad u \overset{=}{<} 1.$$

Leicht lässt sich nun aber zeigen, dass immer

$$u\sqrt{1-u^2} \overset{=}{<} \tfrac{1}{2}$$

ist; denn wäre

$$u\sqrt{1-u^2} > \tfrac{1}{2},$$

so wäre

$$u^2-u^4 > \tfrac{1}{4},$$

also

$$u^4-u^2 < -\tfrac{1}{4},\quad u^4-u^2+\tfrac{1}{4} < 0;$$

folglich

$$(u^2-\tfrac{1}{2})^2 < 0,$$

was ungereimt ist. Weil also

$$u\sqrt{1-u^2} \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{2},\quad 2u\sqrt{1-u^2} \overline{\overline{<}} 1$$

ist, so ist immer

$$2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}u\sqrt{1-u^2} < 1,$$

und die Quadratwurzel

$$\sqrt{1 \pm 2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}u\sqrt{1-u^2}}$$

lässt sich daher nach dem binomischen Lehrsatze immer in eine nach den Potenzen von

$$2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}u\sqrt{1-u^2}$$

fortschreitende convergirende Reihe entwickeln.

Weil nun

$$\sqrt{1 \pm 2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}u\sqrt{1-u^2}} = (1 \pm 2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}u\sqrt{1-u^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 \pm \frac{1}{2}\cdot 2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}u\sqrt{1-u^2}$$

$$-\frac{1}{2.4}\cdot 2^2\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 u^2(\sqrt{1-u^2})^2$$

$$\pm\frac{1.3}{2.4.6}\cdot 2^3\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^3 u^3(\sqrt{1-u^2})^3$$

$$-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot 2^4\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4 u^4(\sqrt{1-u^2})^4$$

$$\pm \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$= 1 \pm \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}u\sqrt{1-u^2}$$

$$-\frac{1}{1.2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 u^2(\sqrt{1-u^2})^2$$

$$\pm\frac{1.3}{1.2.3}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^3 u^3(\sqrt{1-u^2})^3$$

$$-\frac{1.3.5}{1.2.3.4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4 u^4(\sqrt{1-u^2})^4$$

$$\pm \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

ist, so erhält man aus dem Obigen leicht durch Integration:

$$s=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{\begin{aligned}&\int_0^u\frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}}\pm\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\int_0^u u\partial u\\&-\frac{1}{1.2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\int_0^u u^2\sqrt{1-u^2}\partial u\\&\pm\frac{1.3}{1.2.3}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^3\int_0^u u^3(\sqrt{1-u^2})^2\partial u\\&-\frac{1.3.5}{1.2.3.4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4\int_0^u u^4(\sqrt{1-u^2})^3\partial u\\&\pm\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.5}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^5\int_0^u u^5(\sqrt{1-u^2})^4\partial u\\&-\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}.$$

Bezeichnen wir jetzt für dasselbe x oder u den von B' an nach A' hin genommenen Bogen durch s', den von B' an nach A_1' hin genommenen Bogen dagegen durch s_1', so muss man in der obigen Formel für den ersteren die oberen, für den letzteren die unteren Zeichen nehmen; und es ist also:

$$s'=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{\begin{aligned}&\int_0^u\frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\int_0^u u\partial u\\&-\frac{1}{1.2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\int_0^u u^2\sqrt{1-u^2}\partial u\\&+\frac{1.3}{1.2.3}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^3\int_0^u u^3(\sqrt{1-u^2})^2\partial u\\&-\frac{1.3.5}{1.2.3.4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4\int_0^u u^4(\sqrt{1-u^2})^3\partial u\\&+\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.5}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^5\int_0^u u^5(\sqrt{1-u^2})^4\partial u\\&-\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\},$$

$$s_1'=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{\begin{array}{l}\int_0^u\frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\int_0^u u\partial u\\ -\frac{1}{1.2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\int_0^u u^2\sqrt{1-u^2}\,\partial u\\ -\frac{1.3}{1.2.3}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^3\int_0^u u^3(\sqrt{1-u^2})^2\partial u\\ -\frac{1.3.5}{1.2.3.4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4\int_0^u u^4(\sqrt{1-u^2})^3\partial u\\ -\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.5}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^5\int_0^u u^5(\sqrt{1-u^2})^4\partial u\\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\};$$

folglich

$$s'+s_1'=2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{\begin{array}{l}\int_0^u\frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}}-\frac{1}{1.2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\int_0^u u^2\sqrt{1-u^2}\partial u\\ -\frac{1.3.5}{1.2.3.4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4\int_0^u u^4(\sqrt{1-u^2})^3\partial u\\ -\frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5.6}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^6\int_0^u u^6(\sqrt{1-u^2})^5\,\partial u\\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\},$$

$$s'-s_1'=2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\int_0^u u\partial u+\frac{1.3}{1.2.3}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^3\int_0^u u^3(1-u^2)\partial u\\ +\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.5}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^5\int_0^u u^5(1-u^2)^2\partial u\\ +\frac{1.3.5.7.9.11}{1.2.3.4.5.6.7}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^7\int_0^u u^7(1-u^2)^3\partial u\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\};$$

wo in der letzteren Formel nur die Integrale rationaler Differentiale vorkommen. Man kann auch setzen:

$$s'-s_1'=2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{\begin{array}{l}\int_0^u u\partial u+\frac{1.3}{1.2.3}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\int_0^u u^3(1-u^2)\partial u\\ +\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.5}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4\int_0^u u^5(1-u^2)^2\partial u\\ +\frac{1.3.5.7.9.11}{1.2.3.4.5.6.7}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^6\int_0^u u^7(1-u^2)^3\partial u\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

Die Länge der halben Ellipse, welche wir durch E bezeichnen wollen, erhält man offenbar, wenn man in der Formel für $s'+s_1'$ die Grösse $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, also $u=1$ setzt, so dass also

$$E=2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{\begin{array}{l}\int_0^1\frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}}-\frac{1}{1.2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\int_0^1 u^2\sqrt{1-u^2}\partial u\\ -\frac{1.3.5}{1.2.3.4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4\int_0^1 u^4(\sqrt{1-u^2})^3\partial u\\ -\frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5.6}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^6\int_0^1 u^6(\sqrt{1-u^2})^5\partial u\\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$$

ist.

Setzen wir $u=\sin\frac{1}{2}\omega$ und nehmen $\frac{1}{2}\omega$ nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$, also ω nicht grösser als π, so ist $\sqrt{1-u^2}=\cos\frac{1}{2}\omega$ und $\partial u=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\omega\partial\omega$; also

$$\frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{2}\partial\omega,$$

$$u\partial u=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega\partial\omega=\frac{1}{2^2}\sin\omega\partial\omega,$$

$$u^2\sqrt{1-u^2}\partial u=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\omega^2\cos\frac{1}{2}\omega^2\partial\omega=\frac{1}{2^3}\sin\omega^2\partial\omega,$$

$$u^3(\sqrt{1-u^2})^2\partial u=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\omega^3\cos\frac{1}{2}\omega^3\partial\omega=\frac{1}{2^4}\sin\omega^3\partial\omega,$$

$$u^4(\sqrt{1-u^2})^3\partial u=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\omega^4\cos\frac{1}{2}\omega^4\partial\omega=\frac{1}{2^5}\sin\omega^4\partial\omega,$$

u. s. w.

Folglich ist nach dem Obigen:

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{\begin{array}{l}\omega\pm\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\int_0^\omega\sin\omega\partial\omega\\ -\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{1.2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\int_0^\omega\sin\omega^2\partial\omega\\ \pm\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1.3}{1.2.3}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^3\int_0^\omega\sin\omega^3\partial\omega\\ -\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1.3.5}{1.2.3.4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4\int_0^\omega\sin\omega^4\partial\omega\\ \pm\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.5}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^5\int_0^\omega\sin\omega^5\partial\omega\\ -\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\},$$

und

$$s'+s_1'=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{\begin{array}{l}\omega-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{1.2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\int_0^\omega\sin\omega^2\partial\omega\\ -\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1.3.5}{1.2.3.4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4\int_0^\omega\sin\omega^4\partial\omega\\ -\frac{1}{2^6}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5.6}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^6\int_0^\omega\sin\omega^6\partial\omega\\ -\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\},$$

und

$$s'-s_1'$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{\begin{array}{l}\int_0^\omega\sin\omega\partial\omega+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1.3}{1.2.3}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\int_0^\omega\sin\omega^3\partial\omega\\ +\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.5}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4\int_0^\omega\sin\omega^5\partial\omega\\ +\frac{1}{2^6}\cdot\frac{1.3.5.7.9.11}{1.2.3.4.5.6.7}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^6\int_0^\omega\sin\omega^7\partial\omega\\ +\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

Um die Länge E der halben Ellipse zu erhalten, müssen wir in dem obigen Ausdrucke von $s'+s_1'$ die Grösse $\omega=\pi$ setzen, wodurch man erhält:

$$E=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{\pi-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{1.2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\int_0^\pi \sin\omega^2\partial\omega\right.$$
$$-\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1.3.5}{1.2.3.4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4\int_0^\pi \sin\omega^4\partial\omega$$
$$-\frac{1}{2^6}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5.6}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^6\int_0^\pi \sin\omega^6\partial\omega$$
$$\left.-\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}.$$

Nach einer bekannten Reductionsformel ist

$$\int \sin\omega^{2n}\partial\omega=-\frac{\sin\omega^{2n-1}\cos\omega}{2n}+\frac{2n-1}{2n}\int\sin\omega^{2n-2}\partial\omega,$$

folglich

$$\int_0^\pi \sin\omega^{2n}\partial\omega=\frac{2n-1}{2n}\int_0^\pi \sin\omega^{2n-2}\partial\omega.$$

Also ist:

$$\int_0^\pi \sin\omega^2\partial\omega=\frac{1}{2}\int_0^\pi\partial\omega=\frac{1}{2}\pi,$$

$$\int_0^\pi \sin\omega^4\partial\omega=\frac{3}{4}\int_0^\pi \sin\omega^2\partial\omega=\frac{1.3}{2.4}\pi,$$

$$\int_0^\pi \sin\omega^6\partial\omega=\frac{5}{6}\int_0^\pi \sin\omega^4\partial\omega=\frac{1.3.5}{2.4.6}\pi,$$

$$\int_0^\pi \sin\omega^8\partial\omega=\frac{7}{8}\int_0^\pi \sin\omega^6\partial\omega=\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\pi,$$

u. s. w.

folglich allgemein:

$$\int_0^\pi \sin\omega^{2n}\partial\omega=\frac{1.3.5.7\ldots.(2n-1)}{2.4.6.8\ldots.2n}\pi.$$

Führt man nun diese Werthe der bestimmten Integrale in den obigen Ausdruck von E ein, so erhält man:

$$E=\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{\begin{array}{l}1-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\\ -\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1.3.5}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4\\ -\frac{1}{2^6}\cdot\frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^6\\ -\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\},$$

oder, wie Euler, der diese Reihe für den halben Umfang der Ellipse auf ganz anderem Wege gefunden hat *), dieselbe schreibt:

$$E=\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{\begin{array}{l}1-\frac{1.1}{4.4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\\ -\frac{1.1}{4.4}\cdot\frac{3.5}{8.8}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4\\ -\frac{1.1}{4.4}\cdot\frac{3.5}{8.8}\cdot\frac{7.9}{12.12}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^6\\ -\frac{1.1}{4.4}\cdot\frac{3.5}{8.8}\cdot\frac{7.9}{12.12}\cdot\frac{11.13}{16.16}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^8\\ -\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

Die Reihen, welche gewöhnlich für den Umfang der Ellipse gegeben werden, schreiten nach den Potenzen der Grösse $\frac{a^2-b^2}{a^2}$ fort, welche grösser als die Grösse $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ ist, nach welcher die obige Reihe fortschreitet.

Bezeichnet man die Differenz der Bogen $A'B'$ und $A_1'B'$ durch D, so ist nach dem Obigen:

$$D=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{\begin{array}{l}\int_0^\pi \sin\omega\partial\omega+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1.3}{1.2.3}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\int_0^\pi \sin\omega^3\partial\omega\\ +\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.5}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4\int_0^\pi \sin\omega^5\partial\omega\\ +\frac{1}{2^6}\cdot\frac{1.3.5.7.9.11}{1.2.3.4.5.6.7}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^6\int_0^\pi \sin\omega^7\partial\omega\\ +\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

---

*) M. s. Mathematisches Wörterbuch. Thl. IV. S. 193. Auch vergleiche man den Aufsatz von Herrn Doctor Hoppe im Archiv. Thl. III. Nr. XXX. S. 265.

Nach derselben Reductionsformel wie oben ist aber

$$\int \sin\omega^{2n+1}\partial\omega = -\frac{\sin\omega^{2n}\cos\omega}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1}\int \sin\omega^{2n-1}\partial\omega,$$

also

$$\int_0^\pi \sin\omega^{2n+1}\partial\omega = \frac{2n}{2n+1}\int_0^\pi \sin\omega^{2n-1}\partial\omega,$$

und folglich:

$$\int_0^\pi \sin\omega^3\partial\omega = \frac{2}{3}\int_0^\pi \sin\omega\partial\omega,$$

$$\int_0^\pi \sin\omega^5\partial\omega = \frac{4}{5}\int_0^\pi \sin\omega^3\partial\omega = \frac{2.4}{3.5}\int_0^\pi \sin\omega\partial\omega,$$

$$\int_0^\pi \sin\omega^7\partial\omega = \frac{6}{7}\int_0^\pi \sin\omega^5\partial\omega = \frac{2.4.6}{3.5.7}\int_0^\pi \sin\omega\partial\omega,$$

$$\int_0^\pi \sin\omega^9\partial\omega = \frac{8}{9}\int_0^\pi \sin\omega^7\partial\omega = \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\int_0^\pi \sin\omega\partial\omega,$$

u. s. w.

Also ist allgemein:

$$\int_0^\pi \sin\omega^{2n+1}\partial\omega = \frac{2.4.6.8\ldots.2n}{3.5.7.9\ldots.(2n+1)}\int_0^\pi \sin\omega\partial\omega,$$

und folglich, weil

$$\int \sin\omega\partial\omega = -\cos\omega,\quad \int_0^\pi \sin\omega\partial\omega = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

ist:

$$\int_0^\pi \sin\omega^{2n+1}\partial\omega = 2.\frac{2.4.6.8\ldots.2n}{3.5.7.9\ldots.(2n+1)}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$D = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{1 + \frac{1}{2^2}.\frac{1.3}{1.2.3}.\frac{2}{3}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 \right.$$
$$+ \frac{1}{2^4}.\frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.5}.\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4$$
$$+ \frac{1}{2^6}.\frac{1.3.5.7.9.11}{1.2.3.4.5.6.7}.\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^6$$
$$\left. + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \right\}$$

oder

$$D=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\left\{1+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 +\frac{1}{2^4}\cdot\frac{7}{3.5}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^4 +\frac{1}{2^6}\cdot\frac{9.11}{3.5.7}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^6 +\frac{1}{2^8}\cdot\frac{11.13.15}{3.5.7.9}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^8 + \ldots\ldots\right\}.$$

XV.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn C. Küpper in Trier.

I.

Aus der Theorie der Trägheitsmomente.

Lehrsatz. Das Trägheitsmoment eines ebenen Systems in Bezug auf jede Gerade in der Ebene lässt sich ausdrücken durch das Trägheitsmoment zweier Punkte dieser Ebene in Bezug auf dieselbe Gerade, vermehrt um eine Constante. Diese beiden Punkte liegen gleichweit vom Schwerpunkt des Systems auf derjenigen Geraden, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment des Systems ein Minimum ist; man muss diesen Punkten gleiche Masse und zwar die halbe Masse des Systems beigelegt denken; die hinzuzufügende Constante ist der kleinste Werth, den das Trägheitsmoment annehmen kann. Hiernach berühren alle Geraden, für welche das Trägheitsmoment einen beliebigen constanten Werth hat, einen Kegelschnitt, dessen imaginäre Brennpunkte jene festen Punkte sind. Wann ist dieser Ort eine Ellipse, wann eine Hyperbel?

II.

Aus der Theorie der Cykloiden.

1) Eine verkürzte Cykloide $x\gamma c'\gamma' y$ (Taf. IV. Fig. 7.) wird von der Geraden, über welche der Erzeugungskreis rollt, in zwei Theile getheilt, deren Differenz dem vierfachen Durchmesser dieses Kreises gleich ist. Nennen wir D diesen Durchmesser, so hat man:

$$\gamma c'\gamma' - (\gamma x + \gamma y) = 4D = \text{ der Cykloide } ncn',$$

welche ein Punkt des Umfangs des rollenden Kreises beschreibt.

2) Die Cykloide $x\gamma c'\gamma' y$ ist einer Ellipse an Länge gleich, welche zur kleinen Halbaxe xn, zur grossen $xn + D$ hat.

Wie gestalten sich diese Resultate bei einer gestreckten Cykloide?

Von Herrn Dr. C. F. Lindman in Strengnäs in Schweden.

I.

Integrale

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi d\varphi}{\sqrt{\operatorname{Sin}^8\varphi + \operatorname{Cos}^8\varphi}}$$

ad functiones ellipticas reducatur.

II.

Invenire angulum, qui continetur ab axi abscissarum et recta, quae curvam aequatione

$$y^4 + x^4 - 2ay^3 - 2bx^2y = 0$$

definitam in puncto $x=0$, $y=0$ tangit.

XVI.

Miscellen.

Von dem Herausgeber.

I.

Herr Professor Richelot in Königsberg hat in den Astronomischen Nachrichten. Thl. XLII. S. 215. für die Aufgabe:

> In der Ebene eines Dreiecks denjenigen Punkt zu finden, dessen Entfernungen von den drei Ecken, jede mit dem Sinus des von den beiden anderen Entfernungen eingeschlossenen Winkels multiplicirt, zusammen addirt den möglichst grössten Werth annehmen;

die folgende elegante Auflösung gegeben:

Bezeichnet man die drei Ecken und Winkel des Dreiecks durch $A, B, C,$ die ihnen resp. gegenüber liegenden Seiten durch $a, b, c,$ den zu suchenden Punkt mit $D,$ und seine Entfernungen von den drei Ecken respective mit $\mathit{A}, \mathit{B}, \Gamma,$ endlich die drei Winkel, welche von den betreffenden Halbirungslinien der drei Winkel des Dreiecks in directer Richtung, d. h. in derselben, worin die drei Ecken A, B, C auf einander folgen, bis zu den betreffenden Entfernungen $\mathit{A}, \mathit{B}, \Gamma$ positiv gezählt werden, mit $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$; so erhält man, für jede Lage des Punktes $D,$ als Werthe der direct gezählten Winkel zwischen den Entfernungen:

$$(\Gamma, \mathit{B})=\frac{\pi}{2}+\frac{A+\beta-\gamma}{2},$$

$$(\mathit{A}, \Gamma)=\frac{\pi}{2}+\frac{B+\gamma-\alpha}{2},$$

$$(\mathit{B}, \mathit{A})=\frac{\pi}{2}+\frac{C+\alpha-\beta}{2};$$

und hieraus folgende Doppelformeln:

$$A=\frac{c\sin\frac{B+\beta}{2}}{\cos\frac{C+\alpha-\beta}{2}}=\frac{b\sin\frac{C-\gamma}{2}}{\cos\frac{B+\gamma-\alpha}{2}},$$

$$B=\frac{a\sin\frac{C+\gamma}{2}}{\cos\frac{A+\beta-\gamma}{2}}=\frac{c\sin\frac{A-\alpha}{2}}{\cos\frac{C+\alpha-\beta}{2}},$$

$$\Gamma=\frac{b\sin\frac{A+\alpha}{2}}{\cos\frac{B+\gamma-\alpha}{2}}=\frac{a\sin\frac{B-\beta}{2}}{\cos\frac{A+\beta-\gamma}{2}}.$$

Substituirt man sowohl die drei ersteren, als auch die drei letzteren Werthe in die beiden Ausdrücke:

$$U=A\cos(\Gamma, B)+B\cos(A, \Gamma)+\Gamma\cos(B, A),$$

$$V=A\sin(\Gamma, B)+B\sin(A, \Gamma)+\Gamma\sin(B, A)$$

und nimmt die Differenz der beiden Werthe von U, so wie die Summe der beiden Werthe von V, so erhält man nach leichten trigonometrischen Reductionen die Gleichungen:

$$0=a\sin\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}+b\sin\frac{\beta-\gamma-\alpha}{2}+c\sin\frac{\gamma-\alpha-\beta}{2}, \ldots (1)$$

$$2V=a\cos\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}+b\cos\frac{\beta-\gamma-\alpha}{2}+c\cos\frac{\gamma-\alpha-\beta}{2}. \ldots (2)$$

Es ergiebt sich aus dieser Form des Ausdrucks V, welcher ein Maximum werden soll, von selbst, dass dies für die zugleich der Bedingungsgleichung (1) genügenden Werthe

$$\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=0$$

der Fall ist, weil für sie die drei Cosinusse des Ausdrucks (2) ihren grössten Werth erreichen. Auf diese Weise ergiebt sich die Auflösung der Aufgabe von selbst, indem diese drei Werthe auf das Centrum des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises führen.

Der Aufsatz des Herrn Professors Richelot enthält noch manche andere interessante Bemerkungen, auch eine von Herrn

Bauführer Mendthal gegebene Auflösung, wegen welcher wir die Leser auf den Aufsatz selbst verweisen.

II.

In der Abhandlung: Variae Demonstrationes geometricae. Novi Commentarii Acad. Scientiar. Imp. Petrop. T. I. p. 49.*) beweiset Euler einen Satz vom Kreise, den er als

Fermat's Lehrsatz

bezeichnet, und sagt von demselben: „Reperitur in commercio epistolico Fermatii propositio quaedam geometrica, quam Geometris demonstrandam proposuit. Quae etsi ad naturam circuli spectat, nihilque difficultatis primo intuitu involvere videtur, tamen a pluribus Geometris frustra est suscepta, neque usque adhuc eius demonstratio est tradita.“ Dieser Fermat'sche Lehrsatz ist folgender:

Wenn man über dem Durchmesser AB (Taf. IV. Fig. 8.) eines Halbkreises AEB als Grundlinie ein Rechteck $ABCD$ beschreibt, dessen Höhe AC oder BD der Sehne des Quadranten des Kreises, zu welchem der Halbkreis AEB gehört, gleich ist, und von den beiden Punkten C und D nach dem beliebigen Punkte E des Halbkreises die Linien CE und DE zieht, welche den Durchmesser AB in F und G schneiden, so ist immer

$$AG^2 + BF^2 = AB^2.$$

Euler beweiset diesen Satz im Wesentlichen auf folgende Art. Man lege durch A, E und B, E gerade Linien, welche die verlängerte Linie CD in H und J schneiden. Fällt man dann

*) In dieser Abhandlung p. 63. beweiset Euler auch den Satz vom Viereck, „dass die Summe der Quadrate der vier Seiten der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen plus dem vierfachen Quadrate der die Mittelpunkte der Diagonalen verbindenden Geraden gleich ist“, und bezeichnet diesen Satz als ein „theorema, nusquam adhuc neque prolatum neque demonstratum.“ Dieser Satz ist also eine Erfindung Euler's, wie auch z. B. Herr Professor Kunze in seinem Lehrbuche der Geometrie. Thl. I. Jena 1842. S. 82. bemerkt. Er verweiset deshalb aber auf die weit späteren Nova Acta. Petrop. I. 489., da doch der Satz schon in den Novis Commentariis. T. I. 1750 vorkömmt.

noch von E auf AB das Perpendikel EK, wodurch bekanntlich die ähnlichen Dreiecke AEK und BEK entstehen, so erhellet auf der Stelle auch die Aehnlichkeit der Dreiecke ACH und BDJ, und es ist also

$$HC:AC=BD:JD,$$

folglich

$$HC\times JD=AC\times BD=AC^2.$$

Weil nun AC der Sehne des Quadranten gleich ist, so ist offenbar

$$AC^2=\tfrac{1}{2}AB^2,$$

also

$$HC\times JD=\tfrac{1}{2}AB^2,\quad 2HC\times JD=AB^2$$

oder

$$2HC\times JD=CD^2.$$

Nun ist aber

$$HC:AF=CD:FG,$$

$$JD:BG=CD:FG;$$

also

$$HC\times JD:AF\times BG=CD^2:FG^2$$

oder

$$2HC\times JD:2AF\times BG=CD^2:FG^2,$$

folglich

$$2AF\times BG=FG^2.$$

Nun ist aber

$$AG+BF=AB+FG,$$

also, wenn man quadrirt:

$$AG^2+BF^2+2AG\times BF=AB^2+FG^2+2AB\times FG,$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$AG^2+BF^2+2AG\times BF=AB^2+2AF\times BG+2AB\times FG$$

und

$$AG\times BF=(AF+FG)(BG+FG)=AF\times BG+BG\times FG+AG\times FG$$
$$=AF\times BG+AB\times FG,$$

also

$$2AG \times BF = 2AF \times BG + 2AB \times FG,$$

und folglich nach dem Obigen offenbar

$$AG^2 + BF^2 = AB^2,$$

wie bewiesen werden sollte.

III.

Einige Bemerkungen über das ebene Dreieck.

Die Seiten und deren Gegenwinkel eines beliebigen ebenen Dreiecks ABC wollen wir wie gewöhnlich durch a, b, c und A, B, C bezeichnen. Von einem beliebigen Punkte O in der Ebene dieses Dreiecks ziehen wir nach A, B, C die Linien x, y, z und fällen auf die Seiten a, b, c Perpendikel, welche letzteren als positiv oder negativ betrachtet werden mögen, jenachdem sie von den betreffenden Seiten an nach dem inneren oder äusseren Raume des Dreiecks hin liegen, und, mit Rücksicht hierauf, respective durch u, v, w bezeichnet werden sollen. Dann überzeugt man sich sehr leicht von der allgemeinen Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$x^2 \sin A^2 = v^2 + w^2 + 2vw \cos A,$$
$$y^2 \sin B^2 = w^2 + u^2 + 2wu \cos B,$$
$$z^2 \sin C^2 = u^2 + v^2 + 2uv \cos C.$$

Führt man nun aber für $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ ihre bekannten Ausdrücke durch die Seiten a, b, c des Dreiecks ein, so erhält man nach einigen leichten Verwandlungen:

$$bcx^2 \sin A^2 = (bw + cv)(au + bv + cw) - a(avw + bwu + cuv),$$

$$cay^2 \sin B^2 = (cu + aw)(au + bv + cw) - b(avw + bwu + cuv),$$

$$abz^2 \sin C^2 = (av + bu)(au + bv + cw) - c(avw + bwu + cuv);$$

also, wenn man

$$2\Delta = au + bv + cw, \quad 2\Delta' = avw + bwu + cuv$$

setzt, wo Δ den Flächeninhalt des Dreiecks bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}bcx^2 \sin A^2 = (bw + cv)\Delta - a\Delta',$$
$$\tfrac{1}{2}cay^2 \sin B^2 = (cu + aw)\Delta - b\Delta',$$
$$\tfrac{1}{2}abz^2 \sin C^2 = (av + bu)\Delta - c\Delta'.$$

Setzt man

$$\Delta''=\frac{u}{a}+\frac{v}{b}+\frac{w}{c},$$

so wird:

$$\tfrac{1}{2}bcx^2\sin A^2=bc\Delta\Delta''-\frac{bc}{a}u\Delta-a\Delta',$$

$$\tfrac{1}{2}cay^2\sin B^2=ca\Delta\Delta''-\frac{ca}{b}v\Delta-b\Delta',$$

$$\tfrac{1}{2}abz^2\sin C^2=ab\Delta\Delta''-\frac{ab}{c}w\Delta-c\Delta';$$

oder:

$$\tfrac{1}{2}abcx^2\sin A^2=abc\Delta\Delta''-bcu\Delta-a^2\Delta',$$

$$\tfrac{1}{2}abcy^2\sin B^2=abc\Delta\Delta''-cav\Delta-b^2\Delta',$$

$$\tfrac{1}{2}abcz^2\sin C^2=abc\Delta\Delta''-abw\Delta-c^2\Delta'.$$

Ferner findet man leicht:

$$\tfrac{1}{2}bcux^2\sin A^2=2\Delta\Delta'-a(u\Delta'+vw\Delta),$$

$$\tfrac{1}{2}cavy^2\sin B^2=2\Delta\Delta'-b(v\Delta'+wu\Delta),$$

$$\tfrac{1}{2}abwz^2\sin C^2=2\Delta\Delta'-c(w\Delta'+uv\Delta).$$

Es ist aber $\sin A=\frac{2\Delta}{bc}$, $\sin B=\frac{2\Delta}{ca}$, $\sin C=\frac{2\Delta}{ab}$,

also:

$$\frac{2x^2\Delta^2}{bc}=(bw+cv)\Delta-a\Delta',\quad \frac{2y^2\Delta^2}{ca}=(cu+aw)\Delta-b\Delta',$$

$$\frac{2z^2\Delta^2}{ab}=(av+bu)\Delta-c\Delta';$$

ferner:

$$\frac{2ax^2\Delta^2}{bc}=abc\Delta\Delta''-bcu\Delta-a^2\Delta',\quad \frac{2by^2\Delta^2}{ca}=abc\Delta\Delta''-cav\Delta-b^2\Delta',$$

$$\frac{2cz^2\Delta^2}{ab}=abc\Delta\Delta''-abw\Delta-c^2\Delta';$$

und:

$$\frac{2ux^2\Delta^2}{bc}=2\Delta\Delta'-a(u\Delta'+vw\Delta),\quad \frac{2vy^2\Delta^2}{ca}=2\Delta\Delta'-b(v\Delta'+wu\Delta),$$

$$\frac{2wz^2\Delta^2}{ab}=2\Delta\Delta'-c(w\Delta'+uv\Delta);$$

oder:

$$aux^2=\frac{abc}{2\Delta^2}\{2\Delta\Delta'-a(u\Delta'+vw\Delta)\},\quad bvy^2=\frac{abc}{2\Delta^2}\{2\Delta\Delta'-b(v\Delta'+wu\Delta)\},$$

$$cwz^2=\frac{abc}{2\Delta^2}\{2\Delta\Delta'-c(w\Delta'+uv\Delta)\}.$$

Also ist offenbar:

$$aux^2+bvy^2+cwz^2=\frac{abc}{2\Delta^2}\{6\Delta\Delta'-(2\Delta\Delta'+2\Delta\Delta')\},$$

folglich

$$aux^2+bvy^2+cwz^2=abc\frac{\Delta'}{\Delta},$$

welche Relation wohl einige Beachtung verdienen dürfte.

Nach dem Obigen hat man die Gleichungen:

$$2x^2\Delta^2=b^2c^2\left(\frac{v}{b}+\frac{w}{c}\right)\Delta-abc\Delta',\quad 2y^2\Delta^2=c^2a^2\left(\frac{w}{c}+\frac{u}{a}\right)\Delta-abc\Delta',$$

$$2z^2\Delta^2=a^2b^2\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)\Delta-abc\Delta';$$

also, wenn man je zwei dieser Gleichungen von einander subtrahirt:

$$\frac{2(x^2-y^2)\Delta}{c^2}=b^2\left(\frac{v}{b}+\frac{w}{c}\right)-a^2\left(\frac{w}{c}+\frac{u}{a}\right),$$

$$\frac{2(y^2-z^2)\Delta}{a^2}=c^2\left(\frac{w}{c}+\frac{u}{a}\right)-b^2\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right),$$

$$\frac{2(z^2-x^2)\Delta}{b^2}=a^2\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)-c^2\left(\frac{v}{b}+\frac{w}{c}\right);$$

folglich, wie man leicht findet:

$$\frac{(x^2-y^2)\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)}{c^2}+\frac{(y^2-z^2)\left(\frac{v}{b}+\frac{w}{c}\right)}{a^2}+\frac{(z^2-x^2)\left(\frac{w}{c}+\frac{u}{a}\right)}{b^2}=0$$

oder

$$\frac{(y^2-z^2)\left(\frac{v}{b}+\frac{w}{c}\right)}{a^2}+\frac{(z^2-x^2)\left(\frac{w}{c}+\frac{u}{a}\right)}{b^2}+\frac{(x^2-y^2)\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)}{c^2}=0,$$

was ebenfalls eine bemerkenswerthe Relation ist.

Durch Addition der drei obigen Gleichungen erhält man:

$$\varDelta=-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(b^2-c^2)\frac{u}{a}+(c^2-a^2)\frac{v}{b}+(a^2-b^2)\frac{w}{c}}{\frac{y^2-z^2}{a^2}+\frac{z^2-x^2}{b^2}+\frac{x^2-y^2}{c^2}}.$$

Aus den obigen Gleichungen folgt auch

$$\varDelta=\frac{b^2\left(\frac{v}{b}+\frac{w}{c}\right)-a^2\left(\frac{w}{c}+\frac{u}{a}\right)}{2(x^2-y^2)}c^2,$$

oder

$$\varDelta=\frac{\{b(bw+cv)-a(cu+aw)\}c}{2(x^2-y^2)},$$

oder

$$\varDelta=\frac{\{(b^2-a^2)w+c(bv-au)\}c}{2(x^2-y^2)}.$$

Weil $cw=2\varDelta-au-bv$ ist, so wird:

$$\varDelta=\frac{2(b^2-a^2)\varDelta-au(b^2+c^2-a^2)+bv(c^2+a^2-b^2)}{2(x^2-y^2)},$$

also

$$\varDelta=\frac{(b^2-a^2)\varDelta-abc(u\cos A-v\cos B)}{x^2-y^2},$$

und folglich:

$$\varDelta=\frac{abc(u\cos A-v\cos B)}{(b^2-a^2)-(x^2-y^2)},$$

oder

$$\varDelta=\frac{abc(u\cos A-v\cos B)}{(b-a)(b+a)-(x-y)(x+y)}.$$

Wer Vergnügen an dergleichen Dingen findet, kann mittelst des Obigen leicht mehr finden; gelegentlich von mir gefunden, werden sie hier nur mitgetheilt, um vielleicht gelegentlich zu Uebungen für Schüler benutzt zu werden.

Für den Mittelpunkt des um das Dreieck beschriebenen Kreises ist $x=y=z$, also nach dem Obigen, wenn der Kürze wegen

$$u'=\frac{u}{a},\quad v'=\frac{v}{b},\quad w'=\frac{w}{c}$$

gesetzt wird:

$$b^2(v'+w')-a^2(w'+u')=0,$$
$$c^2(w'+u')-b^2(u'+v')=0,$$
$$a^2(u'+v')-c^2(v'+w')=0;$$

oder:

$$a^2u'-b^2v'+(a^2-b^2)w'=0,$$
$$(b^2-c^2)u'+b^2v'-c^2w'=0,$$
$$a^2u'-(c^2-a^2)v'-c^2w'=0;$$

woraus sogleich durch Addition und Subtraction:

$$(c^2+a^2-b^2)u'-(b^2+c^2-a^2)v'=0,$$
$$(a^2+b^2-c^2)u'-(b^2+c^2-a^2)w'=0;$$

also

$$v'=\frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}u', \quad w'=\frac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}u'$$

erhalten wird. Nun ist aber

$$2\Delta=au+bv+cw=a^2u'+b^2v'+c^2w',$$

also:

$$u'=\frac{2(b^2+c^2-a^2)\Delta}{a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)},$$

oder:

$$u'=\frac{2(b^2+c^2-a^2)\Delta}{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}.$$

Aehnliche Ausdrücke kann man natürlich auch für v' und w' erhalten.

Für den Mittelpunkt des in das Dreieck beschriebenen Kreises ist $u=v=w$, also nach dem Obigen:

$$2a^2\Delta^2=b^2c^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)u\Delta-abc\Delta'=bc(b+c)u\Delta-abc\Delta'.$$

Nun ist aber in diesem Falle nach dem Obigen:

$$2\Delta=(a+b+c)u, \quad 2\Delta'=(a+b+c)u^2;$$

also, wenn man diese Ausdrücke in die vorstehende Gleichung einführt, und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$x^2 = \frac{bc(b+c-a)}{a+b+c} \text{ oder } x = \sqrt{\frac{b+c-a}{a+b+c}bc},$$

was man auch leicht auf andere Art finden kann.

Weitere Betrachtungen über diesen Gegenstand überlasse ich dem Leser.

Schreiben des Herrn Dr. W. Stammer, ordentlichen Lehrers an der Realschule zu Düsseldorf an den Herausgeber.

Ich nehme mir die Freiheit, Ihnen hiermit einige Bemerkungen zu übersenden, zu welchen mich zwei Aufsätze in Ihrem sehr geschätzten „Archiv für Mathematik und Physik" veranlasst haben. Obgleich ich mir weder einbilde, dass auf dieselben ein grosses Gewicht zu legen sei, noch dass sie nicht auch Andern aufgestossen seien, so dürften sie dennoch Ihrer Beachtung nicht ganz unwerth erscheinen.

I. Im ersten Hefte des 24. Theils befindet sich Seite 112. ein Beweis für den Satz von den Kantenwinkeln einer körperlichen Ecke, welcher zwar für die meisten Fälle ausreicht, in manchen aber nicht richtig ist. Es ist nämlich die Ungleichheit $AO'B > AOB$ nur dann immer richtig, wenn keiner der beiden Winkel $O'AB$ und $O'BA$ stumpf ist, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man die Ebene AOB in die Ebene, in welcher O' liegt, umgelegt denkt. Es müsste also erst bewiesen werden, dass man in jeder Ecke die Linie OO' so ziehen kann, dass für eine auf ihr senkrechte Ebene sämmtliche Winkel $O'AB$, $O'BA$ spitze sind. Und dieser Beweis, der dann eine neue Bedingung zur Construirung der Linie OO' nach sich führen müsste, würde den Beweis des Herrn Sturm sehr complizirt machen und ihm das Verdienst der Einfachheit rauben.

Es führte mich diese Bemerkung zu einer geometrischen Aufgabe, die mir bis jetzt noch nicht bekannt war, nämlich: „Ueber einer gegebenen Grundlinie AB ein Dreieck zu construiren, dessen Spitze auf einer gegebenen Geraden CD liegt und dessen Winkel an der Spitze ein Maximum sei." Zur Construction des Dreiecks hat man nur zu beachten, dass die Spitze auf dem Umkreise des kleinsten Kreises liegen muss, der durch A und B gelegt werden kann, d. h. des Kreises, welcher CD berührt. Man hat also nur den Kreis zu suchen, der durch A und B geht und CD berührt, eine Aufgabe, die so elegant durch die Lehre von den Potenzen im Kreise gelöst wird.

II. Im zweiten Hefte des 25. Theils S. 194. gibt Herr Hauptmann Reyer an, dass man durch Versuche gefunden, dass die Anzahl der Stellen der Periode des Dezimalbruchs, in den sich der Bruch $\frac{a}{p}$ verwandeln lässt, entweder $p-1$ oder ein Theiler von $p-1$ zu sein scheine. Der Beweis hierfür lässt sich streng führen, und da mir die beiden von Ihnen in der Anmerkung angeführten Werke nicht zur Hand sind, so dass ich nicht nachsehen kann, ob derselbe sich dort befindet, so wage ich es, Ihnen meinen Beweis mitzutheilen:

Es sei der periodische Dezimalbruch $0, abc \ldots . abc$, wo x die Anzahl der Stellen der Periode, in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln; bezeichnet $\frac{m}{n}$ diesen Bruch, so erhält man bekanntlich $\frac{m}{n} . 10^x - abc \ldots . = \frac{m}{n}$; daher $\frac{m}{n}(10^x - 1) = abc \ldots .$, oder, wenn wir $\frac{m}{n}$ auf seine kleinste Benennung bringen, $\frac{a}{p}(10^x - 1) = abc \ldots .$ Nehmen wir nur den Fall, wo p eine Primzahl, so folgt hieraus die Congruenz $10^x \equiv 1 \pmod{p}$. Der kleinste Werth von x, welcher dieser Congruenz genügt, erfüllt auch die Bedingung der Aufgabe, denn er macht $abc \ldots .$ zu einer ganzen Zahl. Alle übrigen Werthe aber sind nur Vielfache des kleinsten Werthes (wie sich leicht beweisen lässt), würden also Perioden liefern, welche die gefundene Periode mehreremal enthielten. Die aufgestellte Congruenz aber wird befriedigt nur durch $x = p - 1$ oder durch gewisse, noch näher zu bestimmende Theiler von x. Daraus folgt, dass die Periode jedenfalls $p-1$ Stellen haben muss, wenn 10 eine primitive Wurzel zu p ist. Indem ich diesen Satz prüfte durch Vergleichung der im angeführten Aufsatze mitgetheilten Tabelle über die Anzahl der Dezimalstellen für $p = 3$ bis $p = 149$ mit den Tafeln der primitiven Wurzeln, die ich in Serret: Algèbre supérieure (II. Edit. p. 340.) und im 45. Bande des Crelle'schen Journals für Mathem. (S. 55.) besitze, fand ich allerdings denselben in obiger Form vollkommen bestätigt; die Umkehrung, dass nämlich nur in diesem Falle die Periode $p-1$ Stellen haben könnte, findet nicht allgemein statt, nämlich nicht für $p = 7$, das nicht 10 unter seinen primitiven Wurzeln haben kann, insofern $10 > 7$; aber $10 \equiv 3 \pmod{7}$ und 3 ist primitive Wurzel. Für alle übrigen Primzahlen gilt aber die Umkehrung.

Diesen Gegenstand weiter zu untersuchen, ist mir augenblicklich nicht möglich, da mich meine Berufspflichten zu sehr in Anspruch nehmen; doch hoffe ich ihn bald wieder aufnehmen zu können.

XVII.

Zur Geschichte des Streites über den ersten Entdecker der Differentialrechnung, nebst einigen Bemerkungen über die Schrift: „Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von Leibniz bis auf Lagrange, als ein historisch-kritischer Beitrag zur Geschichte der Mathematik dargestellt von Dr. Hermann Weissenborn. Halle 1856."

Von

Herrn Dr. *C. J. Gerhardt*

zu Berlin.

Bekanntlich wurde der Streit über den ersten Entdecker der Differentialrechnung zuerst angeregt im Jahre 1699 durch Fatio de Duillier, einen Schweizer, der seit dem Jahre 1691 in London lebte. Fatio war kein unbedeutender Mathematiker, er war Mitglied der Königlichen Societät in London und stand in Correspondenz mit Hugens *). Aus seinen Briefen, die er von London aus an den letzteren richtete, geht hervor, dass dieser Angriff im Stillen längst vorbereitet war. Ob er die Billigung Newton's hatte, lässt sich nicht ermitteln; indess das geht mit Sicherheit aus Fatio's Correspondenz mit Hugens hervor, dass Newton ihm Einsicht in seine Papiere gestattet hatte. Demnach meinte

*) Fatio's Correspondenz mit Hugens findet sich in: Ch. Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae, ed. Uylenbroeck, Hag. Com. 1833. Fasc. II.

Fatio, dass Newton unbestritten der erste Erfinder der neuen Analysis sei, und dass weiter zu entscheiden wäre, was Leibniz, als zweiter Erfinder, von dem ersten entlehnt hätte. Durch diese unbegründeten Beschuldigungen musste Leibniz sich um so mehr verletzt fühlen, als er, wie aus seinem Briefwechsel mit Wallis hervorgeht, im Vertrauen auf die Gerechtigkeit seiner Sache und reinen Gewissens willig die Herausgabe seiner Correspondenz mit Newton gestattet hatte, die Wallis zu veröffentlichen beabsichtigte. Da Fatio zu den Mitgliedern der Königlichen Societät in London gehörte, so nahm Leibniz im ersten Augenblicke an, es sei das, was Fatio gegen ihn geschrieben, mit Genehmigung der Societät geschehen, und er forderte in seinen, im Jahre 1699 an Wallis gerichteten, noch ungedruckten Briefen den letzteren auf, seine Rechte wahrzunehmen. Ein Schreiben des Secretärs der Societät, Sloane, belehrte ihn, dass seine Annahme in Bezug auf irgend welche Betheiligung der Societät bei diesem Angriff Fatio's unbegründet sei; in Folge dessen beruhigte er sich und die Sache kam in Vergessenheit.

Im Jahre 1708 wurden von Keill die Angriffe gegen Leibniz erneuert; dass Leibniz ein Plagiarius sei, wurde fast direkt ausgesprochen. Leibniz hatte, da Wallis im Jahre 1703 gestorben war, in England Niemanden, der seine Rechte wahrnehmen konnte; er beklagte sich deshalb unmittelbar bei der Königlichen Societät. Die Folge davon war, dass von Seiten der letzteren eine Commission ernannt wurde, um die betreffenden Papiere zu untersuchen. Der Bericht derselben erschien im Jahre 1712 unter dem Titel: „Commercium epistolicum D. Joannis Collins et aliorum de Analysi promota, jussu Societatis Regiae in lucem editum.“ Da dieser Bericht, so wie die Auswahl der ihn begleitenden Aktenstücke lediglich das Werk der einen Parthei war, so konnte er unmöglich als eine endgültige Entscheidung in der Sache betrachtet werden; dies fühlte auch die Königliche Societät und sie erklärte im Jahre 1715, dass sie nicht die Absicht gehabt hätte, über die Streitfrage ein Urtheil zu fällen, es stehe vielmehr Jedermann frei, auf Grund der betreffenden Aktenstücke eine Meinung sich zu bilden. Leibniz starb gegen Ende des Jahres 1716; indess sein Tod versöhnte die Leidenschaften der Gegenparthei nicht. Da das Commercium epistolicum nur in wenigen Exemplaren gedruckt war, weshalb auch gegenwärtig die erste Ausgabe von 1712 sehr selten ist, so wurde im Jahre 1722 eine neue Ausgabe veranstaltet, vermehrt mit einer Vorrede: „Ad lectorem“, und mit einer „Recensio libri“, um den Leser auf den rechten Standpunkt zu stellen, von dem aus die Schrift zu beur-

theilen sei; ausserdem unterscheidet sich diese zweite Ausgabe von der ersten durch eine Menge Varianten, die sämmtlich zum Nachtheile Leibnizens gemacht sind. Es ist in ganz neuester Zeit festgestellt, dass die Vorrede: Ad lectorem und die Recensio libri ein Werk Newton's sind, und es ist mehr als wahrscheinlich, dass auch die erste Ausgabe des Commercium epistolicum unter unmittelbarer Betheiligung Newton's veranstaltet wurde (s. u.).

In Deutschland trat Keiner auf, der nach dem Tode Leibnizens seine Rechte zu vertheidigen unternahm; Joh. Bernoulli, der ihm bei Lebzeiten getreu zur Seite stand, war ausser Stande, da Leibnizens Papiere ihm nicht zur Hand waren, und er konnte dem Streite nur eine solche Wendung geben, dass er die Ueberlegenheit der Leibnizischen Analysis den Engländern fühlbar machte, insofern er Probleme vorlegte, die sie nicht zu lösen vermochten *). Der eigentliche Streitpunkt, ob Leibniz als selbstständiger Erfinder zu betrachten sei oder ob er irgend etwas von Newton entlehnt habe, blieb unerledigt.

Endlich nach Verlauf eines Jahrhunderts unternahm es ein französischer Gelehrter, der gegenwärtige Nestor der französischen Mathematiker und Physiker, J. B. Biot, in dem Leben Newton's, das er für Michaud's „Biographie universelle" redigirte, die Streitfrage über den ersten Entdecker der Differentialrechnung nach den bis dahin gedruckten Aktenstücken einer neuen Prüfung zu unterwerfen, und es kann nicht geläugnet werden, der französische Gelehrte ist wacker für den deutschen Mathematiker in die Schranken getreten. Durch eine scharfe Analyse der Aktenstücke zeigte er, dass daraus nicht das Geringste, was gegen Leibniz spräche, gefolgert werden könnte; ausserdem aber behauptete er noch, dass die zweite Ausgabe des Commercium epistolicum, und besonders die Vorrede: Ad lectorem, so wie die „Recensio libri" unter unmittelbarer Theilnahme Newton's oder vielmehr von ihm selbst verfasst seien. Bald darauf, im Jahre 1831, erschien die Schrift: „The life of Sir Isaac Newton, by David Brewster", in welcher die Streitfrage ganz so entschieden wurde, wie es von Seiten der Herausgeber des „Commercium epistolicum" geschehen war; die Verdächtigungen Leibnizens wurden darin wiederholt und die Behauptungen Biot's in Bezug auf Newton's Betheiligung an der Redaction des Commercium epistolicum als unbegründet zurückgewiesen. Indess Biot, der einen grossen Theil seines langen Lebens auf das

*) Bossut, Geschichte der Mathematik, übers. von Reimer. Theil 2. S. 223. ff.

Studium der Arbeiten Newton's verwandt hat, hat nicht geruht, sich Gewissheit hinsichtlich seiner Behauptungen zu verschaffen; mit Hülfe der Herren Libri, der zur Zeit in London lebt, und de Morgan, der sich namentlich mit historisch-mathematischen Studien beschäftigt, ist es gelungen, das, was er behauptet, bis zur Evidenz zu beweisen. Newton ist der Verfasser der Vorrede: Ad lectorem, der Recensio libri und der Varianten in der zweiten Ausgabe des Commercium epistolicum; diese Thatsache hat Brewster nach Einsicht der Papiere Newton's, die sich gegenwärtig im Besitze der Grafen von Portsmouth befinden, in seinem grösseren Werke über Newton: „Memoirs of the life, writings, and discoveries of sir Isaac Newton, Edinburgh 1855. II. vol." bestätigt. — Um Alles das, was im Auslande über den in Rede stehenden Gegenstand geschehen ist, hier zusammenzustellen, bemerke ich noch Folgendes. Unbekannt mit den neuesten Arbeiten über Leibniz, die in den letzten Jahren in Deutschland erschienen sind, hat Biot in Verbindung mit seinem Schwiegersohne Lefort, Ingénieur en chef des ponts et des chaussées, eine Vergleichung der beiden Ausgaben des Commercium epistolicum und einen Wiederabdruck desselben, vermehrt mit neuen Aktenstücken, die unterdess veröffentlicht sind, veranstaltet. Das Werk ist in diesem Jahre erschienen. Aller Wahrscheinlichkeit nach wird es in Deutschland nicht sehr bekannt werden. Der Verfasser gegenwärtiger Zeilen, der während seines Aufenthaltes in Paris den Herren Biot und Lefort verschiedene Mittheilungen in Bezug auf Leibniz gemacht hat, hat von Seiten des französischen Ministeriums ein Exemplar zum Geschenk erhalten; es hat den Titel: „Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de Analysi promota, ou Correspondance de J. Collins et d'autres savants célèbres du XVII[e] siècle relative à l'Analyse supérieure, réimprimée sur l'édition originale de 1712 avec l'indication des variantes de l'édition de 1722, complétée par une collection de pièces justificatives et de documents, et publiée par J. B. Biot et F. Lefort, Paris 1856. 4."

Indess alle die Aktenstücke, die bisher die Grundlage zur Rechtfertigung Leibnizens bildeten, waren, wie schon bemerkt, aus den Händen seiner Gegner hervorgegangen; der Plan Leibnizens, dem Commercium epistolicum ein anderes mit Hülfe seiner Manuscripte entgegenzustellen, war durch seinen Tod vereitelt worden. Der direkte Beweis, dass Leibniz selbstständig die Entdeckung der höheren Analysis gemacht, fehlte noch immer. Der Verfasser dieser Zeilen hat die in der That riesige Arbeit nicht gescheut, die mathematischen Manuscripte Leibnizens,

die auf der Königlichen Bibliothek in Hannover in grösster Vollständigkeit und in demselben Zustande, in welchem man sie unmittelbar nach dem Tode Leibnizens dahin brachte, d. h. in der grössten Unordnung, wie er so oft erwähnt, aufbewahrt wurden, zu ordnen und einer genauen Prüfung zu unterwerfen, um nicht allein die Manuscripte herauszufinden, aus denen hervorgeht, wie Leibniz auf die höhere Analysis gekommen, sondern auch, um endlich einmal eine vollständige Ausgabe aller mathematischen Schriften Leibnizens, wie er es gewiss verdient, zu Stande zu bringen. Die Untersuchung der Leibnizischen Manuscripte ist insofern mit nicht unbedeutenden Schwierigkeiten verknüpft, als Leibniz die Gewohnheit hatte, jedes Wort, das er dachte, aufzuschreiben, wie es auch seine keineswegs zur Veröffentlichung bestimmten Manuscripte beweisen, die in den letzten Jahren an's Tageslicht gezogen worden, um sein Recht auf die selbstständige Entdeckung der höheren Analysis darzuthun. Dass demnach darin Vieles sich findet, was weggeblieben sein würde, wenn er sie zur Veröffentlichung ausgearbeitet hätte, liegt auf der Hand; zugleich ist aber auch ebenso klar, dass bei einer Beurtheilung derselben darauf nothwendig Rücksicht genommen werden muss. In Bezug auf Newton hat man sich, wie es scheint, wohl gehütet, ein Gleiches zu thun; es liegt zur Beurtheilung der Geschichte der Fluxionsrechnung nur das vor, was entweder Newton selbst veröffentlicht oder was fast vollständig ausgearbeitet und zur Veröffentlichung bestimmt unter seinen Papieren sich vorfand.

Zunächst sei es erlaubt, kurz zu bemerken, was unter „Entdeckung der höheren Analysis" zu verstehen ist. Ohnstreitig gebührt demjenigen die Ehre der Entdeckung, der einmal eine allgemein anwendbare Bezeichnung oder einen Algorithmus für den Begriff des Stetigen fand, um ihn in die Rechnung einführen zu können, und der zugleich zweitens die Rechnungsregeln aufstellte, welche diese Bezeichnung des Begriffs des Stetigen zur Folge hatte. Was das Erstere betrifft, so geht aus Leibnizens Manuscripten unbestritten hervor, und selbst eine Leibniz nicht gerade günstige Critik*) hat es zugestanden, dass Leibniz seinen Algorithmus, **auf den ja damals Alles ankam**, durchaus selbstständig und unabhängig fand. Hinsichtlich des Zweiten, der Aufstellung der Rechnungsregeln, hat dieselbe Critik nicht dargethan, wodurch Leibniz in der Erfindung derselben gefördert worden. Sie sind mithin ebenfalls sein Werk, und zwar hat er sie selbstständig gefunden. Woher hätte er sie

*) Dr. Weissenborn, Die Principien der höheren Analysis, S. 84 ff.

auch nehmen sollen? In Newton's „Analysis per aequationes numero terminorum infinitas" finden sich dergleichen nicht. — Es ist noch übrig, zu sehen, was Leibniz unter „Differential" verstanden hat, und in diesem Punkte ist die mehrfach genannte Critik gewaltig mit ihm umgesprungen. In das Einzelne einzugehen, ist hier nicht der Ort und würde zu weit führen; es sei nur bemerkt, dass einzelne Ausdrücke, die Leibniz gebraucht, dass er z. B. von Bewegung bei der Beschreibung von Curven spricht, oder dass er sich des Ausdruckes „incrementa momentanea" in seiner Abhandlung vom Jahre 1684 bedient, als ausreichend betrachtet werden, um darzuthun, dass Leibniz etwas von Newton's Schriften gekannt oder von Newton's Fluxionsrechnung gehört habe. Indess nirgends wird direkt gezeigt, wie dies möglich gewesen. Kurz, Leibnizens Schwanken in Bezug auf die Auffassung eines Differentials vom Jahre 1684 ab wird als genügend angesehen, dahin eine Entscheidung zu fällen, „dass sowohl die Möglichkeit, als auch ein gewisser Grad von Wahrscheinlichkeit vorhanden sei, Leibniz sei bei der Ausbildung seiner Methode durch die Kenntniss von Newton's Fluxionsrechnung, mochte er sie durch Tschirnhaus, aus Newton's Briefen oder sonst woher, denn der Möglichkeiten bleiben ja ausserdem viele, kennen gelernt haben, unterstützt worden." Was heisst das: Ausbildung seiner Methode? Leibniz hatte seine Methode im Jahre 1684 fertig ausgebildet und bis dahin wusste Niemand etwas von Fluxionsrechnung. Als Curiosum mag noch angeführt werden, dass Beweisstellen öfters aus Buffon's Vorrede zu seiner Uebersetzung von Newton's „Methodus fluxionum" beigebracht werden, obwohl in einer Note S. 106. gesagt wird, dass diese Vorrede den Charakter der Leidenschaftlichkeit und Gehässigkeit in hohem Grade an sich trägt *). Ferner wird in Bezug auf Barrow's Tangentenmethode erwähnt, „es möchte wenigstens wahrscheinlich sein, dass die darin entwickelte Methode des Unendlichkleinen nicht ohne Einfluss auf Leibnizens Theorie gewesen" (S. 70.), woran sich dann weiter der Schluss reiht (S. 71.): „es daher wohl gerechtfertigt erscheinen, wenn wir sagen, dass sich bei Barrow die Keime sowohl der Fluxionsrechnung, als der Leibnizischen Differentialrechnung finden; letztere freilich unentwickelter als die

*) Montucla nennt sie eine „Préface curieuse" und Bossut spricht darüber folgendermassen: En 1740, Buffon le traduisit en français, et mit à la tête une préface où Leibnitz est rabaissé avec un excès, un ton décisif, qui pourraient en imposer à quelques lecteurs, si la critique se réfutait d'elle-même par les erreurs dont elle fourmille.

der ersten Methode." Dabei wird aber das, was in der „Entdeckung der höheren Analysis" S. 48. von Seiten Leibnizens beigebracht worden ist, mit keiner Silbe erwähnt.

Im Interesse der Wahrheit sei schliesslich verstattet, noch Einiges zu erwähnen. Hr. Dr. W. entwickelt S. 25. seiner oben genannten Schrift die Grundbegriffe der Fluxionsrechnung. Hierbei macht er ein doppeltes Versehen, einmal dass er sagt, Newton habe die Zeitdauer $=0$ gesetzt, und zweitens dass er in der Note erwähnt, ich hätte die Incremente von x und y $=0$ gesetzt. Das doppelte Versehen besteht darin, dass Hr. Dr. W. den Buchstaben o für Null ansieht. Newton hat nirgends die Zeit $=0$ gesetzt, sondern sie stets als unitas betrachtet. Hr. Dr. W. entwickelt ferner den Begriff eines Moments nach der bekannten dynamischen Formel $s=ct$; dies stimmt aber durchaus nicht mit dem, was Newton selbst darüber sagt, und daher denn auch die Widersprüche zwischen Newton und Hrn. Dr. W.. Newton nennt ganz einfach das Increment für die Zeiteinheit „Moment" und bezeichnet es durch den Buchstaben o, daher denn auch der Ausdruck „incrementum momentaneum", und da die Incremente den Geschwindigkeiten proportional, so können an die Stelle der Incremente die Fluxionen gesetzt werden. Die Ansicht, dass die Fluxionsrechnung eine phoronomische Grundlage habe, ist demnach unbegründet; es ist lediglich der seit Archimedes in der Geometrie gebrauchte Begriff der Bewegung, dessen Newton sich hier bedient.

In der „Entdeckung der höheren Analysis" S. 38. habe ich gesagt, dass die Methode des Gregorius a S. Vincentio auf Bewegung beruht. Dies wird von Hrn. Dr. W. zurückgewiesen, und derselbe behauptet, dass der Grundzug der Methode des Gregorius Multiplication wäre. Das Werk des Gregorius: „Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni" ist mir gegenwärtig nicht zur Hand; ich sehe mich deshalb genöthigt, auf das zurückzugehen, was Kästner in seiner „Geschichte der Mathematik. Bd. 3. S. 221. ff." davon erwähnt. Der alte Herr hat zwar als Mathematiker zur Zeit keine grosse Autorität mehr, indess er referirt in seiner curiosen Weise, Geschichte der Mathematik zu schreiben, nach meiner Erfahrung genau. Da heisst es denn wörtlich S. 232: Siebentes Buch. Man stelle sich ein Rechteck vor, dessen Breite $=b$, Länge $=c$; an einer geraden Linie $=c$ sei eine willkührliche ebene Figur beschrieben; deren Ebene werde lothrecht auf des Rechteckes seine gesetzt, dass ihre Gränze $=c$ auf des Rechteckes Länge passt, und nun so sich selbst paral-

lel fortgeführt, so beschreibt sie einen Körper, dessen Grundfläche das Rechteck ist. Und auf S. 235.: Neunter Abschnitt (des siebenten Buchs). Praxis hujus libri, de planorum in se ductu seu multiplicatione.

XVIII.

Zur Logarithmenberechnung.

Von

Herrn *Taegert*,

Lehrer am Gymnasium zu Cöslin.

Die logarithmische Reihe

$$l(1\pm x)=\pm(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots)-\tfrac{1}{2}(x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\ldots),$$

wo $x<1$, gestattet eine leichte Berechnung, wenn für x ein möglichst kleiner Decimalbruch gesetzt wird; ist der Zähler desselben kleiner als 100, so findet man die Potenzen desselben bis zur neunten und theilweise noch weiter schon ausgerechnet im zweiten Bande der Vega'schen Tafeln (2te Ausgabe, die mir gerade vorliegt, Seite 140. und S. 150—153.); um die Glieder der obigen Reihe zu finden, bedarf es demnach nur der leichten Division durch die Zahlen 2, 3, 4, u. s. w. Die Reihen, welche gewöhnlich als zur Berechnung der natürlichen Logarithmen der ersten Primzahlen dienlich angegeben werden, z. B.

$$l2=2.\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\ldots\right)$$

oder

$$l2 = 2.\{2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} + \dots\right) + \frac{1}{17} + \frac{1}{3.17^3} + \frac{1}{5.17^5} + \dots\},$$

scheinen mir nicht recht geeignet, da die Berechnung der einzelnen Glieder oder eines Aggregates derselben Divisionen mit grösseren Zahlen verlangt, wodurch die Rechnung erschwert wird. Es scheint zweckmässig, auch für die Logarithmen dieser Zahlen Reihen anzugeben, in denen x ein kleiner Decimalbruch ist.

Begnügt man sich damit, die Logarithmen bis auf ihre 7te oder 10te Decimalstelle zu berechnen, so könnte man folgende Gleichungen mit Vortheil gebrauchen:

$$2l3 - l10 = l\left(\frac{9}{10}\right) = -\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{3.10^3} + \frac{1}{5.10^5} + \dots\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{2.10^4} + \frac{1}{3.10^6} + \dots\right),$$

$$4l3 - 3l2 - l10 = l\left(\frac{81}{80}\right) = l\left(1 + \frac{5^3}{10^4}\right) = +\left(\frac{5^3}{10^4} + \frac{5^9}{3.10^{12}} + \frac{5^{15}}{5.10^{20}} + \dots\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{5^6}{10^8} + \frac{5^{12}}{2.10^{16}} + \frac{5^{18}}{3.10^{24}} + \dots\right),$$

$$10l2 - 3l10 = l\left(1 + \frac{24}{10^3}\right) = +\left(\frac{24}{10^3} + \frac{24^3}{3.10^9} + \frac{24^5}{5.10^{15}} + \dots\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{24^2}{10^6} + \frac{24^4}{2.10^{12}} + \frac{24^6}{3.10^{18}} + \dots\right).$$

Aus diesen erhält man, wenn man die Reihen zur Rechten summirt, Ausdrücke für die Logarithmen von 2, 3, 5; die beiden ersten Reihen sind auch schon im Klügel'schen Wörterbuche zu diesem Behufe in Vorschlag gebracht worden. Dieselben, so wie die dritte, convergiren jedoch nicht sehr stark, und sind also wohl zu einer weiter gehenden Berechnung der Logarithmen nicht sehr zu empfehlen. Geeigneter wäre vielleicht folgendes System von Gleichungen:

$$\text{I. } \frac{3^2.11}{2^2.5^2} = 0{,}99; \quad \text{II. } \frac{11.2^2.71}{5^5} = 0{,}99968; \quad \text{III. } \frac{7.71}{2^2.5^3} = 0{,}994;$$

$$\text{IV. } \frac{53.19}{2^3.5^3} = 1{,}007; \quad \text{V. } \frac{3.7.19}{2^4.5^2} = 0{,}9975; \quad \text{VI. } \frac{3.17.37.53}{2^5.5^5} = 1{,}00011;$$

$$\text{VII. } \frac{3.7^2.17}{2^2.5^4} = 0{,}9996; \quad \text{VIII. } \frac{3.17}{7^2} = \frac{1{,}02}{0{,}98};$$

$$\text{IX } \frac{3^3.7.11.13.37}{2^6.5^6} = 0{,}999999; \quad \text{X. } \frac{7.11.13}{3^3.37} = \frac{1{,}001}{0{,}999}; \quad \text{XI. } \frac{2^4.3.13}{5^4} = 0{,}9984.$$

Drückt man diese Gleichungen logarithmisch aus und entwickelt die Logarithmen der Zahlen zur Rechten mit Hülfe der logarithmischen Reihe, indem:

$$l(\mathrm{I}) = l\left(1 - \frac{1}{10^2}\right) = -\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{3.10^6} + \frac{1}{5.10^{10}} + \dots\right)$$

$$- \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{10^4} + \frac{1}{2.10^8} + \frac{1}{3.10^{12}} + \dots\right), \text{ u. s. w.,}$$

$$l(\mathrm{VIII}) = 2\left(\frac{2}{10^2} + \frac{2^3}{3.10^6} + \frac{2^5}{5.10^{10}} + \dots\right); \quad l(\mathrm{X}) = 2\left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{3.10^9} + \frac{1}{5.10^{15}} + \dots\right)$$

ist, löst man ferner die 11 Gleichungen nach den Logarithmen der zur Linken stehenden 11 Primzahlen als unbekannten Grössen auf, so erhält man:

$$l2 = -16l(\mathrm{I}) + 4l(\mathrm{II}) - 4l(\mathrm{III}) + 22l(\mathrm{IV}) - 22l(\mathrm{V}) - 22l(\mathrm{VI}) + \tfrac{20}{3}l(\mathrm{VII})$$

$$+ \tfrac{15}{2}l(\mathrm{VIII}) + 17l(\mathrm{IX}) - 5l(\mathrm{X}) - 12l(\mathrm{XI}),$$

und leicht findet man:

$-16l(\mathrm{I})$	$= +0{,}1608053736$	$+4l(\mathrm{II})$	$= -0{,}0012802048$
$-4l(\mathrm{III})$	$= +0{,}0240722893$	$-22l(\mathrm{VI})$	$= -0{,}0024198669$
$+22l(\mathrm{IV})$	$= +0{,}1534635022$	$+\tfrac{20}{3}l(\mathrm{VII})$	$= -0{,}0058011603$
$-22l(\mathrm{V})$	$= +0{,}0550688648$	$+17l(\mathrm{IX})$	$= -0{,}0000170000$
$+\tfrac{15}{2}l(\mathrm{VIII})$	$= +0{,}3000400096$	$-5l(\mathrm{X})$	$= -0{,}0100000033$
$-12l(\mathrm{XI})$	$= +0{,}0192153764$		$-0{,}0195182354$
	$+0{,}7126654159$		
	$-0{,}0195182354$		
$l2$	$= +0{,}6931471805$		

Ferner ergiebt sich:

$$l5 = \tfrac{1}{4}\{7l2 + l(\mathrm{I}) - l(\mathrm{II}) + l(\mathrm{III}) - l(\mathrm{IV}) + l(\mathrm{V}) + l(\mathrm{VI}) - l(\mathrm{VII}) - \tfrac{1}{2}l(\mathrm{IX}) + \tfrac{1}{2}l(\mathrm{X})\},$$

woraus $l10$, und wenn man brigg'sche Logarithmen zu berechnen hat, der Modulus dieses Systems hergeleitet wird; ferner ist

$$l7 = \frac{l(\mathrm{VII}) - l(\mathrm{VIII})}{4} - \tfrac{1}{2}l2 + l10; \quad l3 = \tfrac{1}{4}\{l(\mathrm{I}) - l(\mathrm{II}) + l(\mathrm{III}) + 6l2 - l7\};$$

$$l11 = l(\mathrm{I}) + 2l10 - 2l3; \quad l13 = l(\mathrm{XI}) - l3 + 4l10 - 8l2; \text{ u. s. w.}$$

Die in Anwendung kommenden Reihen convergiren schon recht gut, und man könnte bequem mit Hülfe derselben die Logarithmen bis auf etwa 30 Decimalstellen berechnen. Doch hat man sich bekanntlich damit noch nicht begnügt und die Logarithmen bis zur 60sten Decimalstelle und darüber berechnet. In diesem Falle scheint es wünschenswerth, noch stärker convergirende Reihen zu besitzen, und die folgende Combination von Gleichungen, die in manchen Beziehungen vor der vorigen und ähnlichen den Vorzug verdient, scheint diesen Anforderungen zu genügen. Es ist:

$$3^3.7.23^2 = 10^5 - 19;\quad 3.5.23.29 = 10^4 + 5;\quad 3.5.11^2.19.29 = 10^6 + 65;$$

hieraus folgt:

$$1)\quad 19 = \frac{(10^6 + 65)\sqrt{10^5 - 19}}{11^2.(10^4 + 5)\sqrt{3^3.7}}.$$

Ferner ist:

$$3^4.5.13.19 = 10^5 + 35,$$
$$7.11.13 = 10^3 + 1;$$

dies giebt

$$2)\quad 19 = \frac{7.11.(10^5 + 35)}{3^4.5.(10^3 + 1)}.$$

Ferner:

$$2^4.7.19.47 = 10^5 + 16;\quad 5^2.23.37.47 = 10^6 - 75;\quad 3^3.37 = 10^3 - 1;$$
$$3^3.7.23^2 = 10^5 - 19,$$

woraus folgt:

$$3)\quad 19 = \frac{5^2.(10^3 - 1)(10^5 + 16)\sqrt{10^5 - 19}}{2^4.\sqrt{3^9.7^3}(10^6 - 75)}.$$

Ferner:

$$2^3.3^2.17.19.43 = 10^6 + 8;\quad 3.5^2.31.43 = 10^5 - 25;$$
$$2^9.3^2.7.31 = 10^6 - 64;\quad 2^2.3.7^2.17 = 10^4 - 4.$$

Dies giebt

$$4)\quad 19 = \frac{5^2.7.(10^6 + 8)(10^6 - 64)}{2^{10}.3^2.(10^5 - 25)(10^4 - 4)}.$$

Endlich ist:

$$3.11.157.193 = 10^6 - 67;\quad 3^3.19.101.193 = 10^7 - 91;$$
$$3^2.11.101 = 10^4 - 1;\quad 7^2.13.157 = 10^5 + 9;\quad 7.11.13 = 10^3 + 1.$$

Dies giebt

$$5)\quad 19=\frac{11^3.(10^7-91)(10^6+9)}{7(10^6-67)(10^3+1)(10^4-1)}.$$

Aus 1) und 2) folgt:

$$\frac{2^5.5^7.3^5}{7^3.11^6}=\frac{(1+\frac{5}{10^4})^3(1+\frac{35}{10^6})^2}{(1+\frac{1}{10^3})^2(1+\frac{65}{10^6})^2(1-\frac{19}{10^6})}=A;$$

aus 1) und 3):

$$\frac{2^4.3^3.7}{5^2.11^2}=\frac{(1-\frac{1}{10^3})(1+\frac{5}{10^4})(1+\frac{16}{10^6})}{(1-\frac{75}{10^6})(1+\frac{65}{10^6})}=B;$$

aus 2) und 4):

$$\frac{3^2.5^4}{2^9.11}=\frac{(1-\frac{4}{10^4})(1+\frac{35}{10^6})(1-\frac{25}{10^6})}{(1+\frac{1}{10^3})(1+\frac{8}{10^6})(1-\frac{64}{10^6})}=C;$$

aus 2) und 5):

$$\frac{2^3.5^2.7^2}{3^4.11^2}=\frac{(1-\frac{91}{10^7})(1+\frac{9}{10^6})}{(1-\frac{67}{10^6})(1-\frac{1}{10^4})(1+\frac{35}{10^6})}=D.$$

Endlich ist:

$$3^2.5^3.7.127=10^6+125;\quad 2.31.127^2=10^6-2;$$

$$2^9.3^2.7.31=10^6-64,$$

woraus folgt:

$$\frac{3^6.7^3}{2^4.5^6}=\frac{(1+\frac{5^3}{10^6})^2(1-\frac{64}{10^6})}{(1-\frac{2}{10^6})}=E.$$

Aus diesen fünf Gleichungen folgt:

$$2=\frac{A^{270}.D^{183}.E^{422}}{C^{242}.B^{622}};\quad 5^{90}=\frac{2^{209}.C^{18}.D^3.E^2}{B^{12}};\quad 3^6=\frac{5^{14}.B^2}{2^{23}.C^2.D};$$

$$7=\frac{3.5^{10}.B}{2^{28}.C^2};\quad 11=\frac{3^2.5^4}{2^9.C}$$

Drückt man diese Gleichungen logarithmisch aus, so ergeben sich, wenn man lA u. s. w. nach den obigen Ausdrücken mit Hülfe der logarithmischen Reihe berechnet, die Logarithmen der ersten fünf Primzahlen. Berechnet man dieselben bis zur 60sten Decimalstelle, so wird man bei keiner der obigen Reihen nöthig haben, mehr als höchstens 21 Glieder zu summiren; meist wird die Summation bis zum 16ten Gliede genügen. Einige der Reihen stimmen in ihren Gliedern ganz oder theilweise überein, wodurch die Rechnung natürlich nicht wenig erleichtert wird. Auf das leichteste ergiebt sich:

$$\begin{array}{rl} -822lB = & +0,2717804625 \\ -342lC = & +0,4253354016 \\ +422lE = & +0,0793285433 \\ \hline & +0,7764444074 \\ & -0,0832972269 \\ \hline l2 = & +0,6931471805. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} +270lA = & -0,0646247101 \\ +183lD = & -0,0186725168 \\ \hline & -0,0832972269 \end{array}$$

Sind die Logarithmen der ersten fünf Primzahlen berechnet, so erhält man mit Hülfe der schon summirten Reihen die Logarithmen der folgenden Primzahlen aus den Gleichungen:

$$13 = \frac{10^3+1}{7.11};\quad 17 = \frac{10^4-4}{2^3.3.7^2};\quad 19 = \frac{10^5+35}{3^4.5.13};\quad 23 = \sqrt{\frac{10^5-19}{3^3.7}};$$

$$29 = \frac{10^4+5}{3.5.23};\quad 31 = \frac{10^6-64}{2^9.3^2.7};\quad 37 = \frac{10^3-1}{3^3};$$

ferner:

$$43 = \frac{10^6-25}{3.5^2.31};\quad 47 = \frac{10^5+16}{2^4.7.19};\quad 101 = \frac{10^4-1}{3^2.11};\quad 127 = \sqrt{\frac{10^6-2}{2.31}};$$

$$157 = \frac{10^5+9}{7^2.13};\quad 193 = \frac{10^6-67}{3.11.157}.$$

Aber nicht allein für diese, sondern auch für die meisten anderen Primzahlen bis 1000 lassen sich Gleichungen aufstellen, aus denen sich die Logarithmen derselben vermittelst Reihen entwickeln lassen, die sich ähnlicher Vortheile erfreuen, wie die obigen, wie man aus Folgendem ersieht. Manche der neuen Reihen stimmen in ihren Gliedern unter einander oder mit den vorhergehenden ganz oder theilweise überein. Man wird ferner ersehen, dass man die Werthe von A, B u. s. w. auch noch anders hätte wählen können, und vielleicht entdeckt ein geübterer

Rechner manche vortheilhaftere Combination zur Berechnung der Logarithmen von 2, 3, 5 u. s. w. — Es ist:

$59.17.997 = 10^6 - 9$ und $\frac{59.17}{997} = \frac{1{,}003}{0{,}997}$, $53 = \frac{10^5+11}{3.17.37}$, $89 = \frac{10^6+4}{2^2.53^2}$,

$67 = \frac{10^7-49}{3.13.43.89}$, $41 = \frac{10^6-91}{2^2.7.13.67}$, $61 = \frac{10^4+4}{2^2.41}$ (man bedenke,

wie leicht $l(1+\frac{4}{10^4})$ aus den beiden Aggregaten der Reihe für

$l(1-\frac{4}{10^4})$ erhalten wird), $97 = \frac{10^6-27}{13^2.61}$, $71 = \frac{10^7-76}{2^2.3.17^2.73}$, $103 = \frac{10^4-9}{97}$,

$73 = \frac{10^6+27}{7.19.103}$, $79 = \frac{10^7-22}{2.3.17^2.73}$, $2^4.3.83.251 = 10^6 - 16$,

$$\frac{215}{3.83} = \frac{1{,}004}{0{,}996}.$$

Ferner ist:

$107 = \frac{10^6-85}{3.5.7.89}$, $109 = \frac{10^7+96}{2^5.47.61}$, $113 = \frac{10^5+5}{3.5.59}$, $131 = \frac{10^5-47}{7.109}$,

$137 = \frac{10^4+1}{73}$, $139 = \frac{10^6-34}{2.3.11.109} = \frac{10^4+8}{2^3.3^2}$, $149 = \frac{10^5-21}{11.61}$,

$151 = \frac{10^6-78}{2.7.11.43}$, $163 = \frac{10^4-57}{61}$, $2^2.3.167.499 = 10^6 - 4$,

$\frac{167.3}{499} = \frac{10^3+2}{10^3-2}$, $173 = \frac{10^5-6}{2.17^2}$, $179 = \frac{10^6+73}{37.151}$, $181 = \frac{10^6+25}{5^2.13.17}$,

$$191 = \frac{10^6+76}{2^2.7.11.17},\quad 197 = \frac{10^6-28}{2^2.3^3.47},\quad 199 = \frac{10^6-25}{3.5^2.67}.$$

$211 = \frac{10^5+14}{2.3.79}$, $223 = \frac{10^6-68}{2^2.19.59}$, $227 = \frac{10^4-12}{2^2.11}$, $449 = \frac{10^6-77}{17.131}$,

$397 = \frac{10^8-67}{3.11.17.449}$, $229 = \frac{10^6+43}{11.397}$, $233 = \frac{10^6+36}{2^2.29.37}$, $239 = \frac{10^5-98}{2.11.19}$,

$241 = \frac{10^5+15}{5.83}$, 251 siehe 83, $389 = \frac{10^7+23}{3.11.19.41}$, $257 = \frac{10^5-27}{389}$,

$809 = \frac{10^6-76}{2^2.3.103}$, $263 = \frac{10^7+59}{47.809}$, $269 = \frac{10^5+68}{2^2.3.31}$, $271 = \frac{10^5-1}{3^2.41}$,

$277 = \frac{10^5-3}{19^2}$, $281 = \frac{10^5+36}{2^2.89}$, $283 = \frac{10^7-295}{5.37.191}$, $293 = \frac{10^8+21}{11.19.23.71}$.

$$307=\frac{10^5+82}{2.163},\quad 311=\frac{10^7-106}{2.3.23.233},\quad 313=\frac{10^6+35}{3^2.5.71},\quad 317=\frac{10^6-182}{2.19.83},$$

$$331=\frac{10^6-49}{3.19.53},\quad 337=\frac{10^5+89}{3^3.11},\quad 347=\frac{10^5-64}{2^5.3^2},\quad 349=\frac{10^6-115}{3.5.191},$$

$$353=\frac{10^5-101}{283}=\frac{10^7+137}{3.7.19.71},\quad 359=\frac{10^6+174}{2.7.199},\quad 367=\frac{10^6+75}{5^2.109},$$

$$373=\frac{10^5-36}{2^2.67},\quad 379=\frac{10^5+56}{2^3.3.11},\quad 383=\frac{10^6+13}{7.373}.$$

$$409=\frac{10^6+5}{3.5.163},\quad 419=\frac{10^6+153}{7.11.31},\quad 421=\frac{10^6-5^3}{5^3.19},\quad 433=\frac{10^5+23}{3.7.11},$$

$$439=\frac{10^6+42}{2.17.67},\quad 443=\frac{10^6-149}{37.61},\quad 457=\frac{10^5+83}{3.73},\quad 461=\frac{10^6-91}{3^2.241},$$

$$463=\frac{10^5+8}{2^3.3^3},\quad 467=\frac{10^5-62}{2.107}=\frac{10^7-129}{7^2.19.23},\quad 479=\frac{10^6+152}{2^3.3^2.29}=\frac{10^8-128}{2^7.7.233},$$

$$487=\frac{10^6+298}{2.13.79},\quad 491=\frac{10^6+167}{3.7.97}=\frac{10^7-294}{2.17.599}.$$

$$503=\frac{10^6-36}{2^2.7.71},\quad 509=\frac{10^7-186}{2.11.19.47},\quad 521=\frac{10^7+74}{2.3.7.457},\quad 523=\frac{10^6-24}{2^3.239},$$

$$541=\frac{10^5+85}{5.37},\quad 547=\frac{10^6-84}{2^2.457},\quad 557=\frac{10^9-76}{2^2.3.7.11.29.67},\quad 563=\frac{10^7+6}{2.83.107},$$

$$569=\frac{10^7+175}{5^2.19.37},\quad 571=\frac{10^7-77}{83.211},\quad 577=\frac{10^7-13}{3.53.109},\quad 587=\frac{10^6+248}{2^3.3.71},$$

$$593=\frac{10^7-241}{3.7.11.73},\quad 599=\frac{10^5+33}{167}.$$

$$601=\frac{10^6+64}{2^7.13},\quad 607=\frac{10^8+215}{3^2.5.7.523},\quad 613=\frac{10^5-81}{163},\quad 617=\frac{10^5-46}{2.3^4},$$

$$619=\frac{10^7-55}{3^2.5.359},\quad 631=\frac{10^7+88}{2^3.7.283},\quad 641=\frac{10^5-4}{2^2.3.13},\quad 643=\frac{10^7-64}{2^6.3^5},$$

$$647=\frac{10^7+32}{2^5.3.7.23},\quad 653=\frac{10^7+42}{2.13.19.31},\quad 659=\frac{10^8-45}{5.11.31.89},\quad 661=\frac{10^6+93}{17.89},$$

$$673=\frac{10^7+107}{3^2.13.127},\quad 677=\frac{10^6-71}{7.211},\quad 683=\frac{10^6-89}{2^3.3.61},\quad 691=\frac{10^7+152}{2^3.3^2.201}.$$

$$701=\frac{10^7-235}{3^2.5.317},\quad 709=\frac{10^5-31}{3.47}=\frac{10^8+196}{2^2.3.7.11.131},\quad 719=\frac{10^8-42}{2.197.353},$$

$$727=\frac{10^7-115}{3.5.7.131},\quad 733=\frac{10^7-414}{2.19.359},\quad 739=\frac{10^7+148}{2^2.17.199},\quad 743=\frac{10^6+78}{2.673},$$

$$751=\frac{10^8-595}{3^2.5.11.269},\quad 757=\frac{10^5-76}{2^2.3.11},\quad 761=\frac{10^6-46}{2.3^2.73},\quad 769=\frac{10^4-3}{13},$$

$$773=\frac{10^7+301}{17.761},\quad 787=\frac{10^5-51}{127},\quad 797=\frac{10^9-115}{3.5.233.359}.$$

$$811=\frac{10^6-37}{3^2.139},\quad 821=\frac{10^6-22}{2.3.7.29},\quad 823=\frac{10^6-55}{3^5.5},\quad 827=\frac{10^6-257}{3.403},$$

$$829=\frac{10^7-602}{2.37.163},\quad 839=\frac{10^6+88}{2^3.149},\quad 853=\frac{10^8+602}{2.3^3.13.167},\quad 857=\frac{10^6+119}{3.389},$$

$$859=\frac{10^6-124}{2^2.3.97},\quad 863=\frac{10^8+125}{3^2.5^3.103},\quad 877=\frac{10^5-22}{2.3.19},\quad 881=\frac{10^6-65}{5.227},$$

$$883=\frac{10^7-25}{3.5^2.151},\quad 887=\frac{10^8-507}{11.37.277}.$$

$$907=\frac{10^7-325}{3^2.5^2.7^2},\quad 911=\frac{10^8-441}{11.17.587},\quad 919=\frac{10^6-128}{2^6.17}=\frac{10^7-371}{3^3.403},$$

$$929=\frac{10^7-244}{2^2.3^2.299},\quad 937=\frac{10^7-436}{2^4.23.29},\quad 941=\frac{10^6-658}{2.3^2.59},\quad 947=\frac{10^6+32}{2^5.3.11},$$

$$953=\frac{10^5+65}{3.5.7},\quad 967=\frac{10^6-122}{2.11.47},\quad 971=\frac{10^5+13}{103},\quad 977=\frac{10^7-405}{5.23.89},$$

$$983=\frac{10^6-289}{3^2.113},\quad 991=\frac{10^6-81}{1009},\quad \frac{1009}{991}=\frac{1,009}{0,991}.$$

Ungefähr drei Viertel von der Anzahl dieser Gleichungen ergeben logarithmische Reihen, in denen x kleiner als 100 ist, aber auch die aus den übrigen hervorgehenden sind nicht allzuschwer zu summiren. Mit Hülfe einer grösseren Factorentafel, als mir zu Gebote stand, liessen sich auch wohl noch vortheilhaftere Gleichungen finden. Nach meiner Ansicht scheint man sich der obigen oder ähnlicher bei Berechnung eines logarithmischen Systems mit Vortheil bedienen zu können; es ist mir unbekannt, ob es in solchem Umfange bereits geschehen ist, und diese Unkenntniss möge die Mittheilung obiger Kleinigkeiten entschuldigen *). Auch

---

*) Nachdem mir nachträglich Sherwins Mathematical Tables von 1742 zu Gesichte gekommen, habe ich auf Seite 28 et seq. die

für manche der folgenden Primzahlen lassen sich ähnliche Gleichungen aufstellen, z. B. $1657 = \frac{10^7 - 5}{5.17.71}$ u. s. w., die einer weiteren Mittheilung nicht bedürfen, da sie sich leicht finden lassen (die obige Zusammenstellung hat allein den Zweck, den Gang der Rechnung zu zeigen). Folgt man übrigens bei der Logarithmen-Berechnung der gewöhnlichen Methode, so gestaltet sich die Rechnung immer leichter, je weiter man in der Reihe der Primzahlen fortschreitet, namentlich wenn man folgende Reihe benutzt:

$$l(x+8) = 2l(x+7) - l(x+5) - l(x+3)$$

$$+ 2lx - l(x-3) - l(x-5) + 2l(x-7) - l(x-8)$$

$$-2\left\{\frac{7200}{x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 7200} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{7200}{x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 7200}\right)^3 + \ldots\right\},$$

welche man in dem Programme des k. k. Gymnasiums in Marburg vom Jahre 1853, geschrieben vom Herrn Prof. J. E. Streinz, findet; ist x grösser als 1000, so braucht man nur die ersten beiden Glieder der Reihe zu summiren, um den Logarithmus fast bis zur 70sten Decimalstelle genau zu finden; freilich kostet die Berechnung der beiden Glieder einige Mühe. Welche Methode vorzuziehen sei, würde die Praxis zu entscheiden haben; eine wie leichte Rechnung die obige oft gewährt, möge noch folgendes Beispiel zeigen. Es ist:

$$l563 + l83 + l107 - 6l2 - 7l5 = +\left\{\frac{6}{10^7} + \frac{6^3}{3.10^{21}} + \frac{6^5}{5.10^{35}} + \ldots\right\}$$

$$-\tfrac{1}{2}\left\{\frac{6^2}{10^{14}} + \frac{6^4}{2.10^{28}} + \frac{6^6}{3.10^{42}} + \ldots\right\} = A - \tfrac{1}{2}B,$$

woraus sich augenblicklich ergiebt:

Grundzüge dieser Methode, als von Wallis herrührend, mitgetheilt gefunden, auch sind daselbst einige der oben gebrauchten Gleichungen in Anwendung gebracht. Die Methode wird dem Berechner eines logarithmischen Systemes als sehr zweckmässig, wenigstens in manchen Fällen, empfohlen, die weitere Ausführung und Anwendung auf die Logarithmen der einzelnen Primzahlen bleibt ihm überlassen. Die daselbst gegebenen Notizen verdienten auch wohl in den neueren Schriften logarithmotechnischen Inhaltes einen Platz.

$A=$	0,000000	600000	000000	072000	000000	015552	000000	003999 686
$+6l2=$	4,158883	083359	671856	503392	728749	059408	453000	806160
$+7l5=$	11,266065	387038	702622	205315	332583	313476	679209	479883
	+15,424949	070398	374478	780708	061332	388437	132210	290042
$-\frac{1}{2}B=$	−0,000000	000000	180000	000000	032400	000000	007776	000000
$-l83=$	−4,418840	607796	597923	475472	223291	370453	029313	056663
$-l107=$	−4,672828	834461	906173	304398	817023	277001	563146	276131
	−9,091669	442258	684096	779871	072714	647454	600235	332794
$l563=$	6,333279	628139	690382	000836	988617	740982	531974	957248

Nur um zwei Einheiten der letzten Decimalstelle ist dies Resultat von dem Wolframmschen verschieden. Mit Hülfe der Grösse $-(A+\frac{1}{2}B)$ findet man nun noch, wie auch in allen sonstigen Fällen, einen zweiten Logarithmus.

XIX.

Ueber den Flächeninhalt loxodromischer Dreiecke auf der Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstandenen Sphäroids.

Von
dem Herausgeber.

In der Abhandlung Thl. XVI. Nr. II. habe ich eine Reihe merkwürdiger Sätze von auf der Oberfläche eines elliptischen Rotations-Sphäroids und auf der Oberfläche einer Kugel liegenden, durch loxodromische Linien gebildeten Dreiecken bewiesen, und unter Beschränkung auf die Kugelfläche auch von dem Flächeninhalte solcher Dreiecke gehandelt, was mich gleichfalls zu mehreren Relationen und Gleichungen geführt hat, die ich für sehr merkwürdig zu halten geneigt bin. Rücksichtlich des Flächeninhalts loxodromischer Dreiecke auf der Oberfläche eines elliptischen Rotations-Sphäroids, mit der kleinen Axe der erzeugenden Ellipse als Drehungsaxe, ist am Schlusse der genannten Abhandlung auf eine späterhin im Archiv zu veröffentlichende Arbeit verwiesen worden, ein Versprechen, welchem ich bis jetzt noch nicht nachgekommen bin. Ich werde aber nun dieses Versprechen um so lieber erfüllen, weil so eben in Paris bei Herrn Mallet-Bachelier eine mit Anwendungen auf die Navigation versehene Uebersetzung meiner im Jahre 1849 erschienenen „Loxodromischen Trigonometrie“ gedruckt wird, die einen der ausgezeichnetsten Professeurs d'Hydrographie in Frankreich, Herrn Paul Terquem in Dünkirchen, den Sohn des allen Lesern des Archivs bekannten, um die Wissenschaft und den Unterricht in derselben so hochverdienten Herausgebers der Nouvelles Annales de Mathématiques, Herrn Olry Terquem in Paris, zum Verfasser hat. So viel ich weiss, beabsichtigte Herr P. Terquem auch

die Sätze über den Flächeninhalt loxodromischer Dreiecke auf der Kugel in seine Uebersetzung, welcher er durch die beigefügten Anwendungen auf die Navigation jedenfalls einen ganz besonderen selbstständigen wissenschaftlichen und praktischen Werth verleihen wird, aufzunehmen, was mich zu der Hoffnung berechtigt, dass die folgenden allgemeineren Untersuchungen über den Flächeninhalt loxodromischer Dreiecke für ihn und andere Leser des Archivs nicht ganz ohne Interesse sein werden, wenn auch die durch diese Untersuchungen gewonnenen Resultate sich, wie es in der Natur der Sache liegt, nicht derselben Einfachheit und Eleganz erfreuen, wie die für den besonderen Fall der Kugel geltenden Sätze, und sich schon deshalb weniger zur Aufnahme in die von Herrn P. Terquem zu meiner grossen Freude im Interesse der Wissenschaft und der Praxis unternommene Bearbeitung meiner Schrift geeignet haben würden.

I.

Wenn wir die grosse und kleine Halbaxe der erzeugenden Ellipse, die kleine Axe als Drehungs- und zugleich als Axe der x angenommen, wie gewöhnlich durch a und b bezeichnen, und der Kürze wegen

$$k^2=\frac{b^4}{a^2-b^2}$$

setzen, so ist der Flächeninhalt einer vom Aequator an gerechneten, der aus dem Mittelpunkte als Anfang genommenen Abscisse x entsprechenden Zone Z der Oberfläche des entstandenen elliptischen Sphäroids bekanntlich in der Formel

$$Z=\frac{a\pi x}{k}\sqrt{k^2+x^2}+a\pi k\,\mathrm{l}\,\frac{x+\sqrt{k^2+x^2}}{k}$$

ausgedrückt *). Bezeichnet nun B die Breite des die Zone Z begränzenden Parallelkreises, nämlich den Neigungswinkel der diesem Parallelkreise entsprechenden Normale gegen die Ebene des Aequators, so ist nach der Lehre von der Ellipse

$$\tang B=\frac{a^2x}{b^2y},$$

und folglich, weil

---

*) M. s. z. B. meinen „Leitfaden für den ersten Unterricht in der höheren Analysis. Leipzig. 1838. S. 215.“

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2=1,\ \text{also}\ y=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}$$

ist:

$$\operatorname{tang} B^2=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{x^2}{b^2-x^2},$$

woraus sogleich

$$x^2=\frac{b^4\operatorname{tang} B^2}{a^2+b^2\operatorname{tang} B^2}=\frac{b^4\sin B^2}{a^2\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin B^2\right)},$$

oder, wenn der Kürze wegen wie gewöhnlich

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

gesetzt wird,

$$x^2=\frac{b^4\sin B^2}{a^2(1-e^2\sin B^2)}$$

folgt. Führt man den hieraus sich ergebenden Werth von x in den obigen Ausdruck von Z ein und bemerkt dabei, dass

$$k^2=\frac{b^4}{a^2-b^2}=\frac{b^4}{a^2e^2}$$

ist, so erhält man nach leichter Rechnung für die Zone Z den folgenden Ausdruck:

$$Z=\pi b^2\left\{\frac{\sin B}{1-e^2\sin B^2}+\frac{1}{2e}\,\mathrm{l}\,\frac{1+e\sin B}{1-e\sin B}\right\}.$$

Den Flächeninhalt der halben Oberfläche des Sphäroids erhält man hieraus, wenn man $B=90^0$ setzt, nämlich:

$$\pi b^2\left\{\frac{1}{1-e^2}+\frac{1}{2e}\,\mathrm{l}\,\frac{1+e}{1-e}\right\}.$$

Bezeichnen wir jetzt den Flächeninhalt der, der Breite B entsprechenden Calotte durch K, und bemerken, dass im Vorhergehenden B stillschweigend als positiv vorausgesetzt worden ist, so ist, wenn wir im Folgenden das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem die Calotte kleiner oder grösser als die halbe Oberfläche des Sphäroids ist, offenbar

$$\begin{aligned}K= &\ \pi b^2\left\{\frac{1}{1-e^2}+\frac{1}{2e}\,\mathrm{l}\,\frac{1+e}{1-e}\right\}\\ &\mp\pi b^2\left\{\frac{\sin B}{1-e^2\sin B^2}+\frac{1}{2e}\,\mathrm{l}\,\frac{1+e\sin B}{1-e\sin B}\right\},\end{aligned}$$

also, wie leicht erhellet,

$$K = \pi b^2 \left\{ \frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{2e} l \frac{1+e}{1-e} \right\}$$

$$- \pi b^2 \left\{ \frac{\sin(\pm B)}{1 - e^2 \sin(\pm B)^2} + \frac{1}{2e} l \frac{1+e\sin(\pm B)}{1-e\sin(\pm B)} \right\};$$

folglich, wenn man jetzt, wie gewöhnlich, die Breite B für die nördliche Hälfte des Ellipsoids, welches wir von jetzt an immer als die Erde betrachten wollen, positiv, für die südliche Hälfte negativ nimmt, in völliger Allgemeinheit:

$$K = \pi b^2 \left\{ \frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{2e} l \frac{1+e}{1-e} \right\}$$

$$- \pi b^2 \left\{ \frac{\sin B}{1 - e^2 \sin B^2} + \frac{1}{2e} l \frac{1+e\sin B}{1-e\sin B} \right\},$$

woraus nach einigen leichten Verwandlungen

$$K = \pi b^2 \left\{ \frac{(1-\sin B)(1+e^2 \sin B)}{(1-e^2)(1-e^2\sin B^2)} + \frac{1}{2e} l \frac{(1+e)(1-e\sin B)}{(1-e)(1+e\sin B)} \right\}$$

oder

$$K = \pi b^2 \left\{ \frac{2\sin(45^0 - \frac{1}{2}B)^2 (1+e^2 \sin B)}{(1-e^2)(1-e^2\sin B^2)} + \frac{1}{2e} l \frac{(1+e)(1-e\sin B)}{(1-e)(1+e\sin B)} \right\}$$

erhalten wird.

II.

Auf der Oberfläche der Erde denken wir uns jetzt ein Dreieck, dessen eine Spitze im Nordpole liegt und das von zwei Meridianbogen und der, deren Endpunkte verbindenden loxodromischen Linie begränzt wird. Den Flächeninhalt dieses Dreiecks bezeichnen wir durch S. Sind nun ω und $\bar{\omega}$ die Länge und Breite des Endpunkts (in dem Sinne der Richtung genommen, nach welcher die Längen gezählt werden) der das in Rede stehende Dreieck zum Theil begränzenden loxodromischen Linie, so erhellet mittelst einer einfachen Betrachtung nach I., und mit Rücksicht darauf, dass nach meiner „Loxodromischen Trigonometrie. S. 15.“ der Krümmungshalbmesser für die Breite $\bar{\omega}$

$$\frac{b^2}{a}(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{b^2}{a(1-e^2\sin\bar{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und, wie leicht aus I. geschlossen wird, der Halbmesser des derselben Breite entsprechenden Parallelkreises

$$\frac{a\cos\overline{\omega}}{\sqrt{1-e^2\sin\overline{\omega}^2}}$$

ist, sehr leicht, dass in völliger Allgemeinheit, mit desto grösserer Genauigkeit, je näher $\Delta\omega$ und $\Delta\overline{\omega}$ der Null kommen:

$$\Delta S = \pi b^2 \left\{ \frac{(1-\sin\overline{\omega})(1+e^2\sin\overline{\omega})}{(1-e^2)(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)} + \frac{1}{2e}\,\mathrm{l}\frac{(1+e)(1-e\sin\overline{\omega})}{(1-e)(1+e\sin\overline{\omega})} \right\} \cdot \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$
$$-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a\cos\overline{\omega}}{\sqrt{1-e^2\sin\overline{\omega}^2}}\Delta\omega\cdot\frac{b^2}{a(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}}\Delta\overline{\omega}$$

oder

$$\Delta S = \tfrac{1}{2}b^2 \left\{ \frac{(1-\sin\overline{\omega})(1+e^2\sin\overline{\omega})}{(1-e^2)(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)} + \frac{1}{2e}\,\mathrm{l}\frac{(1+e)(1-e\sin\overline{\omega})}{(1-e)(1+e\sin\overline{\omega})} \right\} \Delta\omega$$
$$-\frac{b^2\cos\overline{\omega}\Delta\omega\Delta\overline{\omega}}{2(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^2},$$

oder

$$\frac{\Delta S}{\Delta\overline{\omega}} = \tfrac{1}{2}b^2 \left\{ \frac{(1-\sin\overline{\omega})(1+e^2\sin\overline{\omega})}{(1-e^2)(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)} + \frac{1}{2e}\,\mathrm{l}\frac{(1+e)(1-e\sin\overline{\omega})}{(1-e)(1+e\sin\overline{\omega})} \right\} \frac{\Delta\omega}{\Delta\overline{\omega}}$$
$$-\frac{b^2\cos\overline{\omega}}{2(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^2}\Delta\omega$$

ist. Lässt man nun $\Delta\overline{\omega}$, und also auch das davon abhängende $\Delta\omega$, sich der Null nähern, und geht in vorstehender Gleichung zu den Gränzen über, so erhält man die folgende völlig genaue Gleichung:

$$\frac{\partial S}{\partial\overline{\omega}} = \tfrac{1}{2}b^2 \left\{ \frac{(1-\sin\overline{\omega})(1+e^2\sin\overline{\omega})}{(1-e^2)(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)} + \frac{1}{2e}\,\mathrm{l}\frac{(1+e)(1-e\sin\overline{\omega})}{(1-e)(1+e\sin\overline{\omega})} \right\} \frac{\partial\omega}{\partial\overline{\omega}}$$

oder

$$\partial S = \tfrac{1}{2}b^2 \left\{ \frac{(1-\sin\overline{\omega})(1+e^2\sin\overline{\omega})}{(1-e^2)(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)} + \frac{1}{2e}\,\mathrm{l}\frac{(1+e)(1-e\sin\overline{\omega})}{(1-e)(1+e\sin\overline{\omega})} \right\} \partial\omega,$$

also, weil nach meiner „Loxodromischen Trigonometrie. S. 28.“, wenn Θ den Curs bezeichnet,

$$\partial\omega = \frac{(1-e^2)\tan\Theta\,\partial\overline{\omega}}{\cos\overline{\omega}(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)}$$

ist:

$$\partial S = \tfrac{1}{2}b^2 \operatorname{tang}\Theta \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{(1-\sin\overline{\omega})(1+e^2\sin\overline{\omega})}{\cos\overline{\omega}(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)^2} \\ + \dfrac{1-e^2}{2e\cos\overline{\omega}(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)} \, l\dfrac{(1+e)(1-e\sin\overline{\omega})}{(1-e)(1+e\sin\overline{\omega})} \end{array} \right\} \partial\overline{\omega},$$

welches Differential wir nun zu integriren versuchen müssen.

III.

Setzen wir zu dem Ende $u = \sin\overline{\omega}$, also $\partial u = \cos\overline{\omega}\partial\overline{\omega}$, so ist

$$\frac{\partial\overline{\omega}}{\cos\overline{\omega}} = \frac{\partial u}{\cos\overline{\omega}^2} = \frac{\partial u}{1-u^2},$$

und folglich nach II., wie man sogleich übersieht:

$$\partial S = \tfrac{1}{2}b^2 \operatorname{tang}\Theta \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{(1+e^2u)\partial u}{(1+u)(1-e^2u^2)^2} \\ + \dfrac{(1-e^2)\partial u}{2e(1-u^2)(1-e^2u^2)} \, l\dfrac{(1+e)(1-eu)}{(1-e)(1+eu)} \end{array} \right\}$$

oder

$$\partial S = \tfrac{1}{2}b^2 \operatorname{tang}\Theta \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{(1+e^2u)\partial u}{(1+u)(1-e^2u^2)^2} + \dfrac{1-e^2}{2e} \, l\dfrac{1+e}{1-e} \cdot \dfrac{\partial u}{(1-u^2)(1-e^2u^2)} \\ + \dfrac{1-e^2}{2e} \cdot \dfrac{\partial u}{(1-u^2)(1-e^2u^2)} \, l\dfrac{1-eu}{1+eu} \end{array} \right\},$$

so dass es also nur auf die Entwickelung der drei Integrale

$$\int \frac{(1+e^2u)\partial u}{(1+u)(1-e^2u^2)^2}, \quad \int \frac{\partial u}{(1-u^2)(1-e^2u^2)},$$

$$\int \frac{\partial u}{(1-u^2)(1-e^2u^2)} \, l\frac{1-eu}{1+eu}$$

ankommt.

Wir wollen uns zuerst mit dem Integrale

$$\int \frac{\partial u}{(1-u^2)(1-e^2u^2)},$$

welches die leichteste Entwickelung gestattet, beschäftigen. Weil

$$\frac{1}{(1-u^2)(1-e^2u^2)} = \frac{1}{e^2(u-1)(u+1)(u-\frac{1}{e})(u+\frac{1}{e})}$$

ist, so giebt die Zerlegung in Partialbrüche nach den bekannten Methoden:

$$\frac{1}{(1-u^2)(1-e^2u^2)}=\frac{1}{2(1-e^2}\left\{-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}+\frac{e}{u-\frac{1}{e}}-\frac{e}{u+\frac{1}{e}}\right\}$$

oder

$$\frac{1}{(1-u^2)(1-e^2u^2)}=\frac{1}{2(1-e^2)}\left\{\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}-\frac{e^2}{1-eu}-\frac{e^2}{1+eu}\right\},$$

also

$$\int\frac{\partial u}{(1-u^2)(1-e^2u^2)}$$

$$=\frac{1}{2(1-e^2)}\left\{\int\frac{\partial u}{1-u}+\int\frac{\partial u}{1+u}-e^2\int\frac{\partial u}{1-eu}-e^2\int\frac{\partial u}{1+eu}\right\},$$

also nach einer allgemein bekannten Elementar-Formel der Integralrechnung:

$$\int\frac{\partial u}{(1-u^2)(1-e^2u^2)}=\frac{1}{2(1-e^2)}\{l\frac{1+u}{1-u}+el\frac{1-eu}{1+eu}\}.$$

Um ferner das Integral

$$\int\frac{(1+e^2u)\,\partial u}{(1+u)(1-e^2u^2)^2}$$

zu entwickeln, setzen wir

$$\frac{1+e^2u}{(1+u)(1-e^2u^2)^2}=\frac{1+e^2u}{e^4(u+1)(u-\frac{1}{e})^2(u+\frac{1}{e})^2},$$

und erhalten nun durch Zerlegung in Partialbrüche nach den gewöhnlichen Methoden:

$$\frac{1+e^2u}{(1+u)(1-e^2u^2)^2}$$

$$=\frac{1}{(1-e^2)(1+u)}+\frac{e}{4(1-eu)^2}+\frac{e}{2(1+e)(1-eu)}-\frac{e}{4(1+eu)^2}$$

$$-\frac{e}{2(1-e)(1+eu)},$$

also

$$\int\frac{(1+e^2u)\partial u}{(1+u)(1-e^2u^2)^2}$$

$$=\frac{1}{1-e^2}\int\frac{\partial u}{1+u}+\frac{e}{4}\int\frac{\partial u}{(1-eu)^2}+\frac{e}{2(1+e)}\int\frac{\partial u}{1-eu}$$

$$-\frac{e}{4}\int\frac{\partial u}{(1+eu)^2}-\frac{e}{2(1-e)}\int\frac{\partial u}{1+eu},$$

also nach allgemein bekannten Integralformeln:

$$\int\frac{(1+e^2u)\partial u}{(1+u)(1-e^2u^2)^2}$$

$$=\frac{l(1+u)}{1-e^2}+\frac{1}{4(1-eu)}-\frac{l(1-eu)}{2(1+e)}+\frac{1}{4(1+eu)}-\frac{l(1+eu)}{2(1-e)}$$

oder

$$\int\frac{(1+e^2u)\partial u}{(1+u)(1-e^2u^2)^2}$$

$$=\frac{1}{2(1-e^2u^2)}+\frac{l(1+u)}{1-e^2}-\frac{(1-e)l(1-eu)+(1+e)l(1+eu)}{2(1-e^2)},$$

oder auch

$$\int\frac{(1+e^2u)\partial u}{(1+u)(1-e^2u^2)^2}$$

$$=\frac{1}{2(1-e^2u^2)}+\frac{l(1+u)}{1-e^2}-\frac{l.(1-eu)^{1-e}(1+eu)^{1+e}}{2(1-e^2)},$$

oder auch

$$\int\frac{(1+e^2u)\partial u}{(1+u)(1-e^2u^2)^2}$$

$$=\frac{1}{2(1-e^2u^2)}+\frac{1}{2(1-e^2)}\,l\left\{\frac{(1+u)^2}{(1-eu)^{1-e}(1+eu)^{1+e}}\right\};$$

oder auch, wie man leicht findet:

$$\int\frac{(1+e^2u)\partial u}{(1+u)(1-e^2u^2)^2}$$

$$=\frac{1}{2(1-e^2u^2)}+\frac{l(1+u)}{1-e^2}-\frac{l(1-e^2u^2)-e\,l\dfrac{1-eu}{1+eu}}{2(1-e^2)}$$

$$=\frac{1}{2(1-e^2u^2)}+\frac{l\sqrt{\dfrac{1-u^2}{1-e^2u^2}}}{1-e^2}+\frac{l\dfrac{1+u}{1-u}+e\,l\dfrac{1-eu}{1+eu}}{2(1-e^2)}.$$

Wenden wir uns jetzt endlich zu dem Integrale

$$\int \frac{\partial u}{(1-u^2)(1-e^2u^2)}\,\mathrm{l}\,\frac{1-eu}{1+eu},$$

so ist nach dem Obigen offenbar:

$$\int \frac{\partial u}{(1-u^2)(1-e^2u^2)}\,\mathrm{l}\,\frac{1-eu}{1+eu}$$

$$=\frac{1}{2(1-e^2)}\left\{\begin{array}{c}\int\frac{\mathrm{l}(1-eu)}{1-u}\partial u+\int\frac{\mathrm{l}(1-eu)}{1+u}\partial u-e^2\int\frac{\mathrm{l}(1-eu)}{1-eu}\partial u\\ -e^2\int\frac{\mathrm{l}(1-eu)}{1+eu}\partial u-\int\frac{\mathrm{l}(1+eu)}{1-u}\partial u-\int\frac{\mathrm{l}(1+eu)}{1+u}\partial u\\ +e^2\int\frac{\mathrm{l}(1+eu)}{1-eu}\partial u+e^2\int\frac{\mathrm{l}(1+eu)}{1+eu}\partial u\end{array}\right\}.$$

Allgemein ist aber, wie man sich sogleich durch Differentiation überzeugt:

$$b\int\frac{\mathrm{l}(\alpha+\beta x)}{a+bx}\partial x+\beta\int\frac{\mathrm{l}(a+bx)}{\alpha+\beta x}\partial x=\mathrm{l}(a+bx)\,.\,\mathrm{l}(\alpha+\beta x),$$

also

$$e\int\frac{\mathrm{l}(1-eu)}{1+eu}\partial u-e\int\frac{\mathrm{l}(1+eu)}{1-eu}\partial u=\mathrm{l}(1+eu)\,.\,\mathrm{l}(1-eu),$$

folglich

$$e^2\int\frac{\mathrm{l}(1+eu)}{1-eu}\partial u-e^2\int\frac{\mathrm{l}(1-eu)}{1+eu}\partial u=-e\,\mathrm{l}(1+eu)\,.\,\mathrm{l}(1-eu);$$

und ferner

$$\int\frac{\mathrm{l}(1-eu)}{1-eu}\partial u=-\frac{1}{e}\int\mathrm{l}(1-eu)\,\partial\,\mathrm{l}(1-eu)=-\frac{1}{2e}\{\mathrm{l}(1-eu)\}^2,$$

$$\int\frac{\mathrm{l}(1+eu)}{1+eu}\partial u=\frac{1}{e}\int\mathrm{l}(1+eu)\,\partial\,\mathrm{l}(1+eu)=\frac{1}{2e}\{\mathrm{l}(1+eu)\}^2;$$

also

$$e^2\int\frac{\mathrm{l}(1+eu)}{1+eu}\partial u-e^2\int\frac{\mathrm{l}(1-eu)}{1-eu}\partial u=\frac{e}{2}\{\mathrm{l}(1+eu)\}^2+\frac{e}{2}\{\mathrm{l}(1-eu)\}^2;$$

folglich, wenn man dies mit dem Vorhergehenden zusammennimmt:

$$-e^3\int\frac{\mathrm{l}(1-eu)}{1-eu}\partial u-e^3\int\frac{\mathrm{l}(1-eu)}{1+eu}\partial u+e^3\int\frac{\mathrm{l}(1+eu)}{1-eu}\partial u+e^3\int\frac{\mathrm{l}(1+eu)}{1+eu}\partial u$$

$$=\frac{e}{2}\{\mathrm{l}(1+eu)\}^2+\frac{e}{2}\{\mathrm{l}(1-eu)\}^2-e\mathrm{l}(1+eu).\mathrm{l}(1-eu)$$

$$=\frac{e}{2}\{\mathrm{l}\frac{1+eu}{1-eu}\}^2=\frac{e}{2}\{\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}\}^2.$$

Endlich ist

$$\int\frac{\mathrm{l}(1-eu)}{1-u}\partial u+\int\frac{\mathrm{l}(1-eu)}{1+u}\partial u-\int\frac{\mathrm{l}(1+eu)}{1-u}\partial u-\int\frac{\mathrm{l}(1+eu)}{1+u}\partial u$$

$$=2\int\frac{\mathrm{l}(1-eu)}{1-u^2}\partial u-2\int\frac{\mathrm{l}(1+eu)}{1-u^2}\partial u=2\int\frac{\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}}{1-u^2}\partial u;$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\int\frac{\partial u}{(1-u^2)(1-e^2u^2)}\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}=\frac{1}{2(1-e^2)}\left\{\frac{e}{2}[\mathrm{l}\frac{1+eu}{1-eu}]^2+2\int\frac{\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}}{1-u^2}\partial u\right\}$$

oder

$$\int\frac{\partial u}{(1-u^2)(1-e^2u^2)}\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}=\frac{1}{2(1-e^2)}\left\{\frac{e}{2}[\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}]^2+2\int\frac{\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}}{1-u^2}\partial u\right\}.$$

Bemerken mag man noch, dass, wie man durch Differentiation sich leicht überzeugt,

$$\int\frac{\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}}{1-u^2}\partial u=\tfrac{1}{2}\mathrm{l}\frac{1+u}{1-u}.\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}+e\int\frac{\mathrm{l}\frac{1+u}{1-u}}{1-e^2u^2}\partial u$$

ist, so dass man also auch das letztere Integral in den obigen Ausdruck von

$$\int\frac{\partial u}{(1-u^2)(1-e^2u^2)}\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}$$

einführen könnte.

Weil der absolute Werth von eu kleiner als die Einheit ist, so kann man

$$\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}=-2(eu+\tfrac{1}{3}e^3u^3+\tfrac{1}{5}e^5u^5+\tfrac{1}{7}e^7u^7+\ldots.)$$

setzen, und erhält also die folgende Formel:

$$\int \frac{\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}}{1-u^2}\partial u = -2e\int \frac{u\partial u}{1-u^2} - \tfrac{2}{3}e^3\int \frac{u^3\partial u}{1-u^2} - \tfrac{2}{5}e^5\int \frac{u^5\partial u}{1-u^2} - \ldots,$$

wo die in dieser Formel noch vorkommenden Integrale mittelst der Formel

$$\int \frac{u\partial u}{1-u^2} = -\mathrm{l}\sqrt{1-u^2}$$

und der Reductionsformel

$$\int \frac{u^{2n+1}\partial u}{1-u^2} = -\frac{u^{2n}}{2n} + \int \frac{u^{2n-1}\partial u}{1-u^2}$$

berechnet werden können, wodurch man erhält:

$$\int \frac{u\partial u}{1-u^2} = -\mathrm{l}\sqrt{1-u^2},$$

$$\int \frac{u^3\partial u}{1-u^2} = -\frac{u^2}{2} - \mathrm{l}\sqrt{1-u^2},$$

$$\int \frac{u^5\partial u}{1-u^2} = -\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} - \mathrm{l}\sqrt{1-u^2},$$

$$\int \frac{u^7\partial u}{1-u^2} = -\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} - \mathrm{l}\sqrt{1-u^2},$$

u. s. w.

Hieraus ergiebt sich nach gehöriger Substitution:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}}{1-u^2}\partial u = \;& 2e\,\mathrm{l}\sqrt{1-u^2} \\
& + \tfrac{2}{3}e^3\left(\frac{u^2}{2} + \mathrm{l}\sqrt{1-u^2}\right) \\
& + \tfrac{2}{5}e^5\left(\frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} + \mathrm{l}\sqrt{1-u^2}\right) \\
& + \tfrac{2}{7}e^7\left(\frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6} + \mathrm{l}\sqrt{1-u^2}\right) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
= \;& 2(e + \tfrac{1}{3}e^3 + \tfrac{1}{5}e^5 + \tfrac{1}{7}e^7 + \ldots)\,\mathrm{l}\sqrt{1-u^2} \\
& + \tfrac{1}{3}e^3u^2 \\
& + \tfrac{1}{5}e^5u^2(1 + \tfrac{1}{2}u^2) \\
& + \tfrac{1}{7}e^7u^2(1 + \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^4) \\
& + \tfrac{1}{9}e^9u^2(1 + \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^4 + \tfrac{1}{4}u^6) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

also nach einer bekannten Formel:

$$\int \frac{\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}}{1-u^2}\partial u = \mathrm{l}\frac{1+e}{1-e}.\mathrm{l}\sqrt{1-u^2}$$

$$+\tfrac{1}{3}e^3u^2$$

$$+\tfrac{1}{5}e^5u^2(1+\tfrac{1}{2}u^2)$$

$$+\tfrac{1}{7}e^7u^2(1+\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{3}u^4)$$

$$+\tfrac{1}{9}e^9u^2(1+\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{3}u^4+\tfrac{1}{4}u^6)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\mathfrak{F}(u) = \tfrac{1}{3}e^2u^2$$

$$+\tfrac{1}{5}e^4u^2(1+\tfrac{1}{2}u^2)$$

$$+\tfrac{1}{7}e^6u^2(1+\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{3}u^4)$$

$$+\tfrac{1}{9}e^8u^2(1+\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{3}u^4+\tfrac{1}{4}u^6)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

setzen:

$$\int \frac{\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}}{1-u^2}\partial u = \mathrm{l}\frac{1+e}{1-e}.\mathrm{l}\sqrt{1-u^2}+e\mathfrak{F}(u).$$

Bezeichnen wir nun durch B, B_1 die Breiten der Endpunkte der das Dreieck S theilweise begränzenden loxodromischen Linie, und setzen der Kürze wegen

$$\Phi(u) = \frac{1}{2(1-e^2u^2)} + \frac{\mathrm{l}\sqrt{\frac{1-u^2}{1-e^2u^2}}}{1-e^2} + \frac{\mathrm{l}\frac{1+u}{1-u}+e\,\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}}{2(1-e^2)}$$

$$+\frac{1}{4e}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{l}\frac{1+e}{1-e}.[\mathrm{l}\frac{1+u}{1-u}+e\,\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}]+\frac{e}{2}[\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}]^2\\ +2\mathrm{l}\frac{1+e}{1-e}.\mathrm{l}\sqrt{1-u^2}+2e\mathfrak{F}(u)\end{array}\right\},$$

so ist

$$S = \tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta\{\Phi(\sin B_1)-\Phi(\sin B)\}.$$

Ohne uns bei der weiteren Entwickelung dieser Formel aufzuhalten, wollen wir jetzt sogleich dasselbe von drei loxodromischen Linien auf dem Ellipsoid begränzte Dreieck $A_0A_1A_2$ betrachten, dessen Flächeninhalt für den Fall der Kugel wir in der Abhandlung Thl. XVI. Nr. II. S. 32. durch F bezeichnet haben. Dann ist, wenn wir alle in jener Abhandlung gebrauchten Zeichen auch jetzt beibehalten, auf ganz ähnliche Weise wie dort entweder

$$\begin{aligned} F = &\ \tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta_1\{\Phi(\sin B_2)-\Phi(\sin B_0)\} \\ &-\tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta_0\{\Phi(\sin B_2)-\Phi(\sin B_1)\} \\ &-\tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta_2\{\Phi(\sin B_1)-\Phi(\sin B_0)\} \\ = &\ \tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta_0\{\Phi(\sin B_1)-\Phi(\sin B_2)\} \\ &+\tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta_1\{\Phi(\sin B_2)-\Phi(\sin B_0)\} \\ &+\tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta_2\{\Phi(\sin B_0)-\Phi(\sin B_1)\} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} F = &\ \tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta_0\{\Phi(\sin B_2)-\Phi(\sin B_1)\} \\ &+\tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta_2\{\Phi(\sin B_1)-\Phi(\sin B_0)\} \\ &-\tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta_1\{\Phi(\sin B_2)-\Phi(\sin B_0)\} \\ = &-\tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta_0\{\Phi(\sin B_1)-\Phi(\sin B_2)\} \\ &-\tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta_1\{\Phi(\sin B_2)-\Phi(\sin B_0)\} \\ &-\tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta_2\{\Phi(\sin B_0)-\Phi(\sin B_1)\}; \end{aligned}$$

so dass man also allgemein

$$\begin{aligned} F = &\ \tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta_0\{\Phi(\sin B_1)-\Phi(\sin B_2)\} \\ &+\tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta_1\{\Phi(\sin B_2)-\Phi(\sin B_0)\} \\ &+\tfrac{1}{2}b^2\tang\Theta_2\{\Phi(\sin B_0)-\Phi(\sin B_1)\} \end{aligned}$$

setzen kann, wenn man nur, was von jetzt an festgesetzt werden soll, immer bloss den absoluten Werth der Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in dieser Gleichung und in allen im Folgenden aus derselben abgeleiteten Gleichungen setzt.

Was nun zuerst den in der Function $\Phi(u)$ vorkommenden Theil

$$\mathrm{l}\frac{1+u}{1-u}+e\,\mathrm{l}\frac{1-eu}{1+eu}$$

betrifft, so geht aus demselben, wenn man die erforderlichen Substitutionen vornimmt, dabei aber der Kürze wegen alle constanten Factoren weglässt, der folgende Theil von F hervor:

$$\tan\Theta_0\left\{l\frac{(1+\sin B_1)(1-\sin B_2)}{(1-\sin B_1)(1+\sin B_2)}-el\frac{(1+e\sin B_1)(1-e\sin B_2)}{(1-e\sin B_1)(1+e\sin B_2)}\right\}$$

$$+\tan\Theta_1\left\{l\frac{(1+\sin B_2)(1-\sin B_0)}{(1-\sin B_2)(1+\sin B_0)}-el\frac{(1+e\sin B_2)(1-e\sin B_0)}{(1-e\sin B_2)(1+e\sin B_0)}\right\}$$

$$+\tan\Theta_2\left\{l\frac{(1+\sin B_0)(1-\sin B_1)}{(1-\sin B_0)(1+\sin B_1)}-el\frac{(1+e\sin B_0)(1-e\sin B_1)}{(1-e\sin B_0)(1+e\sin B_1)}\right\}$$

oder, wie man leicht findet:

$$2\tan\Theta_0\left\{l\frac{\tan(45^0+\frac{1}{2}B_1)}{\tan(45^0+\frac{1}{2}B_2)}-\tfrac{1}{2}el\frac{(1+e\sin B_1)(1-e\sin B_2)}{(1-e\sin B_1)(1+e\sin B_2)}\right\}$$

$$+2\tan\Theta_1\left\{l\frac{\tan(45^0+\frac{1}{2}B_2)}{\tan(45^0+\frac{1}{2}B_0)}-\tfrac{1}{2}el\frac{(1+e\sin B_2)(1-e\sin B_0)}{(1-e\sin B_2)(1+e\sin B_0)}\right\}$$

$$+2\tan\Theta_2\left\{l\frac{\tan(45^0+\frac{1}{2}B_0)}{\tan(45^0+\frac{1}{2}B_1)}-\tfrac{1}{2}el\frac{(1+e\sin B_0)(1-e\sin B_1)}{(1-e\sin B_0)(1+e\sin B_1)}\right\},$$

und nach Thl. XVI. S. 26. verschwindet also dieser Theil von F, woraus sich ergiebt, dass es, mit Rücksicht auf die Bestimmung von F verstattet ist,

$$\Phi(u)=\frac{1}{2(1-e^2u^2)}+\frac{l\sqrt{\frac{1-u^2}{1-e^2u^2}}}{1-e^2}+\tfrac{1}{8}\left\{l\frac{1-eu}{1+eu}\right\}^2$$
$$+\frac{1}{2e}l\frac{1+e}{1-e}.l\sqrt{1-u^2}+\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}(u)$$

zu setzen. Setzt man für u seinen Werth $\sin\overline{\omega}$, so bringt man diese Grösse leicht auf die folgende Form:

$$\Phi(\sin\overline{\omega})=\frac{1}{2(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)}+\left\{\frac{1}{1-e^2}+\frac{1}{2e}l\frac{1+e}{1-e}\right\}l\cos\overline{\omega}$$
$$-\frac{l(1-e^2\sin\overline{\omega}^2)}{2(1-e^2)}+\tfrac{1}{8}\left\{l\frac{1-e\sin\overline{\omega}}{1+e\sin\overline{\omega}}\right\}^2$$
$$+\tfrac{1}{6}e^2\sin\overline{\omega}^2$$
$$+\tfrac{1}{10}e^4\sin\overline{\omega}^2(1+\tfrac{1}{2}\sin\overline{\omega}^2)$$
$$+\tfrac{1}{14}e^6\sin\overline{\omega}^2(1+\tfrac{1}{2}\sin\overline{\omega}^2+\tfrac{1}{3}\sin\overline{\omega}^4)$$
$$+\tfrac{1}{18}e^8\sin\overline{\omega}^2(1+\tfrac{1}{2}\sin\overline{\omega}^2+\tfrac{1}{3}\sin\overline{\omega}^4+\tfrac{1}{4}\sin\overline{\omega}^6)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

mittelst welcher Formel man alle in dem obigen Ausdrucke von F vorkommenden Grössen berechnen kann.

Behält man das Glied

$$\left\{\frac{1}{1-e^2}+\frac{1}{2e}\,\mathrm{l}\,\frac{1+e}{1-e}\right\}\mathrm{l}\cos\bar{\omega}$$

vollständig bei und vernáchlässigt in allen übrigen Gliedern sämmtliche Grössen, welche in Bezug auf e von der vierten oder einer höheren Ordnung sind, so erhält man:

$$\varPhi(\sin\bar{\omega})=\tfrac{1}{2}+\left\{\frac{1}{1-e^2}+\frac{1}{2e}\,\mathrm{l}\,\frac{1+e}{1-e}\right\}\mathrm{l}\cos\bar{\omega}+\tfrac{5}{3}e^2\sin\bar{\omega}^2,$$

und nach dem Obigen ist folglich:

$$F=\tfrac{1}{2}b^2\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{1}{1-e^2}+\dfrac{1}{2e}\,\mathrm{l}\,\dfrac{1+e}{1-e}\right]\left[\tan\Theta_0\,\mathrm{l}\,\dfrac{\cos B_1}{\cos B_2}+\tan\Theta_1\,\mathrm{l}\,\dfrac{\cos B_2}{\cos B_0}\right.\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\left.+\tan\Theta_2\,\mathrm{l}\,\dfrac{\cos B_0}{\cos B_1}\right]\\ +\tfrac{5}{3}e^2\left\{\begin{array}{l}\tan\Theta_0(\sin B_1{}^2-\sin B_2{}^2)\\ +\tan\Theta_1(\sin B_2{}^2-\sin B_0{}^2)\\ +\tan\Theta_2(\sin B_0{}^2-\sin B_1{}^2)\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

oder

$$F=\tfrac{1}{2}b^2\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{1}{1-e^2}+\dfrac{1}{2e}\,\mathrm{l}\,\dfrac{1+e}{1-e}\right]\left[\tan\Theta_0\,\mathrm{l}\,\dfrac{\cos B_1}{\cos B_2}+\tan\Theta_1\,\mathrm{l}\,\dfrac{\cos B_2}{\cos B_0}\right.\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\left.+\tan\Theta_2\,\mathrm{l}\,\dfrac{\cos B_0}{\cos B_1}\right]\\ +\tfrac{5}{3}e^2\left\{\begin{array}{l}\tan\Theta_0\sin(B_1+B_2)\sin(B_1-B_2)\\ +\tan\Theta_1\sin(B_2+B_0)\sin(B_2-B_0)\\ +\tan\Theta_2\sin(B_0+B_1)\sin(B_0-B_1)\end{array}\right\}\end{array}\right\}.$$

Für $e=0$ ist $a=b$, und weil

$$\frac{1}{2e}\,\mathrm{l}\,\frac{1+e}{1-e}=\frac{1}{2e}.2(e+\tfrac{1}{3}e^3+\tfrac{1}{5}e^5+\tfrac{1}{7}e^7+\ldots.)=1+\tfrac{1}{3}e^2+\tfrac{1}{5}e^4+\tfrac{1}{7}e^6+\ldots$$

ist, so ist offenbar 2 der Werth von

$$\frac{1}{1-e^2}+\frac{1}{2e}\,\mathrm{l}\,\frac{1+e}{1-e}$$

für $e \gtrless 0$; folglich ist für $e = 0$, d. h. für die Kugel:

$$F = a^2 \left\{ \tang \Theta_0 \, l \frac{\cos B_1}{\cos B_2} + \tang \Theta_1 \, l \frac{\cos B_2}{\cos B_0} + \tang \Theta_2 \, l \frac{\cos B_0}{\cos B_1} \right\},$$

was ganz mit dem in der angeführten Abhandlung gefundenen Resultate übereinstimmt.

Noch Grössen zu berücksichtigen, welche e in einer die zweite übersteigenden Potenz enthalten, also etwa nur erst Glieder von der sechsten und jeder höheren Ordnung zu vernachlässigen, hat nach dem Obigen nicht die mindeste Schwierigkeit, und die Entwickelung der betreffenden Formeln kann daher ganz dem Leser überlassen werden.

XX.

Einige Sätze über sphärische Dreiecke.

Von

Herrn *E. Essen*,

Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Stargard.

Vor einiger Zeit habe ich mir erlaubt, dem Herrn Professor Grunert einen Beweis der Gaussischen Formeln zu übersenden. Der Beweis entstand, als ich mich mit Betrachtungen von allerdings sehr elementarer Natur über das sphärische Dreieck beschäftigte, und ich habe daraus die Ueberzeugung gewonnen, dass die sphärische Trigonometrie für den Lernenden wesentlich erleichtert werden würde, wenn sie durch mannigfache Uebungen in Constructionen auf der Kugelfläche eingeleitet würde. In ge-

genwärtiger Abhandlung werde ich nun versuchen, einen kleinen Beitrag zu einer solchen Vorschule der sphärischen Trigonometrie zu liefern, wobei ich allerdings vorausschicken muss, dass ich fast lauter Alltägliches und längst Bekanntes bringen werde; ich eigne mir nur das Verdienst, wenn hier von Verdienst die Rede sein kann, eines Nachweises der Nützlichkeit dieser Sätze zu.

Wenn sich drei grösste Kreise auf der Kugelfläche schneiden, so entstehen im Ganzen acht Dreiecke; diese Dreiecke verdienen in ihrer gegenseitigen Beziehung aufgefasst und benannt zu werden. Ich möchte dazu die Benennungen Scheiteldreieck, Nebendreieck, Gegendreieck vorschlagen. Gegendreiecke würden diejenigen sein, deren Ecken paarweise um halbe Kreislinien entfernt sind. Nebendreiecke haben eine gemeinsame Seite, ein Paar gleicher Winkel, während sich die andern Seiten zu halben Kreislinien ergänzen. Scheiteldreiecke haben ein Paar gleicher Winkel, die Scheitelwinkel von einander sind, und ein Paar gleicher Seiten, während sich wiederum, wie vorhin, die andern Seiten und Winkel paarweise zu zwei Rechten, bezüglich halben Kreislinien, ergänzen.

Den Bogen eines grössten Kreises, welcher den Pol eines Kugelkreises mit der Peripherie desselben verbindet, kann man füglich einen sphärischen Radius nennen.

Gehen zwei Kugelkreise durch einen Punkt ihrer sphärischen Centrale, so werden sich dieselben, sei es von innen oder von aussen berühren. Hieraus folgt, dass ein kleiner Kugelkreis von einem grössten Kreise berührt wird, wenn letzterer senkrecht durch den Endpunkt eines sphärischen Radius geht; denn alsdann liegt der Pol des grössten Kreises auf dem sphärischen Radius bezüglich dessen Verlängerung.

Die Aufgaben, um und in ein sphärisches Dreieck einen Kreis zu beschreiben, werden eben so gelöst, wie beim geradlinigen Dreieck. Sind a, b, c die Seiten eines sphärischen Dreiecks und α, β, γ die von den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kreises gebildeten Abschnitte, so hat man, wenn der Abschnitt α an der Ecke A liegt:

$$\alpha = \frac{b+c-a}{2};$$

ebenso

$$\beta = \frac{a+c-b}{2},$$

$$\gamma = \frac{a+b-c}{2}.$$

und dabei

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{a+b+c}{2}.$$

Sind α', β', γ' die von den Radien des umbeschriebenen Kreises mit den Seiten desselben gebildeten Winkel, so hat man, wenn α' an der Seite a liegt:

$$\alpha'=\frac{B+C-A}{2} \quad \text{u. s. f.}$$

Diese Formel giebt, wenn der Pol des Kreises ausserhalb des Dreiecks liegt, für α' einen negativen Werth. Bemerkenswerth ist der Umstand, dass der Pol des einem sphärischen Dreieck einbeschriebenen Kreises zusammenfällt mit dem Pol desjenigen Kreises, welcher dem Polardreieck umschrieben ist; denn die Halbirungslinien der Winkel des einen Dreiecks gehen senkrecht durch die Mitten der Seiten des andern.

Fällt man vom Durchschnitt der drei Linien, welche die Winkel eines sphärischen Dreiecks halbiren, ein Loth auf eine Seite desselben, so ist der Winkel, den dieses Loth mit einer der Halbirungslinien bildet, das Supplement des von den beiden andern Halbirungslinien gebildeten Winkels. Diese Eigenschaften haben die sphärischen Dreiecke mit den ebenen gemein.

Die zuletzt erwähnte Eigenschaft giebt einen sehr leichten Beweis für die Formel

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}{\sin b.\sin c}}.$$

enn man hat, wenn in Taf. V. Fig. 1. D der Durchschnitt der Halbirungslinien der Winkel und DE ein Loth auf BC ist:

$$\sin c:\sin BD=\sin ADB:\sin\frac{A}{2},$$

$$\sin b:\sin CD=\sin ADC:\sin\frac{A}{2}.$$

Hieraus folgt, wegen der Gleichungen

$$\angle ADB+\angle EDC=180^\circ,$$

$$\angle ADC+\angle EDB=180^\circ:$$

$$\sin\frac{A^2}{2}=\frac{\sin BD.\sin BDE.\sin CD.\sin CDE}{\sin b.\sin c}.$$

Nun aber ist:

$$\sin BD.\sin BDE=\sin BE=\sin\left(\frac{a-b+c}{2}\right),$$

$$\sin CD.\sin CDE=\sin CE=\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right),$$

woraus sich sogleich die obige Formel ergiebt.

Vertauscht man Dreieck ABC mit seinem Nebendreieck an AB, so kommt:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)}{\sin b.\sin c}}.$$

Hieraus lässt sich leicht die bekannte Formel

$$\cos a=\cos b.\cos c+\sin b.\sin c.\cos A$$

ableiten.

Weitere Formeln ergeben sich bekanntlich, wenn man zum Polardreieck übergeht. Wie diese Eigenschaften zum Beweise der Gaussischen Formeln benutzt werden können, habe ich schon früher gezeigt.

Weiter lässt sich dann folgender Satz beweisen:

Mehrere Dreiecke mit gemeinsamer Grundlinie haben gleiche Winkelsumme, wenn ihre Scheiteldreiecke einem und demselben Kreise einbeschrieben sind. (Taf. V. Fig. 2.)

Es sei $A'B'C$ das Scheiteldreieck des Dreiecks ABC, D der Pol des einbeschriebenen Kreises; alsdann ist

$$\angle DB'A=\frac{A'+B'-C}{2}=\frac{360^0-(A+B+C)}{2}.$$

So lange also der Punkt D und mit ihm der Winkel $DB'A'$ unveränderlich bleibt, ist die Winkelsumme $A+B+C$ constant. Der Winkel $DB'A'$ ist übrigens das Complement des sphärischen Excesses im Dreiecke ABC.

Hieraus geht hervor, dass der geometrische Ort der Spitzen sämmtlicher Dreiecke, welche gemeinsame Grundlinie und gleichen Inhalt haben, ein Kugelkreis ist, der den sämmtlichen Scheiteldreiecken umschrieben ist.

Dies ist der Satz von Lexell, über den Herr Professor Steiner, wie ich aus einer Anmerkung in Crelle's Uebersetzung von Legendre's Elementen ersehe, geschrieben hat. Leider ist es mir bei dem Mangel an literarischen Hülfsmitteln nicht vergönnt gewesen, die betreffende Abhandlung einzusehen.

Liegt der Pol des umbeschriebenen Kreises auf einer Seite, so ist die Summe der beiden anliegenden Winkel dem dritten Winkel gleich. Alsdann ist auch in jedem der beiden Scheiteldreiecke, welche an die kleineren Winkel stossen, ein Winkel gleich der Summe der beiden andern.

Es sei (Taf. V. Fig. 3.) im Dreieck ABC

$$\angle A - \angle B - \angle C = 0.$$

Alsdann hat man:

$$A = 180^{0} - A',$$
$$B = 180^{0} - B'.$$

Substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung, so kommt

$$-A' + B' - C = 0.$$

Jetzt ist es auch leicht, die beiden Sätze, welche in Legendre's Elementen mit einem ziemlichen Aufwande von Schlüssen bewiesen werden, darzuthun, nämlich:

1) Das grösste unter allen sphärischen Dreiecken mit gemeinsamer Grundlinie und gleichem Umfange ist das gleichschenklige.

Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck (Taf. V. Fig. 4.), ABC' ein ungleichseitiges, beide von gleichem Umfange. Macht man $CF = BC$ und verbindet C' mit C und F, so ist leicht nachzuweisen:

$$C'F > C'B,$$

mithin

$$\angle FCC' > \angle C'CB.$$

Demnach fällt die Halbirungslinie CE des Winkels BCF zwischen CC' und CF. Nun steht die Halbirungslinie CE senkrecht auf der Halbirungslinie CG' des Winkels $A'CB'$, welche ein sphärischer Radius des um $A'B'C$ beschriebenen Kreises ist, und ist also eine Tangente desselben. Also liegt C' ausserhalb dieses Kreises und es ist daher

$$\Delta ABC' < \Delta ABC.$$

2) Unter allen Dreiecken mit zwei bestimmten und einer unbestimmten Seite ist dasjenige das grösste, in welchem der Win-

kel, welcher der unbestimmten Seite gegenüber liegt, gleich ist der Summe der beiden anderen Winkel.

Es sei in den beiden Dreiecken ABC und ABC' (Taf. V. Fig. 3.) die Seite $AC'=AC$, der Winkel CAB sei gleich der Summe der Winkel ABC und ACB.

Im Scheiteldreiecke $A'B'C$ ist

$$\angle B' = \angle A' + \angle C,$$

also fällt der Pol D des umbeschriebenen Kreises in die Seite $A'C$. Verbindet man D mit C', so ist leicht nachzuweisen, dass $C'D > CD$.

Ich will mit der Aufgabe schliessen, aus zwei gegebenen Seiten ein Dreieck zu construiren, in welchem der eingeschlossene Winkel gleich ist der Summe der beiden andern Winkel. Bei Betrachtung von Taf. V. Fig. 3. erkennt man sogleich, dass es bloss auf Construction des Scheiteldreiecks $A'B'C$ ankommt, die so leicht ist, dass ich mich nicht weiter dabei aufhalte.

XXI.

Ueber eine Eigenschaft des Kreises.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lebensversicherungs-Calculator der k. k. p. Azienda Assicuratrice zu Triest.

Es sind zwei sich im Puncte C (Taf. V. Fig. 5.) durchschneidende Gerade tT, $t'T'$ und ein Kreis gegeben, welcher dieselben in dem gegebenen Abstande $CD=CE=h$ berührt. Setzen wir den Radius DO des Kreises $=r$ und den Abstand CO seines Mittelpunktes von $C=c$, so ist nothwendig:

$$(1)\qquad r^2 + h^2 = c^2,$$

$$(2)\qquad \frac{r}{h} = \operatorname{tg}\varphi = \mu,$$

so dass r und c, so wie h und φ als bekannte gegebene Grössen betrachtet werden können. Zieht man nun in einem beliebigen Punkte M des Kreises eine Tangente $T\tau$, so entsteht ein Dreieck ABC, und unsere Aufgabe soll darin bestehen, auf analytischem Wege die Beziehungen auszumitteln, welche zwischen den drei Seiten $BC = \alpha$, $AC = \beta$, $AB = \gamma$ und der Lage des Punktes M statthaben.

Nehmen wir C als Anfangspunkt der Coordinaten, die COx als positive Halbaxe der x und $Cy \perp Cx$ als positive Halbaxe der y, so ist die Gleichung des gegebenen Kreises:

$$(3)\qquad y^2 = r^2 - (c-x)^2, \text{ also } \frac{dy}{dx} = \frac{c-x}{y}$$

und

$$y - y_1 = \frac{c - x_1}{y_1}.(x - x_1) = k.(x - x_1)$$

die Gleichung der durch den Punkt $x_1 y_1$ gehenden Tangente, unter x_1, y_1 die Coordinaten des Berührungspunktes M verstanden. Man hat nun als Gleichungen der Geraden:

$$(4)\qquad tT \;\dots\dots\dots\; y = \mu x,$$

$$(5)\qquad t'T' \;\dots\dots\dots\; y = -\mu x,$$

$$(6)\qquad T\tau \;\dots\dots\dots\; y - y_1 = k(x - x_1)$$

Aus (4) und (6) findet man die Coordinaten A_x, A_y des Durchschnittspunktes A, aus (5) und (6) jene B_x, B_y des Punktes B und aus diesen alsdann mit Hilfe der Gleichungen:

$$\alpha^2 = B_x^2 + B_y^2, \quad \beta^2 = A_x^2 + A_y^2, \quad \gamma^2 = (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2$$

die Seiten α, β, γ des Dreieckes ABC als Functionen von x_1 und y_1. In der That ist:

$$A_x = \frac{y_1 - kx_1}{\mu - k}, \quad A_y = \mu.\frac{y_1 - kx_1}{\mu - k},$$

$$B_x = -\frac{y_1 - kx_1}{\mu + k}, \quad B_y = \mu.\frac{y_1 - kx_1}{\mu + k}.$$

Ersetzt man hierin μ und k durch seine obigen Werthe und reducirt, so findet man:

$$A_x = h.\frac{y_1^2 - x_1(c-x_1)}{ry_1 - h(c-x_1)}, \qquad B_x = -h.\frac{y_1^2 - x_1(c-x_1)}{ry_1 + h(c-x_1)},$$

$$A_y = r.\frac{y_1^2 - x_1(c-x_1)}{ry_1 - h(c-x_1)}, \qquad B_y = r.\frac{y_1^2 - x_1(c-x_1)}{ry_1 + h(c-x_1)}.$$

Setzt man zur leichteren Uebersicht:

$$(7) \qquad M = y_1^2 - x_1(c-x_1), \quad N = ry_1 - h(c-x_1), \quad P = ry_1 + h(c-x_1);$$

so wird

$$A_x = h.\frac{M}{N}, \quad A_y = r.\frac{M}{N}, \quad B_x = -h.\frac{M}{P}, \quad B_y = r.\frac{M}{P},$$

$$A_x - B_x = h.\frac{M}{NP}.(P+N) = 2rhy_1.\frac{M}{NP},$$

$$A_y - B_y = r.\frac{M}{NP}.(P-N) = 2rh(c-x_1)\frac{M}{NP};$$

mithin, da x_1, y_1 ein Punkt des Kreises, also nach (3)

$$(8) \qquad y_1^2 + (c-x_1)^2 = r^2$$

ist:

$$\alpha = \pm c.\frac{M}{P} = \pm c.\frac{y_1^2 - x_1(c-x_1)}{ry_1 + h(c-x_1)},$$

$$\beta = \pm c.\frac{M}{N} = \pm c.\frac{y_1^2 - x_1(c-x_1)}{ry_1 - h(c-x_1)},$$

$$\gamma = \pm 2hr^2.\frac{M}{NP} = \pm 2hr^2.\frac{y_1^2 - x_1(c-x_1)}{r^2y_1^2 - h^2.(c-x_1)^2},$$

wo die Vorzeichen immer so gewählt werden müssen, dass die Distanzen α, β, γ positiv werden.

Um aber diese Wahl zu treffen, ist nothwendig, die Zeichen der durch M, N, P repräsentirten Functionen von x_1, y_1 zu kennen, wenn man x_1 von seinem kleinsten Werthe $c-r$ allmählig bis zu seinem grössten $c+r$ wachsen lässt. In diesem Intervall sind für unsere Zwecke besonders jene Werthe von x_1 (und die correspondirenden von y_1) von Wichtigkeit, für welche M, N oder P verschwindet, weil diese zugleich diejenigen sind, für welche die Function M, N oder P ihr Zeichen wechselt.

Setzt man $M=0$, $N=0$, $P=0$, so findet man leicht, dass M verschwindet für $x_1=c-\frac{r^2}{c}$, dass N verschwindet für $x_1=c-\frac{r^2}{c}$, wenn y_1 positiv ist, und für $x_1=c+\frac{r^2}{c}$, wenn y_1 negativ ist; endlich dass P verschwindet für $x_1=c-\frac{r^2}{c}$, wenn y_1 negativ ist, und für $x_1=c+\frac{r^2}{c}$, wenn y_1 positiv ist.

Ist also

$$x=c-r,\quad c-\frac{r^2}{c},\quad c+\frac{r^2}{c},\quad c+r,$$

so wird beziehungsweise:

$$\begin{array}{llll}
y=0, & \pm\frac{hr}{c}, & \pm\frac{hr}{c}, & 0, \\
M=-r(c-r), & 0, & +2r^2, & +r(c+r), \\
N=-hr, & -(1\mp1)\frac{hr^2}{c}, & +(1\pm1)\frac{hr^2}{c}, & +hr, \\
P=+hr, & +(1\pm1)\frac{hr^2}{c}, & -(1\mp1)\frac{hr^2}{c}, & -hr,
\end{array}$$

wo sich allenthalben die unteren und oberen Zeichen auf einander beziehen.

Wenn man dieses Schema mit einiger Aufmerksamkeit betrachtet, so gelangt man leicht zu nachstehenden Folgerungen:

1) Von $x_1=c-r$ bis $x_1=c-\frac{r^2}{c}$ ist M und N stets negativ und P stets positiv, y_1 mag positiv oder negativ sein. Für einen Punkt des Bogens DE haben also die Grössen

$$(8)\qquad M,\ N,\ P,\ \frac{M}{NP},\ \frac{M}{N},\ \frac{M}{P}$$

beziehungsweise die Vorzeichen;

$$-\quad -\quad +\quad +\quad +\quad -$$

und es ist

$$(9) \qquad \alpha = -c.\frac{M}{P}, \quad \beta = +c.\frac{M}{N}, \quad \gamma = +2hr^2.\frac{M}{NP}.$$

2) In dem Intervall von $x_1 = c - \frac{r^2}{c}$ bis $x_1 = c + \frac{r^2}{c}$ und für positive y_1 ist M, N und P positiv und die Glieder der Reihe (8) haben die Vorzeichen:

$$+ \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$$

Nun ist aber $\frac{r^2}{c} = OF$, macht man daher $OF' = OF$ und zieht durch F' $D'E' \parallel DE$, so ist $c - \frac{r^2}{c} = CF$, $c + \frac{r^2}{c} = CF'$, liegt also der Punkt M in dem Bogen DD', so ist:

$$(10) \qquad \alpha = +c.\frac{M}{P}, \quad \beta = +c.\frac{M}{N}, \quad \gamma = +2hr^2.\frac{M}{NP}.$$

3) In demselben Intervall von $x_1 = c - \frac{r^2}{c}$ bis $x_1 = c + \frac{r^2}{c}$, aber für negative y_1, ist M stets positiv, N und P stets negativ. Bezeichnet also x_1, y_1 einen Punkt des Bogens EE', so haben die Glieder der Reihe (8) die Zeichen:

$$+ \quad - \quad - \quad + \quad - \quad -$$

und es ist daher:

$$(11) \qquad \alpha = -c.\frac{M}{P}, \quad \beta = -c.\frac{M}{N}, \quad \gamma = +2hr^2.\frac{M}{NP}.$$

4) In dem Intervall von $x_1 = c + \frac{r^2}{c}$ bis $x_1 = c + r$ ist M und N beständig positiv und P beständig negativ, y_1 mag positiv oder negativ sein. Entspricht also x_1, y_1 einem Punkt des Bogens $D'E'$, so haben die Glieder der Reihe (8) beziehungsweise die Vorzeichen:

$$+ \quad + \quad - \quad - \quad + \quad -$$

und es ist:

$$(12) \qquad \alpha = -c.\frac{M}{P}, \quad \beta = +c.\frac{M}{N}, \quad \gamma = -2hr^2.\frac{M}{NP}.$$

Wenn man für M, N und P die Werthe aus (7) setzt, so findet man den Ausdruck:

$$2hr^2.\frac{M}{NP}+c.\frac{M}{N}-c.\frac{M}{P}=\frac{M}{NP}.[2hr^2+c(P-N)]$$

$$=\frac{y_1^2-x_1(c-x_1)}{r^2y_1^2-h^2(c-x_1)^2}.2h.[r^2+c(c-x_1)].$$

Mit Hilfe der Gleichung (8) aber findet man durch Elimination von y_1 und mit Berücksichtigung von (1):

$$y_1^2-x_1(c-x_1)=r^2-c(c-x_1),\quad r^2y_1^2-h^2(c-x_1)^2=r^4-c^2(c-x_1)^2,$$

mithin ist

$$2hr^2.\frac{M}{NP}+c.\frac{M}{N}-c.\frac{M}{P}=2h,$$

also von x_1, y_1 unabhängig.

Substituirt man in dem ersten Theile dieser Gleichung der Reihe nach die den drei Gliedern desselben entsprechenden Werthe aus (9), (10), (11), (12), so erhält man

für den Bogen DE . . . $\alpha+\beta+\gamma=2h$,
„ „ „ DD' . . . $-\alpha+\beta+\gamma=2h$,
„ „ „ EE' . . . $\alpha-\beta+\gamma=2h$,
„ „ „ $D'E'$ . . . $\alpha+\beta-\gamma=2h$.

Ist also M (Taf. V. Fig. 6.) ein beliebiger Punkt des Bogens DE, so wie M_1 ein beliebiger Punkt des Bogens DD', M_2 ein beliebiger Punkt des Bogens EE', endlich M_3 ein beliebiger Punkt des Bogens $D'E'$, und zieht man in diesen Punkten Tangenten an den Kreis, welche gehörig verlängert die gegebenen Geraden tT und $t'T'$ in den Punkten A, A_1, A_2, A_3 und B, B_1, B_2, B_3 durchschneiden, so ist in dem

ΔABC . . . $BC+AC+AB=2.CD$,
ΔA_1B_1C . . . $-B_1C+A_1C+A_1B_1=2.CD$,
ΔA_2B_2C . . . $B_2C-A_2C+A_2B_2=2.CD$,
ΔA_3B_3C . . . $B_3C+A_3C-A_3B_3=2.CD$.

Das Vorhergehende zeigte den Weg der Erfindung. Wenn man einmal von diesen Eigenschaften des Kreises Kenntniss hat,

so fällt es nicht schwer, dieselben synthetisch zu beweisen. Liegt z. B. der Punkt M in dem Bogen DE, so ziehe man noch den Radius OE, so ist $\Delta CDO \cong \Delta CEO$, mithin $CD = CE$, folglich ist auch $AM = AD$, $BM = BE$, also $AM + BM = AB = AD + BE$, folglich $BC + AC + AB = BC + AC + AD + BE = (BC + BE) + (AC + AD) = CE + CD = 2.CD$. Ist M_1 ein Punkt des Bogens DD', so ist nach dem früher Bewiesenen auch $A_1M_1 = A_1D$, $B_1M_1 = B_1E$, also $B_1M_1 - A_1M_1 = A_1B_1 = B_1E - A_1D$, mithin $A_1B_1 + A_1C - B_1C = B_1E - A_1D + A_1C - B_1C = (B_1E - B_1C) + (A_1C - A_1D) = 2.CD$. Aehnlich ist der Beweisgang in den beiden anderen Fällen.

Diese Eigenschaft des Kreises gestattet auch eine sehr einfache constructive Auflösung der Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt T (Taf. V. Fig. 5.) eine Gerade Tτ so zu ziehen, dass das von einem der Grösse und Lage nach gegebenen Winkel TCT' abgeschnittene Dreieck ABC einen gegebenen Umfang habe. Man theile den gegebenen Winkel TCT' durch die Cx in zwei gleiche Theile, mache CD gleich der Hälfte des gegebenen Umfanges, errichte in D auf CD ein Perpendikel DO bis zum Durchschnitt O mit der Cx und beschreibe von O aus, als Centrum, mit dem Halbmesser OD den Kreisbogen DE. Zieht man nun durch den gegebenen Punkt T eine Tangente Tτ an diesen Bogen, so wird das durch dieselbe abgeschnittene Dreieck ABC den gegebenen Umfang haben.

XXII.

Beweis für die Darstellung des Sinus und Cosinus als Producte unendlich vieler Factoren.

Von

Herrn Doctor *R. Hoppe*,

Privatdocenten an der Universität zu Berlin.

Der bekannte Satz von Joh. Bernoulli, welcher den Sinus und Cosinus als Producte unendlicher Reihen darstellt, nimmt in methodischer Beziehung in der Lehre von den Reihen eine höchst bedeutsame Stelle ein, insofern aus ihm mit grosser Leichtigkeit die Entwickelungen der Tangente und ähnlicher Functionen nach Potenzen des Bogens, sowie die Hauptsätze von den Bernoullischen Zahlen fliessen, die sich auf anderem Wege zum grössten Theile nur ziemlich umständlich ableiten lassen. Dass man gleichwohl die genannten Stücke nicht gemäss ihrer augenfälligen Verwandtschaft in einen geschlossenen Abschnitt zusammenzufassen und den anfangs erwähnten Satz an die Spitze zu stellen pflegt, vielmehr die Theile desselben öfters gesondert, wo und so gut man eben kann, ableitet, scheint mir darin seinen Grund zu haben, dass man in den Beweisen für diesen Satz entweder die Strenge oder die Leichtfasslichkeit vermisst, welche man bei ihm als Grundlage so vieler wichtiger Sätze fordern müsste. In der folgenden Ableitung habe ich beiden Forderungen zugleich zu genügen gesucht, und hoffe, wofern die angedeutete Anordnung des Stoffes Eingang finden sollte, dadurch zur Vereinfachung der Methode einiges beigetragen zu haben.

Entwickelt man die Grösse

$$\cos 2nx + i\sin 2nx = \cos^{2n}x(1 + i\,\mathrm{tg}\,x)^{2n}$$

nach dem binomischen Lehrsatze, so ergeben sich die simultanen Gleichungen:

$$\cos 2nx = \cos^{2n} x \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k (2n)_{2k} \operatorname{tg}^{2k} x,$$

$$\sin 2nx = \cos^{2n} x \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k (2n)_{2k+1} \operatorname{tg}^{2k+1} x.$$

Setzt man $\frac{x}{2n}$ für x, so ersieht man, dass die Grössen

$$\frac{\cos x}{\cos^{2n}\frac{x}{2n}}, \quad \frac{\sin x}{2n \operatorname{tg}\frac{x}{2n}\cos^{2n}\frac{x}{2n}}$$

ganze Functionen von $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2n}$ sind, erstere vom $n$ten, letztere vom $(n-1)$sten Grade. Erstere verschwindet für die n Werthe

$$x = \pm(\mu - \tfrac{1}{2})\pi; \quad \mu = 1, 2, \ldots . n,$$

letztere für die $n-1$ Werthe

$$x = \mu\pi; \quad \mu = 1, 2, \ldots . n-1,$$

und zwar sind die entsprechenden Werthe:

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2n} = \operatorname{tg}^2\frac{2\mu-1}{4n}\pi, \quad \operatorname{tg}^2\frac{x}{2n} = \operatorname{tg}^2\frac{\mu\pi}{2n}$$

sämmtlich von einander verschieden. Für $x=0$ gehen beide Grössen in 1 über; folglich ist nach einem bekannten Satze über die ganzen Functionen:

$$\frac{\cos x}{\cos^{2n}\frac{x}{2n}} = \prod_{\mu=1}^{\mu=n}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2n}}{\operatorname{tg}^2\frac{2\mu-1}{4n}\pi}\right),$$

$$\frac{\sin x}{2n\operatorname{tg}\frac{x}{2n}\cos^{2n}\frac{x}{2n}} = \prod_{\mu=1}^{\mu=n-1}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2n}}{\operatorname{tg}^2\frac{\mu\pi}{2n}}\right).$$

Diese Gleichungen gelten ohne Unterschied, mag x reell oder imaginär sein, weil sie nur rationale und goniometrische, also nur von Natur einwerthige Functionen enthalten. Auch soll im Nächstfolgenden in dieser Beziehung keine Einschränkung gemacht werden.

Für $n = \infty$ gehen die Grössen zur Linken über in

$$\cos x, \quad \frac{\sin x}{x};$$

die allgemeinen Factoren der beiden Producte zur Rechten in

$$1-\left(\frac{x}{\frac{2\mu-1}{2}\pi}\right)^2, \quad 1-\left(\frac{x}{\mu\pi}\right)^2.$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$A_m = \prod_{\mu=1}^{\mu=m} \left(1-\left(\frac{x}{\frac{2\mu-1}{2}\pi}\right)^2\right),$$

$$A_m' = \prod_{\mu=1}^{\mu=m} \left(1-\left(\frac{x}{\mu\pi}\right)^2\right),$$

$$B_m = \prod_{\mu=1}^{\mu=m} \left(1-\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}{\operatorname{tg}\frac{2\mu-1}{4n}\pi}\right)^2\right),$$

$$B_m' = \prod_{\mu=1}^{\mu=m} \left(1-\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}{\operatorname{tg}\frac{\mu\pi}{2n}}\right)^2\right);$$

so wird

$$\frac{\cos x}{\cos^{2n}\frac{x}{2n}} = B_n = B_m \frac{B_n}{B_m},$$

$$\frac{\sin x}{2n \operatorname{tg}\frac{x}{2n}\cos^{2n}\frac{x}{2n}} = B_{n-1}' = B_m' \frac{B_{n-1}'}{B_m'},$$

wo für $n=\infty$ die Grössen B_m, B_m' übergehen in A_m, A_m'. Die noch übrig bleibenden Factoren der rechten Seiten:

$$\frac{B_n}{B_m} = \prod_{\mu=m+1}^{\mu=n} \left(1-\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}{\operatorname{tg}\frac{2\mu-1}{4n}\pi}\right)^2\right),$$

$$\frac{B_{n-1}'}{B_m'} = \prod_{\mu=m+1}^{\mu=n-1} \left(1-\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}{\operatorname{tg}\frac{\mu\pi}{2n}}\right)^2\right)$$

müssen daher gleichfalls Grenzwerthe haben, diese seien C_m und C_m'. Dann ist

$$\cos x = A_m C_m, \quad \frac{\sin x}{x} = A_m' C_m'. \tag{1}$$

Ist nun erstens x reell, so setze man

$$n\pi > (m+1)\pi > \frac{2m-1}{2}\pi > \sqrt{x^2},$$

dann wird innerhalb der Grenzen der letzten zwei Producte:

$$0 < \sqrt{\left(\frac{x}{2n}\right)^2} < \frac{\mu\pi}{2n} \overset{=}{<} \frac{\pi}{2}.$$

Da nun die Function $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\varphi}$ ununterbrochen wächst, wenn φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, wie man aus ihrem stets positiven Differentialquotienten sieht, so ist

$$0 < \left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}}\right)^2 < \left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\mu\pi}{2n}}{\frac{\mu\pi}{2n}}\right)^2 \tag{2}$$

oder

$$0 < \left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}{\operatorname{tg}\frac{\mu\pi}{2n}}\right)^2 < \left(\frac{x}{\mu\pi}\right)^2 < 1,$$

daher

$$1 > 1 - \left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}{\operatorname{tg}\frac{\mu\pi}{2n}}\right)^2 > 1 - \left(\frac{x}{\mu\pi}\right)^2 > 0.$$

Setzt man für μ die ganzen Zahlen von $m+1$ bis $n-1$ und multiplicirt die Ungleichungen, so kommt:

$$1 > \frac{B_{n-1}'}{B_m'} > \frac{A_{n-1}'}{A_m'} > 0.$$

Gerade ebenso findet man:

$$1 > \frac{B_n}{B_m} > \frac{A_n}{A_m} > 0.$$

Die Producte A_m, A_m' sind convergent und haben für $m = \infty$ Grenzwerthe A, A', weil die Reihensummen, deren allgemeine Glieder

$$-\left(\frac{x}{\frac{2\mu-1}{2}\pi}\right)^2, \quad -\left(\frac{x}{\mu\pi}\right)^2$$

sind, convergiren. Lässt man demnach n in's Unendliche wachsen, so werden die zwei Ungleichungen:

$$1 \gtreqless C_m \gtreqless \frac{A}{A_m}, \quad 1 \gtreqless C_m' \gtreqless \frac{A'}{A_m'}.$$

Für $m = \infty$ wird $A_m = A$, $A_m' = A'$, folglich $C_m = 1$, $C_m' = 1$. also nach den Gleichungen (1):

$$\cos x = A = \prod_{\mu=1}^{\mu=\infty}\left(1 - \left(\frac{x}{\frac{2\mu-1}{2}\pi}\right)^2\right),$$

$$\frac{\sin x}{x} = A' = \prod_{\mu=1}^{\mu=\infty}\left(1 - \left(\frac{x}{\mu\pi}\right)^2\right).$$

Ist zweitens x imaginär von der Form iy, so ist, da allgemein

$$\frac{\operatorname{tg} i\psi}{i\psi} = \frac{1}{\psi}\cdot\frac{e^\psi - e^{-\psi}}{e^\psi + e^{-\psi}} < 1 < \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\varphi}$$

ist, ohne Einschränkung in Bezug auf das Verhältniss $x:\mu\pi$, die Ungleichung (2) erfüllt. Aus ihr geht die folgende durch Multiplication mit der, im gegenwärtigen Falle negativen, Grösse

$$\left(\frac{\frac{x}{2n}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2n}}\right)^2$$

hervor, wodurch die Zeichen $<$ in $>$ übergehen. Man findet demnach, dass C_m und C_m' zwischen denselben Grenzen enthalten sind, wie im ersten Fall. Die resultirenden Formeln gelten daher auch, wenn ix reell ist.

Der Fall, wo x eine imaginäre Grösse in allgemeinster Form ist, mag hier übergangen werden als von keiner Anwendung auf das Folgende. Es ist nur noch zu zeigen, wie aus den eben bewiesenen Gleichungen die Theorie der Bernoulli'schen Zahlen auf die einfachste Weise hervorgeht.

Es sei x eine reelle oder mit dem Factor i behaftete Grösse. Nimmt man die Logarithmen von beiden Seiten beider Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\log\cos x = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \log\left(1-\left(\frac{x}{\frac{2\mu-1}{2}\pi}\right)^2\right), \quad \left(x^2<\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right),$$

$$\log\frac{\sin x}{x} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \log\left(1-\left(\frac{x}{\mu\pi}\right)^2\right), \qquad (x^2<\pi^2),$$

wo die beigefügten Gültigkeitsgrenzen durch die Grenzen der Stetigkeit der Functionen zur Linken vorgeschrieben sind, auf welcher allein die Rechtmässigkeit der Einführung beruht. Entwickelt man die Logarithmen zur Rechten nach Potenzen von x, so kommt:

$$\log\cos x = -\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x}{\frac{2\mu-1}{2}\pi}\right)^{2k}, \quad \left(x^4<\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\right),$$

$$\log\frac{\sin x}{x} = -\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x}{\mu\pi}\right)^{2k}, \qquad (x^4<\pi^4).$$

Da die Convergenz dieser Reihen in keiner Weise durch die Vorzeichen der Glieder bedingt ist, so kann man die Folge der Summationen vertauschen, und erhält:

$$\log\cos x = -\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{2k}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(2\mu-1)^{-2k},$$

$$\log\sin x = -\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2k}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\mu^{-2k}.$$

Setzt man

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}\mu^{-2k} = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}\overset{k}{B},$$

so ergibt sich durch Multiplication mit 2^{-2k}:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(2\mu)^{-2k} = \frac{\pi^{2k}}{2(2k)!}\overset{k}{B},$$

und durch Subtraction beider Gleichungen:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(2\mu-1)^{-2k} = \frac{2^{2k}-1}{2}\,\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}\overset{k}{B}.$$

Hiermit sind zunächst die Reihenentwickelungen der Functionen

$$\log\cos x, \quad \log\sin x, \quad \log(e^x \pm e^{-x})$$

auf dieselben Grössen $\overset{k}{B}$ zurückgeführt. Durch Differenziation ergeben sich daraus die der Functionen

$$\operatorname{tg} x, \quad \cot x, \quad \frac{e^x \mp e^{-x}}{e^x \pm e^{-x}},$$

und durch Subtraction und Addition die von

$$\log \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cosec} x, \text{ etc.}$$

Zur Bestimmung der Werthe der $\overset{k}{B}$ entwickele man die Elemente der Gleichungen

$$\cos x \operatorname{tg} x = \sin x,$$
$$\sin x \cot x = \cos x,$$
$$\sin x \operatorname{cosec} x = 1$$

gemäss den so erhaltenen Reihenausdrücken, so kommt:

$$\sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{(-1)^h x^{2h}}{(2h)!} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{4^k(4^k-1)}{(2k)!} \overset{k}{B} x^{2k-1} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

$$\sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{(-1)^h x^{2h+1}}{(2h+1)!} \left\{ \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{4^k}{(2k)!} \overset{k}{B} x^{2k-1} \right\} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{(-1)^h x^{2h+1}}{(2h+1)!} \left\{ \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{4^k-2}{(2k)!} \overset{k}{B} x^{2k-1} \right\} = 1.$$

Setzt man $k-h$ für k und vergleicht die Coefficienten von x^{2k-1}, x^{2k}, so erhält man die Relationen:

$$\sum_{h=0}^{h=k-1} \frac{(-1)^h 4^{k-h}(4^{k-h}-1)}{(2h)!(2k-2h)!} \overset{k-h}{B} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!},$$

$$\sum_{h=0}^{h=k-1} \frac{(-1)^h 4^{k-h}}{(2h+1)!(2k-2h)!} \overset{k-h}{B} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} - \frac{(-1)^k}{(2k)!},$$

$$\sum_{h=0}^{h=k-1} \frac{(-1)^h (4^{k-h}-2)}{(2h+1)!(2k-h)!} \overset{k-h}{B} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}.$$

Nach Vertauschung von h mit $k-h$ und Entfernung der Nenner gehen dieselben in die bekannten recurrirenden Gleichungen der Bernoulli'schen Zahlen über:

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{h+1} (2k)_{2h} 4^h (4^h-1) \overset{h}{B} = 2k,$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{h+1} (2k+1)_{2h} 4^h \overset{h}{B} = 2k,$$

$$\sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{h+1} (2k+1)_{2h} (4^h-2) \overset{h}{B} = 1,$$

durch welche die $\overset{h}{B}$ als rationale Brüche bestimmt sind.

Ebenso einfach ergibt sich der Ausdruck der Summe der ganzen positiven Potenzen der natürlichen Zahlenreihe. Der Kürze wegen sei

$$A = e^{nx} - 1, \quad B = \tfrac{1}{2} \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} - \frac{1}{x};$$

dann ist:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} e^{kx} = \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1} = \left(\frac{1}{x} - \tfrac{1}{2}\right) A + AB.$$

Setzt man für e^{kx}, A, B ihre Reihenausdrücke, so kommt:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{k^m x^m}{m!} = \left(\frac{1}{x} - \tfrac{1}{2}\right) \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{n^m x^m}{m!}$$

$$+ \sum_{h=1}^{h=\infty} (-1)^{h+1} \frac{\overset{h}{B}}{(2h)!} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{n^m x^{m+2h-1}}{m!},$$

und, wenn man im letzten Theile $m - 2h + 1$ für m setzt und die Summationsfolge umkehrt,

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{x^m}{m!} \sum_{k=0}^{k=n-1} k^m = \sum_{m=0}^{m=x} \frac{n^{m+1} x^m}{(m+1)!} - \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{n^m x^m}{m!}$$

$$+ \sum_{m=2}^{m=x} x^m \sum_{h=1}^{h=\frac{m}{2}} (-1)^{h+1} \frac{\overset{h}{B} n^{m-2h+1}}{(2h)!\,(m-2h+1)!}.$$

Die Vergleichung der Coefficienten von x^m ergibt für $m=0$ $n=n$, für jedes andere m:

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} k^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} - \tfrac{1}{2} n^m + \frac{1}{m+1} \sum_{h=1}^{h=\frac{m}{2}} (-1)^{h+1} (m+1)_{2h} \overset{h}{B} n^{m-2h+1}.$$

Dieser letzte Satz ist es namentlich, dessen Herleitung, wie sie gewöhnlich geschieht, nämlich von der Theorie der arithmetischen Reihen höherer Ordnung aus, einen grossen Aufwand von Operationen erfordert, an welchem demnach der Gewinn an Einfachheit in der hier von ihm eingenommenen Stellung am Deutlichsten in die Augen fällt. Der Einwand: man dürfe die Behandlung der speciellen arithmetischen Reihe 1^m, 2^m, 3^m,.... nicht von der allgemeinen Theorie der letztern trennen, ist ungegründet in mehr als einer Beziehung. Denn erstens bedarf die Analysis keiner solchen Theorie, da deren Resultate einfacher aus andern Theoremen fliessen; und zweitens ist die obige Summationsformel kein unmittelbares Ergebniss derselben, sondern eine weitergehende Speculation mit Zuziehung fremder Elemente, — die Lö-

sung einer Aufgabe, die zwar als specielle in der jener Theorie enthalten ist, deren specialisirende Bedingungen jedoch innerhalb derselben keinen Ausdruck finden.

XXIII.

Ueber die Bestimmung eines durch fünf gegebene Punkte gehenden Kegelschnitts durch Rechnung.

Von
dem Herausgeber.

---

§. 1.

Die gewöhnliche analytische Auflösung der Aufgabe: durch fünf gegebene Punkte einen Kegelschnitt zu legen, ist zwar im Allgemeinen äusserst einfach, weil sie nur die Auflösung von fünf Gleichungen des ersten Grades erfordert, und in der Abhandlung Thl. IX. Nr. XXVIII. S. 293. habe ich vollständig entwickelte Formeln zur independenten Bestimmung der Coefficienten der Gleichung des gesuchten Kegelschnitts gegeben; wenn es sich aber um die wirkliche numerische Berechnung der den gesuchten Kegelschnitt seiner Lage und Grösse nach bestimmenden Elemente: der Lage und Grösse der Axen, der Lage des Mittelpunkts, der Excentricität, des Parameters, u. s. w. handelt, so ist der Gebrauch der in Rede stehenden Formeln im höchsten Grade beschwerlich, und man muss dann nothwendig auch noch alle die Formeln zu Hülfe nehmen, welche bei der sogenannten Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen entwickelt zu werden pflegen, was aber unter allen Umständen im höchsten Grade unbequem ist und überhaupt wenig

praktischen Nutzen hat. Ich will daher in dieser Abhandlung Formeln entwickeln, durch welche die den gesuchten Kegelschnitt bestimmenden Elemente unmittelbar aus den Coordinaten der gegebenen Punkte mit aller der Leichtigkeit und Bequemlichkeit berechnet werden können, welche dieser Gegenstand überhaupt zu gestatten scheint, und halte die Mittheilung dieser Formeln an diesem Orte für gerechtfertigt, weil die Bestimmung eines durch fünf gegebene Punkte gehenden Kegelschnitts auf dem Wege der Rechnung für viele Anwendungen, z. B. in der Astronomie bei der Bestimmung der Bahnen der Doppelsterne, wenn man auch bei diesem Gegenstande jetzt gewöhnlich nur vier Beobachtungen zu Grunde legt, indem man dann noch die Zeiten der Beobachtungen zu Hülfe nimmt, von Wichtigkeit ist oder wenigstens sein kann.

§. 2.

Die fünf gegebenen Punkte wollen wir durch

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4$$

bezeichnen, und nehmen an, dass nicht drei dieser Punkte in gerader Linie liegen, weil bekanntlich ein Kegelschnitt von einer geraden Linie in nicht mehr als in zwei Punkten geschnitten werden kann. Die gegebenen polaren Coordinaten dieser fünf Punkte in Bezug auf ein beliebiges System sollen respective durch

$$\mathrm{A}_0,\, \mathrm{R}_0;\quad \mathrm{A}_1,\, \mathrm{R}_1;\quad \mathrm{A}_2,\, \mathrm{R}_2;\quad \mathrm{A}_3,\, \mathrm{R}_3;\quad \mathrm{A}_4,\, \mathrm{R}_4$$

bezeichnet werden; wären die rechtwinkligen Coordinaten

$$x_0,\, y_0;\quad x_1,\, y_1;\quad x_2,\, y_2;\quad x_3,\, y_3;\quad x_4,\, y_4$$

der Punkte

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4$$

gegeben, so würden sich aus denselben die polaren Coordinaten immer leicht mittelst der Formeln

$$x_0 = \mathrm{R}_0 \cos \mathrm{A}_0,\quad y_0 = \mathrm{R}_0 \sin \mathrm{A}_0;$$

$$x_1 = \mathrm{R}_1 \cos \mathrm{A}_1,\quad y_1 = \mathrm{R}_1 \sin \mathrm{A}_1;$$

$$x_2 = \mathrm{R}_2 \cos \mathrm{A}_2,\quad y_2 = \mathrm{R}_2 \sin \mathrm{A}_2;$$

$$x_3 = \mathrm{R}_3 \cos \mathrm{A}_3,\quad y_3 = \mathrm{R}_3 \sin \mathrm{A}_3;$$

$$x_4 = \mathrm{R}_4 \cos \mathrm{A}_4,\quad y_4 = \mathrm{R}_4 \sin \mathrm{A}_4$$

berechnen lassen, was hier einer weiteren Erläuterung nicht bedarf.

Durch den Punkt A_0 als Pol oder Anfang denken wir uns nun ein neues, dem primitiven Systeme paralleles System gelegt, und bezeichnen die polaren Coordinaten der Punkte

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4$$

in Bezug auf dieses neue System respective durch

$$\alpha_1,\ \varrho_1;\quad \alpha_2,\ \varrho_2;\quad \alpha_3,\ \varrho_3;\quad \alpha_4,\ \varrho_4.$$

Da die primitiven rechtwinkligen Coordinaten des neuen Pols oder Anfangs A_0

$$R_0 \cos A_0,\quad R_0 \sin A_0$$

und die primitiven rechtwinkligen Coordinaten der Punkte

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4$$

respective

$$\begin{aligned}
&R_1 \cos A_1,\quad R_1 \sin A_1;\\
&R_2 \cos A_2,\quad R_2 \sin A_2;\\
&R_3 \cos A_3,\quad R_3 \sin A_3;\\
&R_4 \cos A_4,\quad R_4 \sin A_4;
\end{aligned}$$

die secundären rechtwinkligen Coordinaten derselben Punkte aber

$$\begin{aligned}
&\varrho_1 \cos\alpha_1,\quad \varrho_1 \sin\alpha_1;\\
&\varrho_2 \cos\alpha_2,\quad \varrho_2 \sin\alpha_2;\\
&\varrho_3 \cos\alpha_3,\quad \varrho_3 \sin\alpha_3;\\
&\varrho_4 \cos\alpha_4,\quad \varrho_4 \sin\alpha_4
\end{aligned}$$

sind; so hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden allgemein gültigen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&R_1 \cos A_1 = R_0 \cos A_0 + \varrho_1 \cos\alpha_1,\quad R_1 \sin A_1 = R_0 \sin A_0 + \varrho_1 \sin\alpha_1;\\
&R_2 \cos A_2 = R_0 \cos A_0 + \varrho_2 \cos\alpha_2,\quad R_2 \sin A_2 = R_0 \sin A_0 + \varrho_2 \sin\alpha_2;\\
&R_3 \cos A_3 = R_0 \cos A_0 + \varrho_3 \cos\alpha_3,\quad R_3 \sin A_3 = R_0 \sin A_0 + \varrho_3 \sin\alpha_3;\\
&R_4 \cos A_4 = R_0 \cos A_0 + \varrho_4 \cos\alpha_4,\quad R_4 \sin A_4 = R_0 \sin A_0 + \varrho_4 \sin\alpha_4;
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
&\varrho_1 \cos\alpha_1 = R_1 \cos A_1 - R_0 \cos A_0,\quad \varrho_1 \sin\alpha_1 = R_1 \sin A_1 - R_0 \sin A_0;\\
&\varrho_2 \cos\alpha_2 = R_2 \cos A_2 - R_0 \cos A_0,\quad \varrho_2 \sin\alpha_2 = R_2 \sin A_2 - R_0 \sin A_0;\\
&\varrho_3 \cos\alpha_3 = R_3 \cos A_3 - R_0 \cos A_0,\quad \varrho_3 \sin\alpha_3 = R_3 \sin A_3 - R_0 \sin A_0;\\
&\varrho_4 \cos\alpha_4 = R_4 \cos A_4 - R_0 \cos A_0,\quad \varrho_4 \sin\alpha_4 = R_4 \sin A_4 - R_0 \sin A_0;
\end{aligned}$$

mittelst welcher Gleichungen, was einer weiteren Erläuterung hier nicht bedarf, die Coordinaten

$$\alpha_1, \varrho_1; \quad \alpha_2, \varrho_2; \quad \alpha_3, \varrho_3; \quad \alpha_4, \varrho_4$$

aus den Coordinaten

$$A_0, R_0; \quad A_1, R_1; \quad A_2, R_2; \quad A_3, R_3; \quad A_4, R_4$$

leicht berechnet werden können, so dass wir also berechtigt sind, die ganze Auflösung unserer Aufgabe auf die Coordinaten

$$\alpha_1, \varrho_1; \quad \alpha_2, \varrho_2; \quad \alpha_3, \varrho_3; \quad \alpha_4, \varrho_4$$

als gegebene Stücke zu gründen.

Die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 in dem Systeme, dessen Pol oder Anfang der Punkt A_0 ist, wollen wir respective durch

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1; \quad \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2; \quad \mathfrak{x}_3, \mathfrak{y}_3; \quad \mathfrak{x}_4, \mathfrak{y}_4$$

bezeichnen, so dass also

$$\mathfrak{x}_1 = \varrho_1 \cos\alpha_1, \quad \mathfrak{y}_1 = \varrho_1 \sin\alpha_1;$$

$$\mathfrak{x}_2 = \varrho_2 \cos\alpha_2, \quad \mathfrak{y}_2 = \varrho_2 \sin\alpha_2;$$

$$\mathfrak{x}_3 = \varrho_3 \cos\alpha_3, \quad \mathfrak{y}_3 = \varrho_3 \sin\alpha_3;$$

$$\mathfrak{x}_4 = \varrho_4 \cos\alpha_4, \quad \mathfrak{y}_4 = \varrho_4 \sin\alpha_4$$

ist.

§. 3.

Zuerst wollen wir annehmen, dass durch die fünf gegebenen Punkte

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4,$$

von denen bekanntlich nicht drei in einer geraden Linie liegen, eine Ellipse oder Hyperbel beschrieben werden solle, und wollen die rechtwinkligen Coordinaten der fünf gegebenen Punkte in Bezug auf das System der beiden Axen dieser gesuchten Ellipse oder Hyperbel respective durch

$$X_0, Y_0; \quad X_1, Y_1; \quad X_2, Y_2; \quad X_3, Y_3; \quad X_4, Y_4$$

bezeichnen, indem wir annehmen, dass für die Hyperbel die Axe der ersten Coordinaten oder der sogenannten Abscissen die Hauptaxe sein soll, in welcher die beiden Scheitel der Curve liegen.

Die Annahme des positiven Theils der Axe der X ist bei beiden Curven willkührlich; was aber den positiven Theil der Axe der Y betrifft, so muss man sich denselben immer so angenommen denken, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der X an durch den rechten Winkel (XY) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der Y zu gelangen, ganz nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y, oder, um von dem positiven Theile der Axe der $\mathfrak{x}$ an durch den rechten Winkel $(\mathfrak{x}\mathfrak{y})$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $\mathfrak{y}$ zu gelangen. Denken wir uns nun ferner von dem Mittelpunkte der gesuchten Ellipse oder Hyperbel aus eine mit den positiven Theilen der Axen der x oder $\mathfrak{x}$ parallele und gleich gerichtete Linie gezogen, so soll der von dem positiven Theile der Axe der X mit dieser Linie eingeschlossene Winkel, indem wir denselben von der in Rede stehenden Linie an in demselben Sinne wie die Winkel

$$\mathrm{A}_0, \ \mathrm{A}_1, \ \mathrm{A}_2, \ \mathrm{A}_3, \ \mathrm{A}_4$$

oder

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \alpha_4$$

von 0 bis 360° zählen, durch θ bezeichnet werden; und legen wir dann durch den Punkt A_0 ein dem Systeme der XY paralleles Coordinatensystem der $X'Y'$, in Bezug auf welches die Coordinaten der Punkte

$$A_1, \ A_2, \ A_3, \ A_4$$

respective durch

$$X_1', \ Y_1'; \quad X_2', \ Y_2'; \quad X_3', \ Y_3'; \quad X_4', \ Y_4'$$

bezeichnet werden, so haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{x}_1 = X_1'\cos\theta - Y_1'\sin\theta, \quad \mathfrak{y}_1 = X_1'\sin\theta + Y_1'\cos\theta;$$

$$\mathfrak{x}_2 = X_2'\cos\theta - Y_2'\sin\theta, \quad \mathfrak{y}_2 = X_2'\sin\theta + Y_2'\cos\theta;$$

$$\mathfrak{x}_3 = X_3'\cos\theta - Y_3'\sin\theta, \quad \mathfrak{y}_3 = X_3'\sin\theta + Y_3'\cos\theta;$$

$$\mathfrak{x}_4 = X_4'\cos\theta - Y_4'\sin\theta, \quad \mathfrak{y}_4 = X_4'\sin\theta + Y_4'\cos\theta;$$

aus denen sich sogleich umgekehrt

$$X_1' = \mathfrak{x}_1 \cos\theta + \mathfrak{y}_1 \sin\theta, \quad Y_1' = -\mathfrak{x}_1 \sin\theta + \mathfrak{y}_1 \cos\theta;$$
$$X_2' = \mathfrak{x}_2 \cos\theta + \mathfrak{y}_2 \sin\theta, \quad Y_2' = -\mathfrak{x}_2 \sin\theta + \mathfrak{y}_2 \cos\theta;$$
$$X_3' = \mathfrak{x}_3 \cos\theta + \mathfrak{y}_3 \sin\theta, \quad Y_3' = -\mathfrak{x}_3 \sin\theta + \mathfrak{y}_3 \cos\theta;$$
$$X_4' = \mathfrak{x}_4 \cos\theta + \mathfrak{y}_4 \sin\theta, \quad Y_4' = -\mathfrak{x}_4 \sin\theta + \mathfrak{y}_4 \cos\theta$$

ergiebt. Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist aber ferner

$$X_1 = X_0 + X_1', \quad Y_1 = Y_0 + Y_1';$$
$$X_2 = X_0 + X_2', \quad Y_2 = Y_0 + Y_2';$$
$$X_3 = X_0 + X_3', \quad Y_3 = Y_0 + Y_3';$$
$$X_4 = X_0 + X_4', \quad Y_4 = Y_0 + Y_4';$$

also:

$$X_1 = X_0 + \mathfrak{x}_1 \cos\theta + \mathfrak{y}_1 \sin\theta, \quad Y_1 = Y_0 - \mathfrak{x}_1 \sin\theta + \mathfrak{y}_1 \cos\theta;$$
$$X_2 = X_0 + \mathfrak{x}_2 \cos\theta + \mathfrak{y}_2 \sin\theta, \quad Y_2 = Y_0 - \mathfrak{x}_2 \sin\theta + \mathfrak{y}_2 \cos\theta;$$
$$X_3 = X_0 + \mathfrak{x}_3 \cos\theta + \mathfrak{y}_3 \sin\theta, \quad Y_3 = Y_0 - \mathfrak{x}_3 \sin\theta + \mathfrak{y}_3 \cos\theta;$$
$$X_4 = X_0 + \mathfrak{x}_4 \cos\theta + \mathfrak{y}_4 \sin\theta, \quad Y_4 = Y_0 - \mathfrak{x}_4 \sin\theta + \mathfrak{y}_4 \cos\theta;$$

und da nun nach §. 2.

$$\mathfrak{x}_1 = \varrho_1 \cos\alpha_1, \quad \mathfrak{y}_1 = \varrho_1 \sin\alpha_1;$$
$$\mathfrak{x}_2 = \varrho_2 \cos\alpha_2, \quad \mathfrak{y}_2 = \varrho_2 \sin\alpha_2;$$
$$\mathfrak{x}_3 = \varrho_3 \cos\alpha_3, \quad \mathfrak{y}_3 = \varrho_3 \sin\alpha_3;$$
$$\mathfrak{x}_4 = \varrho_4 \cos\alpha_4, \quad \mathfrak{y}_4 = \varrho_4 \sin\alpha_4$$

ist; so ist, wie man nach gehöriger Substitution sogleich findet:

$$X_1 = X_0 + \varrho_1 \cos(\alpha_1 - \theta), \quad Y_1 = Y_0 + \varrho_1 \sin(\alpha_1 - \theta);$$
$$X_2 = X_0 + \varrho_2 \cos(\alpha_2 - \theta), \quad Y_2 = Y_0 + \varrho_2 \sin(\alpha_2 - \theta);$$
$$X_3 = X_0 + \varrho_3 \cos(\alpha_3 - \theta), \quad Y_3 = Y_0 + \varrho_3 \sin(\alpha_3 - \theta);$$
$$X_4 = X_0 + \varrho_4 \cos(\alpha_4 - \theta), \quad Y_4 = Y_0 + \varrho_4 \sin(\alpha_4 - \theta).$$

Lässt man nun im Folgenden immer die oberen Zeichen der Ellipse, die unteren Zeichen der Hyperbel entsprechen, und bezeichnet, wie gewöhnlich, durch a und b die beiden Halbaxen

dieser Curven; so hat man, weil die gesuchte Ellipse oder Hyperbel durch die fünf Punkte

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$$

deren Coordinaten in Bezug auf das System der beiden Axen dieser Curven X_0, Y_0; X_1, Y_1; X_2, Y_2; X_3, Y_3; X_4, Y_4 sind, gehen soll, die fünf folgenden Gleichungen:

$$\left(\frac{X_0}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{Y_0}{b}\right)^2 = 1,$$

$$\left\{\frac{X_0+\varrho_1\cos(\alpha_1-\theta)}{a}\right\}^2 \pm \left\{\frac{Y_0+\varrho_1\sin(\alpha_1-\theta)}{b}\right\}^2 = 1,$$

$$\left\{\frac{X_0+\varrho_2\cos(\alpha_2-\theta)}{a}\right\}^2 \pm \left\{\frac{Y_0+\varrho_2\sin(\alpha_2-\theta)}{b}\right\}^2 = 1,$$

$$\left\{\frac{X_0+\varrho_3\cos(\alpha_3-\theta)}{a}\right\}^2 \pm \left\{\frac{Y_0+\varrho_3\sin(\alpha_3-\theta)}{b}\right\}^2 = 1,$$

$$\left\{\frac{X_0+\varrho_4\cos(\alpha_4-\theta)}{a}\right\}^2 \pm \left\{\frac{Y_0+\varrho_4\sin(\alpha_4-\theta)}{b}\right\}^2 = 1;$$

aus denen die fünf Grössen θ, a, b, X_0, Y_0 bestimmt werden müssen.

Entwickelt man die in den vier letzten Gleichungen vorkommenden Quadrate und zieht dann von diesen Gleichungen die erste Gleichung ab, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$\varepsilon = \pm\frac{a^2}{b^2}$$

gesetzt wird, nach einigen leichten Reductionen die folgenden Gleichungen:

$$\{2X_0+\varrho_1\cos(\theta-\alpha_1)\}\cos(\theta-\alpha_1) = \varepsilon\{2Y_0-\varrho_1\sin(\theta-\alpha_1)\}\sin(\theta-\alpha_1),$$

$$\{2X_0+\varrho_2\cos(\theta-\alpha_2)\}\cos(\theta-\alpha_2) = \varepsilon\{2Y_0-\varrho_2\sin(\theta-\alpha_2)\}\sin(\theta-\alpha_2),$$

$$\{2X_0+\varrho_3\cos(\theta-\alpha_3)\}\cos(\theta-\alpha_3) = \varepsilon\{2Y_0-\varrho_3\sin(\theta-\alpha_3)\}\sin(\theta-\alpha_3),$$

$$\{2X_0+\varrho_4\cos(\theta-\alpha_4)\}\cos(\theta-\alpha_4) = \varepsilon\{2Y_0-\varrho_4\sin(\theta-\alpha_4)\}\sin(\theta-\alpha_4)$$

oder

$$2X_0-2\varepsilon Y_0\operatorname{tang}(\theta-\alpha_1)$$
$$=-\varrho_1\{\cos(\theta-\alpha_1)+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_1)\operatorname{tang}(\theta-\alpha_1)\},$$

$$2X_0-2\varepsilon Y_0\operatorname{tang}(\theta-\alpha_2)$$
$$=-\varrho_2\{\cos(\theta-\alpha_2)+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_2)\operatorname{tang}(\theta-\alpha_2)\},$$

$$2X_0-2\varepsilon Y_0\operatorname{tang}(\theta-\alpha_3)$$
$$=-\varrho_3\{\cos(\theta-\alpha_3)+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_3)\operatorname{tang}(\theta-\alpha_3)\},$$

$$2X_0-2\varepsilon Y_0\operatorname{tang}(\theta-\alpha_4)$$
$$=-\varrho_4\{\cos(\theta-\alpha_4)+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_4)\operatorname{tang}(\theta-\alpha_4)\}.$$

Multiplicirt man die drei ersten dieser vier Gleichungen nach der Reihe mit den folgenden Differenzen:

$$\operatorname{tang}(\theta-\alpha_2)-\operatorname{tang}(\theta-\alpha_3)=-\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_3)}{\cos(\theta-\alpha_2)\cos(\theta-\alpha_3)},$$

$$\operatorname{tang}(\theta-\alpha_3)-\operatorname{tang}(\theta-\alpha_1)=-\frac{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}{\cos(\theta-\alpha_3)\cos(\theta-\alpha_1)},$$

$$\operatorname{tang}(\theta-\alpha_1)-\operatorname{tang}(\theta-\alpha_2)=-\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\cos(\theta-\alpha_1)\cos(\theta-\alpha_2)};$$

addirt sie dann zu einander, multiplicirt die dadurch erhaltene Gleichung mit

$$\cos(\theta-\alpha_1)\cos(\theta-\alpha_2)\cos(\theta-\alpha_3),$$

und erhöhet in der dadurch hervorgehenden Gleichung alle Indices um eine Einheit, so erhält man die zwei folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}0= {} & \varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\{\cos(\theta-\alpha_1)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_1)^2\}\\ & +\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\{\cos(\theta-\alpha_2)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_2)^2\}\\ & +\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\{\cos(\theta-\alpha_3)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_3)^2\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0= {} & \varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_4)\{\cos(\theta-\alpha_2)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_2)^2\}\\ & +\varrho_3\sin(\alpha_4-\alpha_2)\{\cos(\theta-\alpha_3)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_3)^2\}\\ & +\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\{\cos(\theta-\alpha_4)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_4)^2\};\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}0= \;&\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)\cos2(\theta-\alpha_1)\}\\&+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)\cos2(\theta-\alpha_2)\}\\&+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)\cos2(\theta-\alpha_3)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0= \;&\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_4)\{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)\cos2(\theta-\alpha_2)\}\\&+\varrho_3\sin(\alpha_4-\alpha_2)\{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)\cos2(\theta-\alpha_3)\}\\&+\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)\cos2(\theta-\alpha_4)\};\end{aligned}$$

folglich, wenn wir der Kürze wegen:

$$P_0=\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2),$$

$$P_1=\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_4)+\varrho_3\sin(\alpha_4-\alpha_2)+\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3);$$

ferner

$$Q_0=\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos2\alpha_1+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\cos2\alpha_2+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos2\alpha_3,$$

$$Q_1=\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_4)\cos2\alpha_2+\varrho_3\sin(\alpha_4-\alpha_2)\cos2\alpha_3+\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos2\alpha_4$$

und

$$R_0=\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin2\alpha_1+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin2\alpha_2+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin2\alpha_3,$$

$$R_1=\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_4)\sin2\alpha_2+\varrho_3\sin(\alpha_4-\alpha_2)\sin2\alpha_3+\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin2\alpha_4$$

setzen:

$$(1+\varepsilon)P_0=-(1-\varepsilon)(Q_0\cos2\theta+R_0\sin2\theta),$$

$$(1+\varepsilon)P_1=-(1-\varepsilon)(Q_1\cos2\theta+R_1\sin2\theta);$$

woraus durch Division

$$\frac{P_0}{P_1}=\frac{Q_0\cos2\theta+R_0\sin2\theta}{Q_1\cos2\theta+R_1\sin2\theta}=\frac{Q_0+R_0\tang2\theta}{Q_1+R_1\tang2\theta},$$

also

$$1)\quad\ldots\ldots\quad \tang2\theta=-\frac{P_0Q_1-P_1Q_0}{P_0R_1-P_1R_0}$$

folgt.

Ueberlegt man nun, dass, wie man mittelst einiger bekannten goniometrischen Relationen sogleich findet,

$$\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin(\alpha_4-\alpha_2)-\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_3-\alpha_4)=\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_4).$$

ist, so erhält man aus dem Obigen ohne alle Schwierigkeit:

$$\begin{aligned}
P_0Q_1-P_1Q_0 = & -\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_4)(\cos 2\alpha_1-\cos 2\alpha_2)\\
& -\varrho_1\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_4-\alpha_2)(\cos 2\alpha_1-\cos 2\alpha_3)\\
& -\varrho_1\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_2-\alpha_3)(\cos 2\alpha_1-\cos 2\alpha_4)\\
& -\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_4)(\cos 2\alpha_2-\cos 2\alpha_3)\\
& -\varrho_2\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)(\cos 2\alpha_2-\cos 2\alpha_4)\\
& -\varrho_3\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_2)(\cos 2\alpha_3-\cos 2\alpha_4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_0R_1-P_1R_0 = & -\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_4)(\sin 2\alpha_1-\sin 2\alpha_2)\\
& -\varrho_1\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_4-\alpha_2)(\sin 2\alpha_1-\sin 2\alpha_3)\\
& -\varrho_1\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_2-\alpha_3)(\sin 2\alpha_1-\sin 2\alpha_4)\\
& -\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_4)(\sin 2\alpha_2-\sin 2\alpha_3)\\
& -\varrho_2\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)(\sin 2\alpha_2-\sin 2\alpha_4)\\
& -\varrho_3\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_2)(\sin 2\alpha_3-\sin 2\alpha_4);
\end{aligned}$$

also, wenn man die Differenzen der Cosinus und Sinus in Factoren zerlegt:

$$\begin{aligned}
P_0Q_1-P_1Q_0 = \; & 2\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_3-\alpha_4)\\
& +2\varrho_1\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1+\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_3)\sin(\alpha_4-\alpha_2)\\
& +2\varrho_1\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1+\alpha_4)\sin(\alpha_1-\alpha_4)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\\
& +2\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_4)\\
& +2\varrho_2\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_2+\alpha_4)\sin(\alpha_2-\alpha_4)\sin(\alpha_3-\alpha_1)\\
& +2\varrho_3\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3+\alpha_4)\sin(\alpha_3-\alpha_4)\sin(\alpha_1-\alpha_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_0R_1-P_1R_0 = & -2\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_3-\alpha_4)\\
& -2\varrho_1\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos(\alpha_1+\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_3)\sin(\alpha_4-\alpha_2)\\
& -2\varrho_1\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos(\alpha_1+\alpha_4)\sin(\alpha_1-\alpha_4)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\\
& -2\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_4)\\
& -2\varrho_2\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos(\alpha_2+\alpha_4)\sin(\alpha_2-\alpha_4)\sin(\alpha_3-\alpha_1)\\
& -2\varrho_3\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos(\alpha_3+\alpha_4)\sin(\alpha_3-\alpha_4)\sin(\alpha_1-\alpha_2);
\end{aligned}$$

und setzen wir nun der Kürze wegen:

$$2) \;.\;.\; M = \varrho_1\varrho_2 \sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_3-\alpha_4)$$
$$+\varrho_1\varrho_3 \sin(\alpha_1+\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_3)\sin(\alpha_4-\alpha_2)$$
$$+\varrho_1\varrho_4 \sin(\alpha_1+\alpha_4)\sin(\alpha_1-\alpha_4)\sin(\alpha_2-\alpha_3)$$
$$+\varrho_2\varrho_3 \sin(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_4)$$
$$+\varrho_2\varrho_4 \sin(\alpha_2+\alpha_4)\sin(\alpha_2-\alpha_4)\sin(\alpha_3-\alpha_1)$$
$$+\varrho_1\varrho_4 \sin(\alpha_3+\alpha_4)\sin(\alpha_3-\alpha_4)\sin(\alpha_1-\alpha_2)$$

und

$$3) \;.\;.\; N = \varrho_1\varrho_2 \cos(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_3-\alpha_4)$$
$$+\varrho_1\varrho_3 \cos(\alpha_1+\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_3)\sin(\alpha_4-\alpha_2)$$
$$+\varrho_1\varrho_4 \cos(\alpha_1+\alpha_4)\sin(\alpha_1-\alpha_4)\sin(\alpha_2-\alpha_3)$$
$$+\varrho_2\varrho_3 \cos(\alpha_2+\alpha_3)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_4)$$
$$+\varrho_2\varrho_4 \cos(\alpha_2+\alpha_4)\sin(\alpha_2-\alpha_4)\sin(\alpha_3-\alpha_1)$$
$$+\varrho_3\varrho_4 \cos(\alpha_3+\alpha_4)\sin(\alpha_3-\alpha_4)\sin(\alpha_1-\alpha_2);$$

so ist nach dem Obigen:

$$4) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \tang 2\theta = \frac{M}{N}.$$

Nachdem man mittelst dieser Formel θ gefunden hat, lässt sich ε mittelst verschiedener, aus dem Obigen sich unmittelbar ergebender Formeln leicht finden. Die einfachste Methode scheint mir aber die folgende zu sein, mit deren Entwickelung ich mich daher auch, um nicht zu weitläufig zu werden, für jetzt begnügen, und nur am Ende dieses Paragraphen noch kurz auf die Berechnung dieser Grösse zurückkommen werde. Aus den beiden oben gefundenen Gleichungen

$$(1+\varepsilon)P_0 = -(1-\varepsilon)(Q_0\cos 2\theta + R_0\sin 2\theta),$$
$$(1+\varepsilon)P_1 = -(1-\varepsilon)(Q_1\cos 2\theta + R_1\sin 2\theta)$$

erhält man, wenn man etwa die erste dieser beiden Gleichungen benutzt, auf der Stelle:

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = -\cos 2\theta\,\frac{Q_0 + R_0\tang 2\theta}{P_0},$$
$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = -\sin 2\theta\,\frac{R_0 + Q_0\cot 2\theta}{P_0};$$

und führt man nun in diese Formeln die aus dem Obigen bekannten Werthe

$$\tan 2\theta = -\frac{P_0Q_1-P_1Q_0}{P_0R_1-P_1R_0},\quad \cot 2\theta = -\frac{P_0R_1-P_1R_0}{P_0Q_1-P_1Q_0}$$

ein, so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = -\cos 2\theta\,\frac{Q_0R_1-Q_1R_0}{P_0R_1-P_1R_0},$$

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \sin 2\theta\,\frac{Q_0R_1-Q_1R_0}{P_0Q_1-P_1Q_0}.$$

Nun ist aber, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\begin{aligned}
Q_0R_1 - Q_1R_0 = &-\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_4)\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)\\
&-\varrho_1\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_4-\alpha_2)\sin 2(\alpha_1-\alpha_3)\\
&-\varrho_1\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin 2(\alpha_1-\alpha_4)\\
&-\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_4)\sin 2(\alpha_2-\alpha_3)\\
&-\varrho_2\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin 2(\alpha_2-\alpha_4)\\
&-\varrho_3\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin 2(\alpha_3-\alpha_4),
\end{aligned}$$

also offenbar nach dem Obigen, wenn man der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
5)\quad \ldots\quad L = &\ \varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_4)\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)\\
&+\varrho_1\varrho_3\sin(\alpha_4-\alpha_2)\sin 2(\alpha_1-\alpha_3)\\
&+\varrho_1\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin 2(\alpha_1-\alpha_4)\\
&+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_4)\sin 2(\alpha_2-\alpha_3)\\
&+\varrho_2\varrho_4\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin 2(\alpha_2-\alpha_4)\\
&+\varrho_3\varrho_4\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin 2(\alpha_3-\alpha_4)
\end{aligned}$$

setzt:

$$6)\quad \ldots\quad \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{L}{2M}\sin 2\theta,\quad \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = -\frac{L}{2N}\cos 2\theta.$$

Hat man aber mittelst einer dieser beiden Formeln $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ berechnet, so erhält man ε leicht mittelst der Formel:

$$7)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \varepsilon = \frac{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}-1}{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}+1}.$$

Aus 6) erhält man auch leicht:

$$8) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}=\pm\frac{L}{2\sqrt{M^2+N^2}},$$

welcher Ausdruck zwar von θ ganz unabhängig ist, es aber unentschieden lässt, welches Zeichen man zu nehmen hat.

Setzte man

$$9) \quad \ldots \quad \mathfrak{L}= \varrho_1\varrho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_3-\alpha_4)$$
$$+\varrho_1\varrho_3\cos(\alpha_1-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_3)\sin(\alpha_4-\alpha_2)$$
$$+\varrho_1\varrho_4\cos(\alpha_1-\alpha_4)\sin(\alpha_1-\alpha_4)\sin(\alpha_2-\alpha_3)$$
$$+\varrho_2\varrho_3\cos(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_4)$$
$$+\varrho_2\varrho_4\cos(\alpha_2-\alpha_4)\sin(\alpha_2-\alpha_4)\sin(\alpha_3-\alpha_1)$$
$$+\varrho_3\varrho_4\cos(\alpha_3-\alpha_4)\sin(\alpha_3-\alpha_4)\sin(\alpha_1-\alpha_2),$$

so wäre:

$$10) \quad \ldots \quad \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}=\frac{\mathfrak{L}}{M}\sin 2\theta,\quad \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}=-\frac{\mathfrak{L}}{N}\cos 2\theta;$$

und bei der Berechnung der Grössen $\mathfrak{L}$, M, N würde man sich nun am besten auf folgende Art verhalten:

Man berechne die Hülfsgrössen

$$A=\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_3-\alpha_4),$$
$$B=\varrho_1\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_3)\sin(\alpha_4-\alpha_2),$$
$$C=\varrho_1\varrho_4\sin(\alpha_1-\alpha_4)\sin(\alpha_2-\alpha_3),$$
$$D=\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_4),$$
$$E=\varrho_2\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_4)\sin(\alpha_3-\alpha_1),$$
$$F=\varrho_3\varrho_4\sin(\alpha_3-\alpha_4)\sin(\alpha_1-\alpha_2);$$

so ist:

$$\mathfrak{L}= A\cos(\alpha_1-\alpha_2)+B\cos(\alpha_1-\alpha_3)+C\cos(\alpha_1-\alpha_4)$$
$$+D\cos(\alpha_2-\alpha_3)+E\cos(\alpha_2-\alpha_4)+F\cos(\alpha_3-\alpha_4)$$

und

$$M= A\sin(\alpha_1+\alpha_2)+B\sin(\alpha_1+\alpha_3)+C\sin(\alpha_1+\alpha_4)$$
$$+D\sin(\alpha_2+\alpha_3)+E\sin(\alpha_2+\alpha_4)+F\sin(\alpha_3+\alpha_4),$$

$$N = A\cos(\alpha_1+\alpha_2) + B\cos(\alpha_1+\alpha_3) + C\cos(\alpha_1+\alpha_4)$$
$$+ D\cos(\alpha_2+\alpha_3) + E\cos(\alpha_2+\alpha_4) + F\cos(\alpha_3+\alpha_4);$$

wobei man sich auch noch die folgenden Relationen merken kann:

$$F = \frac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_3\varrho_4}A, \quad E = \frac{\varrho_1\varrho_3}{\varrho_2\varrho_4}B, \quad D = \frac{\varrho_1\varrho_4}{\varrho_2\varrho_3}C.$$

Zur Berechnung von X_0, Y_0 hat man nach dem Obigen die Gleichungen:

$$2X_0 - 2\varepsilon Y_0 \operatorname{tang}(\theta-\alpha_1)$$
$$= -\varrho_1\{\cos(\theta-\alpha_1) + \varepsilon\sin(\theta-\alpha_1)\operatorname{tang}(\theta-\alpha_1)\},$$
$$2X_0 - 2\varepsilon Y_0 \operatorname{tang}(\theta-\alpha_2)$$
$$= -\varrho_2\{\cos(\theta-\alpha_2) + \varepsilon\sin(\theta-\alpha_2)\operatorname{tang}(\theta-\alpha_2)\};$$

aus denen leicht

$$11)\quad \left\{\begin{aligned} 2X_0\sin(\alpha_1-\alpha_2) &= -\varrho_1\sin(\theta-\alpha_2)\{\cos(\theta-\alpha_1)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_1)^2\}\\ &\quad + \varrho_2\sin(\theta-\alpha_1)\{\cos(\theta-\alpha_2)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_2)^2\},\\ 2\varepsilon Y_0\sin(\alpha_1-\alpha_2) &= -\varrho_1\cos(\theta-\alpha_2)\{\cos(\theta-\alpha_1)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_1)^2\}\\ &\quad + \varrho_2\cos(\theta-\alpha_1)\{\cos(\theta-\alpha_2)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_2)^2\}\end{aligned}\right.$$

oder

$$12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{4X_0\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{1+\varepsilon} &= -\varrho_1\sin(\theta-\alpha_2)\{1+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\cos 2(\theta-\alpha_1)\}\\ &\quad + \varrho_2\sin(\theta-\alpha_1)\{1+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\cos 2(\theta-\alpha_2)\},\\ \frac{4\varepsilon Y_0\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{1+\varepsilon} &= -\varrho_1\cos(\theta-\alpha_2)\{1+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\cos 2(\theta-\alpha_1)\}\\ &\quad + \varrho_2\cos(\theta-\alpha_1)\{1+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\cos 2(\theta-\alpha_2)\}\end{aligned}\right.$$

folgt. Berechnet man die Hülfswinkel u_1, u_2 mittelst der Formeln:

$$13)\quad \operatorname{tang} u_1 = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\cos 2(\theta-\alpha_1), \quad \operatorname{tang} u_2 = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\cos 2(\theta-\alpha_2)$$

und setzt der Kürze wegen:

$$14)\quad K_1=-\frac{(1+\varepsilon)\varrho_1\cos(45^0-u_1)}{2\sqrt{2}.\cos u_1},\quad K_2=\frac{(1+\varepsilon)\varrho_2\cos(45^0-u_2)}{2\sqrt{2}.\cos u_2};$$

so ist:

$$15)\quad .\ .\ \begin{cases} X_0=K_1\sin(\theta-\alpha_2)+K_2\sin(\theta-\alpha_1), \\ \varepsilon Y_0=K_1\cos(\theta-\alpha_2)+K_2\cos(\theta-\alpha_1). \end{cases}$$

Bekanntlich sind X_0, Y_0 die Coordinaten des Punktes A_0 in Bezug auf das System der Axen der Ellipse oder Hyperbel, und $\mathrm{R}_0\cos\mathrm{A}_0$, $\mathrm{R}_0\sin\mathrm{A}_0$ sind die primitiven Coordinaten desselben Punktes. Bezeichnen wir nun die primitiven Coordinaten des Mittelpunkts der Ellipse oder Hyperbel durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$\mathrm{R}_0\cos\mathrm{A}_0=\mathfrak{X}+X_0\cos\theta-Y_0\sin\theta,$$

$$\mathrm{R}_0\sin\mathrm{A}_0=\mathfrak{Y}+X_0\sin\theta+Y_0\cos\theta;$$

also

$$16)\quad .\ .\ \begin{cases} \mathfrak{X}=\mathrm{R}_0\cos\mathrm{A}_0-X_0\cos\theta+Y_0\sin\theta, \\ \mathfrak{Y}=\mathrm{R}_0\sin\mathrm{A}_0-X_0\sin\theta-Y_0\cos\theta; \end{cases}$$

und folglich, wie man mittelst 15) leicht findet:

$$16^*)\quad .\ .\ \begin{cases} \mathfrak{X}=\mathrm{R}_0\cos\mathrm{A}_0+K_1\sin\alpha_1+K_2\sin\alpha_1, \\ \mathfrak{Y}=\mathrm{R}_0\sin\mathrm{A}_0-K_1\cos\alpha_2-K_2\cos\alpha_1. \end{cases}$$

Die beiden Halbaxen a, b lassen sich nun endlich auf folgende Art berechnen. Nach dem Obigen ist

$$\left(\frac{X_0}{a}\right)^2\pm\left(\frac{Y_0}{b}\right)^2=1 \text{ und } \varepsilon=\pm\frac{a^2}{b^2};$$

also

$$a^2=X_0^2+\varepsilon Y_0^2,$$

und folglich:

$$17)\quad .\ .\ .\ .\ a=\sqrt{X_0^2+\varepsilon Y_0^2},\quad b=\frac{a}{\sqrt{\pm\varepsilon}};$$

wo immer das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem ε positiv oder negativ ist. Berechnet man den Hülfswinkel v mittelst der Formel:

$$18) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \tan v = \frac{Y_0}{X_0}\sqrt{\pm\varepsilon},$$

so ist, wie man leicht findet, wenn ε positiv ist:

$$19) \quad . \quad . \quad a = \text{val. abs.}\ \frac{X_0}{\cos v}, \quad b = \text{val. abs.}\ \frac{Y_0}{\sin v};$$

und wenn ε negativ ist:

$$20) \quad a = \text{val. abs.}\ \frac{X_0}{\cos v}\sqrt{\cos 2v}, \quad b = \text{val. abs.}\ \frac{Y_0}{\sin v}\sqrt{\cos 2v}.$$

Aus den beiden aus dem Obigen bekannten Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 = \; & \varrho_1 \sin(\alpha_2-\alpha_3)\{\cos(\theta-\alpha_1)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_1)^2\} \\
& +\varrho_2 \sin(\alpha_3-\alpha_1)\{\cos(\theta-\alpha_2)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_2)^2\} \\
& +\varrho_3 \sin(\alpha_1-\alpha_2)\{\cos(\theta-\alpha_3)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_3)^2\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = \; & \varrho_2 \sin(\alpha_3-\alpha_4)\{\cos(\theta-\alpha_2)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_2)^2\} \\
& +\varrho_3 \sin(\alpha_4-\alpha_2)\{\cos(\theta-\alpha_3)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_3)^2\} \\
& +\varrho_4 \sin(\alpha_2-\alpha_3)\{\cos(\theta-\alpha_4)^2+\varepsilon\sin(\theta-\alpha_4)^2\}
\end{aligned}$$

erhält man auch, wenn der Kürze wegen

$$\begin{aligned}
U_0 = \; & \varrho_1 \sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos(\theta-\alpha_1)^2 & \qquad V_0 = \; & \varrho_1 \sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\theta-\alpha_1)^2 \\
& +\varrho_2 \sin(\alpha_3-\alpha_1)\cos(\theta-\alpha_2)^2 & & +\varrho_2 \sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin(\theta-\alpha_2)^2 \\
& +\varrho_3 \sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos(\theta-\alpha_3)^2, & & +\varrho_3 \sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\theta-\alpha_3)^2; \\
U_1 = \; & \varrho_2 \sin(\alpha_3-\alpha_4)\cos(\theta-\alpha_2)^2 & \qquad V_1 = \; & \varrho_2 \sin(\alpha_3-\alpha_4)\sin(\theta-\alpha_2)^2 \\
& +\varrho_3 \sin(\alpha_4-\alpha_2)\cos(\theta-\alpha_3)^2 & & +\varrho_3 \sin(\alpha_4-\alpha_2)\sin(\theta-\alpha_3)^2 \\
& +\varrho_4 \sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos(\theta-\alpha_4)^2, & & +\varrho_4 \sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\theta-\alpha_4)^2
\end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$21) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varepsilon = -\frac{U_0}{V_0}, \quad \varepsilon = -\frac{U_1}{V_1}.$$

Es erhellet auf der Stelle, dass

$$U_0 + V_0 = P_0, \quad U_1 + V_1 = P_1$$

ist.

§. 4.

Ueber die vorhergehende Auflösung sind nun aber die folgenden wichtigen Bemerkungen zu machen.

Da man von dem Winkel θ nur so viel weiss, dass er zwischen 0 und 360° liegt, so weiss man von dem Winkel 2θ, welcher durch die Formel

$$\tang 2\theta = \frac{M}{N}$$

bestimmt wird, nur so viel, dass derselbe zwischen 0 und 720° liegt. Bezeichnen wir also den kleinsten positiven Winkel, dessen Tangente der Bruch $\frac{M}{N}$ ist, durch 2ω, so sind

$$2\omega,\quad 2\omega + 180^0,\quad 2\omega + 360^0,\quad 2\omega + 540^0$$

die vier Werthe, welche 2θ, und also

$$\omega,\quad \omega + 90^0,\quad \omega + 180^0,\quad \omega + 270^0$$

die vier Werthe, welche θ haben kann. Bezeichnen wir den dem Werthe ω von θ entsprechenden Werth von $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ durch ε_1, so sind nach 6) die den Werthen

$$\omega,\quad \omega + 90^0,\quad \omega + 180^0,\quad \omega + 270^0$$

von θ entsprechenden Werthe von $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, wie leicht erhellen wird:

$$\varepsilon_1,\quad -\varepsilon_1,\quad \varepsilon_1,\quad -\varepsilon_1;$$

und die denselben Werthen von θ entsprechenden Werthe von ε sind folglich:

$$\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1 + 1},\quad \frac{\varepsilon_1 + 1}{\varepsilon_1 - 1},\quad \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1 + 1},\quad \frac{\varepsilon_1 + 1}{\varepsilon_1 - 1};$$

also, wenn wir den dem Werthe ω von θ entsprechenden Werth von ε durch ε selbst bezeichnen:

$$\varepsilon,\quad \frac{1}{\varepsilon},\quad \varepsilon,\quad \frac{1}{\varepsilon}.$$

Bezeichnen wir nun ferner die dem Werthe ω von θ entsprechenden Werthe von X_0, Y_0 durch X_0, Y_0 selbst, so sind

nach 11) die den obigen vier Werthen von θ entsprechenden Werthe von X_0, Y_0 offenbar:

$$X_0,\ Y_0;\quad Y_0,\ -X_0;\quad -X_0,\ -Y_0;\quad -Y_0,\ X_0;$$

und für die den obigen vier Werthen von θ entsprechenden Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ erhält man also nach 16):

$$R_0 \cos A_0 - X_0 \cos\omega + Y_0 \sin\omega,$$

$$R_0 \sin A_0 - X_0 \sin\omega - Y_0 \cos\omega;$$

$$R_0 \cos A_0 - Y_0 \cos(\omega + 90^0) - X_0 \sin(\omega + 90^0)$$
$$= R_0 \cos A_0 - X_0 \cos\omega + Y_0 \sin\omega,$$

$$R_0 \sin A_0 - Y_0 \sin(\omega + 90^0) + X_0 \cos(\omega + 90^0)$$
$$= R_0 \sin A_0 - X_0 \sin\omega - Y_0 \cos\omega;$$

$$R_0 \cos A_0 + X_0 \cos(\omega + 180^0) - Y_0 \sin(\omega + 180^0)$$
$$= R_0 \cos A_0 - X_0 \cos\omega + Y_0 \sin\omega,$$

$$R_0 \sin A_0 + X_0 \sin(\omega + 180^0) + Y_0 \cos(\omega + 180^0)$$
$$= R_0 \sin A_0 - X_0 \sin\omega - Y_0 \cos\omega;$$

$$R_0 \cos A_0 + Y_0 \cos(\omega + 270^0) + X_0 \sin(\omega + 270^0)$$
$$= R_0 \cos A_0 - X_0 \cos\omega + Y_0 \sin\omega,$$

$$R_0 \sin A_0 + Y_0 \sin(\omega + 270^0) - X_0 \cos(\omega + 270^0)$$
$$= R_0 \sin A_0 - X_0 \sin\omega - Y_0 \cos\omega;$$

also in allen Fällen:

$$\mathfrak{X} = R_0 \cos A_0 - X_0 \cos\omega + Y_0 \sin\omega,$$

$$\mathfrak{Y} = R_0 \sin A_0 - X_0 \sin\omega - Y_0 \cos\omega;$$

woraus man sieht, dass sich für die Coordinaten des Mittelpunkts der Ellipse oder Hyperbel in allen Fällen ganz dieselben Werthe ergeben.

Für die den obigen vier Werthen von θ entsprechenden Werthe von a, b erhält man endlich mittelst des Obigen nach den Formeln 17) die folgenden Ausdrücke:

$$\sqrt{X_0^2+\varepsilon Y_0^2},\quad \sqrt{\frac{X_0^2+\varepsilon Y_0^2}{\pm\varepsilon}};$$

$$\sqrt{\frac{X_0^2+\varepsilon Y_0^2}{\varepsilon}},\quad \sqrt{\pm(X_0^2+\varepsilon Y_0^2)};$$

$$\sqrt{X_0^2+\varepsilon Y_0^2},\quad \sqrt{\frac{X_0^2+\varepsilon Y_0^2}{\pm\varepsilon}};$$

$$\sqrt{\frac{X_0^2+\varepsilon Y_0^2}{\varepsilon}},\quad \sqrt{\pm(X_0^2+\varepsilon Y_0^2)}.$$

Ist nun zuerst ε positiv und der gesuchte Kegelschnitt also eine Ellipse, so sind die Ausdrücke:

$$\sqrt{X_0^2+\varepsilon Y_0^2},\quad \sqrt{\frac{X_0^2+\varepsilon Y_0^2}{\varepsilon}};$$

$$\sqrt{\frac{X_0^2+\varepsilon Y_0^2}{\varepsilon}},\quad \sqrt{X_0^2+\varepsilon Y_0^2};$$

$$\sqrt{X_0^2+\varepsilon Y_0^2},\quad \sqrt{\frac{X_0^2+\varepsilon Y_0^2}{\varepsilon}};$$

$$\sqrt{\frac{X_0^2+\varepsilon Y_0^2}{\varepsilon}},\quad \sqrt{X_0^2+\varepsilon Y_0^2}$$

offenbar sämmtlich reell, und die den obigen vier Werthen von θ entsprechenden Werthe von a, b sind also, wenn wir durch a, b selbst die dem Werthe ω von θ entsprechenden Werthe der beiden Halbaxen bezeichnen:

$$a,\ b;\quad b,\ a;\quad a,\ b;\quad b,\ a.$$

Ueberlegt man nun, dass nach dem Obigen den vier Werthen

$$\omega,\quad \omega+90^\circ,\quad \omega+180^\circ,\quad \omega+270^\circ$$

von θ immer ganz dieselben Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ entsprechen, und dass daher durch die vier in Rede stehenden Werthe von θ offenbar bloss zwei sich rechtwinklig schneidende gerade Linien bestimmt werden, so ist aus allem Vorhergehenden klar, dass man, welchen der obigen vier Werthe von θ man auch für θ setzen mag, doch immer ganz dieselbe Ellipse erhalten wird, welche durch die fünf gegebenen Punkte geht.

Wenn ferner ε negativ und der gesuchte Kegelschnitt also eine Hyperbel ist, so ist klar, dass immer bloss entweder das erste und dritte, oder das zweite und vierte Paar der folgenden Ausdrücke:

$$\sqrt{X_0^2+\varepsilon Y_0^2},\quad \sqrt{\frac{X_0^2+\varepsilon Y_0^2}{-\varepsilon}};$$

$$\sqrt{\frac{X_0^2+\varepsilon Y_0^2}{\varepsilon}},\quad \sqrt{-(X_0^2+\varepsilon Y_0^2)};$$

$$\sqrt{X_0^2+\varepsilon Y_0^2},\quad \sqrt{\frac{X_0^2+\varepsilon Y_0^2}{-\varepsilon}};$$

$$\sqrt{\frac{X_0^2+\varepsilon Y_0^2}{\varepsilon}},\quad \sqrt{-(X_0^2+\varepsilon Y_0^2)}$$

für die beiden Halbaxen a, b reelle Werthe liefert, wodurch uns ein Criterium gegeben ist, mittelst dessen sich immer sicher erkennen lässt, welche Werthe man bloss für θ setzen darf; dass es aber ganz gleichgültig ist, welchen der beiden Werthe ω, $\omega+180^0$ oder $\omega+90^0$, $\omega+270^0$ man für θ setzt, fällt von selbst in die Augen.

§. 5.

In dem Vorhergehenden ist die allgemeine Auflösung unserer Aufgabe enthalten. Es kommt nun aber, was bei diesem Gegenstande von ganz besonderer Wichtigkeit ist, darauf an, die Fälle, in denen die obige Auflösung aufhört, anwendbar zu sein, einer besonderen Betrachtung zu unterwerfen, wozu wir jetzt übergehen wollen, nachdem wir die folgenden Bemerkungen vorausgeschickt haben, welche für das Folgende von Wichtigkeit sind.

Zuerst bemerken wir, dass keiner der folgenden Sinus:

$$\sin(\alpha_1-\alpha_2),\quad \sin(\alpha_1-\alpha_3),\quad \sin(\alpha_1-\alpha_4),$$

$$\sin(\alpha_2-\alpha_3),\quad \sin(\alpha_2-\alpha_4),\quad \sin(\alpha_3-\alpha_4)$$

verschwinden kann, weil, wenn dies der Fall wäre, offenbar zwei der fünf gegebenen Punkte mit dem als Anfang oder Pol angenommenen Punkte A_0 in einer geraden Linie liegen würden, was mit der in §. 2. gemachten Voraussetzung, dass nicht drei der fünf gegebenen Punkte in einer geraden Linie liegen sollen, im Widerspruch steht.

Ferner ist zu bemerken, dass auch nie die Gleichung

$$\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)=0,$$

oder eine ähnliche, Statt finden kann, weil, wenn dies der Fall wäre, die drei Punkte A_1, A_2, A_3 in einer geraden Linie liegen

würden, wie leicht auf folgende Art gezeigt werden kann. Die in Rede stehenden Punkte werden nämlich immer dann in einer geraden Linie, deren Gleichung

$$\mathfrak{y} = G\mathfrak{x} + H$$

ist, liegen, wenn die beiden Constanten G, H so bestimmt werden können, dass sie den drei Gleichungen

$$\mathfrak{y}_1 = G\mathfrak{x}_1 + H, \quad \mathfrak{y}_2 = G\mathfrak{x}_2 + H, \quad \mathfrak{y}_3 = G\mathfrak{x}_3 + H$$

zugleich genügen, welches immer dann möglich ist, wenn die Bedingungsgleichung, welche man durch Elimination von G, H aus den drei vorhergehenden Gleichungen erhält, erfüllt ist. Diese Gleichung ist aber, wie man leicht findet:

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1) + (\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3 - \mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_2) + (\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_3) = 0,$$

also, wenn man für die Coordinaten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$; $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$; $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{y}_3$ ihre aus §. 2. bekannten Ausdrücke einführt, wie man leicht findet:

$$\varrho_1\varrho_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \varrho_2\varrho_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) + \varrho_3\varrho_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) = 0,$$

welches die obige Gleichung ist, woraus das zu Beweisende folgt.

§. 6.

Die ganze oben gegebene Bestimmung der durch die fünf gegebenen Punkte gehenden Ellipse oder Hyperbel gründet sich auf die Bestimmung des Winkels 2θ mittelst der Gleichung

$$\tang 2\theta = \frac{M}{N},$$

welche jederzeit dann nicht möglich ist, wenn zu gleicher Zeit

$$M = 0, \quad N = 0$$

ist, so dass wir also diesen Fall zuerst betrachten müssen.

Wenn aber zu gleicher Zeit $M = 0$, $N = 0$ ist, so ist nach §. 3. offenbar auch zu gleicher Zeit

$$P_0Q_1 - P_1Q_0 = 0, \quad P_0R_1 - P_1R_0 = 0;$$

also, wie man leicht findet, wenn man zuerst P_1, dann P_0 eliminirt:

$$P_0(Q_0R_1 - Q_1R_0) = 0, \quad P_1(Q_0R_1 - Q_1R_0) = 0;$$

folglich offenbar entweder

$$P_0=0, \quad P_1=0$$

oder

$$Q_0R_1-Q_1R_0=0.$$

Sei also zuerst zugleich

$$P_0=0, \quad P_1=0.$$

In diesem Falle wird den beiden Gleichungen

$$(1+\varepsilon)P_0=-(1-\varepsilon)(Q_0\cos 2\theta+R_0\sin 2\theta),$$

$$(1+\varepsilon)P_1=-(1-\varepsilon)(Q_1\cos 2\theta+R_1\sin 2\theta),$$

auf die bekanntlich nach §. 3. bei unserer Auflösung Alles ankommt, für jedes θ genügt, wenn man $\varepsilon=1$ setzt, woraus man sogleich schliesst, dass im vorliegenden Falle der gesuchte Kegelschnitt ein Kreis ist. Zur Bestimmung von X_0, Y_0 geben die Gleichungen 11):

$$2X_0\sin(\alpha_1-\alpha_2)=-\varrho_1\sin(\theta-\alpha_2)+\varrho_2\sin(\theta-\alpha_1),$$

$$2Y_0\sin(\alpha_1-\alpha_2)=-\varrho_1\cos(\theta-\alpha_2)+\varrho_2\cos(\theta-\alpha_1);$$

oder, weil es offenbar verstattet ist, $\theta=0$ zu setzen:

$$2X_0\sin(\alpha_1-\alpha_2)=\quad\varrho_1\sin\alpha_2-\varrho_2\sin\alpha_1,$$

$$2Y_0\sin(\alpha_1-\alpha_2)=-\varrho_1\cos\alpha_2+\varrho_2\cos\alpha_1;$$

welche Gleichungen, weil $\sin(\alpha_1-\alpha_2)$ nach §. 5. nicht verschwindet, für X_0, Y_0 immer endliche völlig bestimmte Werthe liefern. Für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ erhält man aus 16) die endlichen völlig bestimmten Werthe:

$$\mathfrak{X}=\mathrm{R}_0\cos\mathrm{A}_0-X_0, \quad \mathfrak{Y}=\mathrm{R}_0\sin\mathrm{A}_0-Y_0;$$

und aus 17) ergiebt sich, wenn man, wie es erforderlich ist, $\varepsilon=1$ setzt:

$$a=b=\sqrt{X_0^2+Y_0^2},$$

wodurch also auch der Halbmesser unseres Kreises und daher dieser Kreis selbst jetzt vollkommen bestimmt ist.

Man kann hier noch die Frage aufwerfen, ob vielleicht $a=b=0$ werden kann. Wäre aber

$$a=b=\sqrt{X_0^2+Y_0^2}=0,$$

so wäre $X_0=0$, $Y_0=0$, also nach dem Obigen:

$$\varrho_1 \sin\alpha_2 - \varrho_2 \sin\alpha_1 = 0,\quad \varrho_1 \cos\alpha_2 - \varrho_2 \cos\alpha_1 = 0;$$

woraus sogleich

$$\varrho_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0,$$

also, insofern nicht $\varrho_1 = 0$ ist,

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

folgt, was bekanntlich unstatthaft ist. Sollte aber $\varrho_1 = 0$ sein, so würde der Punkt A_1 mit dem Punkte A_0 zusammenfallen, und es würden also nicht fünf, sondern nur vier Punkte gegeben sein, was auf eine neue Aufgabe: die Beschreibung eines Kegelschnitts durch vier gegebene Punkte führen würde, mit der wir uns hier nicht beschäftigen. Daher kann nie $a = b = 0$ werden.

Wenn ferner

$$Q_0 R_1 - Q_1 R_0 = 0$$

ist, so wird den beiden Gleichungen

$$Q_0 \cos 2\theta + R_0 \sin 2\theta = 0,$$
$$Q_1 \cos 2\theta + R_1 \sin 2\theta = 0$$

offenbar zugleich genügt, wenn man 2θ mittelst einer der beiden Formeln

$$\operatorname{tang} 2\theta = -\frac{Q_0}{R_0},\quad \operatorname{tang} 2\theta = -\frac{Q_1}{R_1}$$

bestimmt, welches aber nur dann möglich ist, wenn die Grössen Q_0, R_0, Q_1, R_1 nicht zugleich verschwinden, was wir also für jetzt annehmen wollen. Hat man nun aber 2θ, und demnach auch θ, auf diese Weise bestimmt, so wird den beiden Hauptgleichungen

$$(1+\varepsilon) P_0 = -(1-\varepsilon)(Q_0 \cos 2\theta + R_0 \sin 2\theta),$$
$$(1+\varepsilon) P_1 = -(1-\varepsilon)(Q_1 \cos 2\theta + R_1 \sin 2\theta)$$

genügt, wenn man $\varepsilon = -1$ setzt, woraus man sogleich schliesst, dass im vorliegenden Falle der gesuchte Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel ist. Zur Bestimmung von X_0, Y_0 hat man nach 11), wenn man $\varepsilon = -1$ setzt, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2X_0 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = & -\varrho_1 \sin(\theta - \alpha_2)\{\cos(\theta - \alpha_1)^2 - \sin(\theta - \alpha_1)^2\} \\ & + \varrho_2 \sin(\theta - \alpha_1)\{\cos(\theta - \alpha_2)^2 - \sin(\theta - \alpha_2)^2\}, \\ 2Y_0 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = & \ \varrho_1 \cos(\theta - \alpha_2)\{\cos(\theta - \alpha_1)^2 - \sin(\theta - \alpha_1)^2\} \\ & - \varrho_2 \cos(\theta - \alpha_1)\{\cos(\theta - \alpha_2)^2 - \sin(\theta - \alpha_2)^2\}; \end{aligned}$$

also:

$$2X_0\sin(\alpha_1-\alpha_2)=-\varrho_1\sin(\theta-\alpha_2)\cos2(\theta-\alpha_1)+\varrho_2\sin(\theta-\alpha_1)\cos2(\theta-\alpha_2),$$

$$2Y_0\sin(\alpha_1-\alpha_2)=\varrho_1\cos(\theta-\alpha_2)\cos2(\theta-\alpha_1)-\varrho_2\cos(\theta-\alpha_1)\cos2(\theta-\alpha_2);$$

mittelst welcher Gleichungen man, weil $\sin(\alpha_1-\alpha_2)$ nicht verschwindet, für X_0, Y_0 immer endliche völlig bestimmte Werthe erhält. Zur Bestimmung von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ hat man nach 16) die Formeln:

$$\mathfrak{X}=\mathrm{R}_0\cos\mathrm{A}_0-X_0\cos\theta+Y_0\sin\theta,$$

$$\mathfrak{Y}=\mathrm{R}_0\sin\mathrm{A}_0-X_0\sin\theta-Y_0\cos\theta;$$

die für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ gleichfalls endliche völlig bestimmte Werthe liefern. Für θ erhält man bekanntlich eigentlich vier Werthe, woraus sich dann auch vier Paare von Werthen der Coordinaten X_0, Y_0 ergeben, was aber bekanntlich auf die Bestimmung von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ gar keinen Einfluss ausübt. Die den in Rede stehenden vier Werthen von θ entsprechenden Werthe von a, b sind nach §. 4.:

$$\sqrt{X_0^2-Y_0^2},\qquad \sqrt{X_0^2-Y_0^2};$$

$$\sqrt{-(X_0^2-Y_0^2)},\qquad \sqrt{-(X_0^2-Y_0^2)};$$

$$\sqrt{X_0^2-Y_0^2},\qquad \sqrt{X_0^2-Y_0^2};$$

$$\sqrt{-(X_0^2-Y_0^2)},\qquad \sqrt{-(X_0^2-Y_0^2)};$$

und man muss nun für θ immer einen der beiden Werthe setzen, die für a, b reelle Werthe liefern; welchen dieser beiden Werthe von θ man aber wählt, ist an sich ganz gleichgültig. Auch hier lässt sich wieder die Frage aufwerfen, ob $a=b=0$ sein kann. Es erhellet aber leicht, dass eine gleichseitige Hyperbel sich ihren Asymptoten desto mehr nähert, je näher ihre einander gleichen Axen der Null kommen. Sollte also $a=b=0$ sein, so müssten die fünf gegebenen Punkte offenbar in zwei sich schneidenden geraden Linien liegen, was unter den gemachten Voraussetzungen jedenfalls unstatthaft ist. Daher kann nicht $a=b=0$ sein.

Vorzüglich müssen wir nun noch den Fall betrachten, wenn

$$Q_0=0,\quad R_0=0,\quad Q_1=0,\quad R_1=0,$$

nämlich nach §. 3.

$$\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos2\alpha_1+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\cos2\alpha_2+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos2\alpha_3=0,$$

$$\varrho_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin2\alpha_1+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin2\alpha_2+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin2\alpha_3=0,$$

$$\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_4)\cos2\alpha_2+\varrho_3\sin(\alpha_4-\alpha_2)\cos2\alpha_3+\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos2\alpha_4=0,$$

$$\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_4)\sin2\alpha_2+\varrho_3\sin(\alpha_4-\alpha_2)\sin2\alpha_3+\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin2\alpha_4=0$$

ist, vorausgesetzt, dass diese vier Gleichungen zusammen existiren können, worüber wir sogleich in's Klare zu kommen suchen wollen. Eliminirt man aus den beiden ersten Gleichungen ϱ_1, aus den beiden letzten ϱ_4, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$\varrho_2 \sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin 2(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_3 \sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin 2(\alpha_1-\alpha_3)=0,$$

$$\varrho_2 \sin(\alpha_3-\alpha_4)\sin 2(\alpha_4-\alpha_2)+\varrho_3 \sin(\alpha_4-\alpha_2)\sin 2(\alpha_4-\alpha_3)=0$$

oder

$$\{\varrho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\varrho_3\cos(\alpha_1-\alpha_3)\}\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_1-\alpha_3)=0,$$

$$\{\varrho_2\cos(\alpha_2-\alpha_4)-\varrho_3\cos(\alpha_3-\alpha_4)\}\sin(\alpha_2-\alpha_4)\sin(\alpha_3-\alpha_4)=0;$$

also, weil keiner der Factoren

$$\sin(\alpha_1-\alpha_2),\quad \sin(\alpha_1-\alpha_3),\quad \sin(\alpha_2-\alpha_4),\quad \sin(\alpha_3-\alpha_4)$$

verschwindet:

$$\varrho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\varrho_3\cos(\alpha_1-\alpha_3)=0,$$

$$\varrho_2\cos(\alpha_2-\alpha_4)-\varrho_3\cos(\alpha_3-\alpha_4)=0;$$

also, wenn man ϱ_3 eliminirt und bedenkt, dass ϱ_2 nicht verschwindet:

$$\cos(\alpha_1-\alpha_2)\cos(\alpha_3-\alpha_4)-\cos(\alpha_1-\alpha_3)\cos(\alpha_2-\alpha_4)=0,$$

oder, wie man leicht findet,

$$\sin(\alpha_1-\alpha_4)\sin(\alpha_2-\alpha_3)=0,$$

und folglich

$$\sin(\alpha_1-\alpha_4)=0 \text{ oder } \sin(\alpha_2-\alpha_3)=0,$$

was unstatthaft ist; daher können die vier Gleichungen

$$Q_0=0,\quad R_0=0,\quad Q_1=0,\quad R_1=0$$

nicht zusammen existiren, und es giebt also im vorliegenden Falle, wo

$$Q_0R_1-Q_1R_0=0$$

ist, immer eine durch die fünf gegebenen Punkte, von denen nicht drei in einer geraden Linie liegen, gehende gleichseitige Hyperbel.

Man kann sich endlich noch die Frage vorlegen, ob zugleich

$$P_0=0,\quad P_1=0,\quad Q_0R_1-Q_1R_0=0$$

sein kann. Nehmen wir, um diese Frage zu beantworten, die drei vorstehenden Gleichungen als erfüllt an und bestimmen aus der ersten $\varrho_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_3)$, aus der zweiten $\varrho_4 \sin(\alpha_2 - \alpha_3)$, und führen die erhaltenen Ausdrücke in die Brüche

$$\frac{Q_0}{R_0} \text{ und } \frac{Q_1}{R_1}$$

ein, so erhalten wir:

$$\frac{Q_0}{R_0} = \frac{\varrho_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1)(\cos 2\alpha_2 - \cos 2\alpha_1) + \varrho_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)(\cos 2\alpha_3 - \cos 2\alpha_1)}{\varrho_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1)(\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) + \varrho_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)(\sin 2\alpha_3 - \sin 2\alpha_1)},$$

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{\varrho_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_4)(\cos 2\alpha_2 - \cos 2\alpha_4) + \varrho_3 \sin(\alpha_4 - \alpha_2)(\cos 2\alpha_3 - \cos 2\alpha_4)}{\varrho_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_4)(\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_4) + \varrho_3 \sin(\alpha_4 - \alpha_2)(\sin 2\alpha_3 - \sin 2\alpha_4)};$$

also:

$$\frac{Q_0}{R_0} = -\frac{\{\varrho_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \varrho_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_3)\} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{\{\varrho_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) - \varrho_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_3)\} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\alpha_1 - \alpha_3)},$$

$$\frac{Q_1}{R_1} = -\frac{\{\varrho_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_4) - \varrho_3 \sin(\alpha_3 + \alpha_4)\} \sin(\alpha_2 - \alpha_4) \sin(\alpha_3 - \alpha_4)}{\{\varrho_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_4) - \varrho_3 \cos(\alpha_3 + \alpha_4)\} \sin(\alpha_2 - \alpha_4) \sin(\alpha_3 - \alpha_4)};$$

folglich, weil keiner der Factoren

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2), \quad \sin(\alpha_1 - \alpha_3), \quad \sin(\alpha_2 - \alpha_4), \quad \sin(\alpha_3 - \alpha_4)$$

verschwindet:

$$\frac{Q_0}{R_0} = -\frac{\varrho_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \varrho_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_3)}{\varrho_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) - \varrho_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_3)},$$

$$\frac{Q_1}{R_1} = -\frac{\varrho_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_4) - \varrho_3 \sin(\alpha_3 + \alpha_4)}{\varrho_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_4) - \varrho_3 \cos(\alpha_3 + \alpha_4)};$$

also, wegen der dritten der drei vorausgesetzten Gleichungen:

$$\frac{\varrho_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \varrho_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_3)}{\varrho_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) - \varrho_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_3)} = \frac{\varrho_2 \sin(\alpha_2 + \alpha_4) - \varrho_3 \sin(\alpha_3 + \alpha_4)}{\varrho_2 \cos(\alpha_2 + \alpha_4) - \varrho_4 \cos(\alpha_3 + \alpha_4)},$$

woraus man mittelst leichter Rechnung die Gleichung

$$\{\varrho_2\varrho_2 + \varrho_3\varrho_3 - 2\varrho_2\varrho_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3)\} \sin(\alpha_1 - \alpha_4) = 0,$$

also, weil $\sin(\alpha_1 - \alpha_4)$ nicht verschwindet, die Gleichung

$$\varrho_2\varrho_2 + \varrho_3\varrho_3 - 2\varrho_2\varrho_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3) = 0$$

erhält. Nun ist aber

$$\overline{A_2A_3}^2 = (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_3)^2 + (\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_3)^2,$$

also nach §. 2.:

$$\overline{A_2A_3}^2 = (\varrho_2 \cos\alpha_2 - \varrho_3 \cos\alpha_3)^2 + (\varrho_2 \sin\alpha_2 - \varrho_3 \sin\alpha_3)^2,$$

woraus man mittelst leichter Rechnung

$$\overline{A_2A_3}^2 = \varrho_2\varrho_2 + \varrho_3\varrho_3 - 2\varrho_2\varrho_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3),$$

folglich nach dem Obigen

$$\overline{A_2A_3} = 0$$

erhält, was ungereimt ist, weil, wenn diese Gleichung Statt finden sollte, die Punkte A_2 und A_3 zusammenfallen müssten, also nicht fünf, sondern nur vier Punkte gegeben sein würden. Daher kann nicht zugleich

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 0, \quad Q_0R_1 - Q_1R_0 = 0$$

sein.

§. 7.

Wenn nun aber auch M, N nicht zugleich verschwinden und daher θ bestimmt werden kann, so erfordern doch die Fälle, wenn dann ε entweder unbestimmt ausfällt, oder verschwindet, oder unendlich wird, noch eine besondere Betrachtung.

Nach 21) ist

$$\varepsilon = -\frac{U_0}{V_0}, \quad \varepsilon = -\frac{U_1}{V_1};$$

und ε wird also nur dann unbestimmt ausfallen, wenn

$$U_0 = 0, \quad V_0 = 0, \quad U_1 = 0, \quad V_1 = 0$$

ist, wobei zugleich leicht erhellet, dass diese Gleichungen, wenn sie für einen der vier Werthe von θ erfüllt sind, jederzeit für alle vier Werthe dieses Winkels erfüllt sind. Aus den vier obigen Gleichungen folgt aber

$$U_0 + V_0 = P_0 = 0, \quad U_1 + V_1 = P_1 = 0;$$

also

$$P_0Q_1 - P_1Q_0 = \quad 2M \sin(\alpha_2 - \alpha_3) = 0,$$
$$P_0R_1 - P_1R_0 = -2N \sin(\alpha_2 - \alpha_3) = 0;$$

folglich, weil $\sin(\alpha_2 - \alpha_3)$ nicht verschwindet:

$$M = 0, \quad N = 0;$$

was der Voraussetzung, dass M, N nicht zugleich verschwinden sollen, widerspricht. Wenn also M, N nicht zugleich verschwinden, wird ε nie unbestimmt ausfallen.

Wenn ε für einen der vier Werthe von θ verschwindet, so verschwindet ε offenbar auch für den um 180° von diesem Werthe von θ verschiedenen Werth dieses Winkels, und für die beiden anderen Werthe von θ wird ε unendlich; und wenn ε für einen der vier Werthe von θ unendlich wird, so wird ε offenbar auch für den um 180° von diesem Werthe von θ verschiedenen Werth dieses Winkels unendlich, und für die beiden anderen Werthe von θ verschwindet ε. Hieraus sieht man, dass, wenn ε überhaupt verschwindet oder unendlich wird, es immer für zwei um 180° von einander verschiedene Werthe von θ unendlich werden wird, so dass es also genügt, bloss diesen Fall zu betrachten. Nehmen wir nun demzufolge an, dass ε für zwei um 180° von einander verschiedene Werthe von θ, die wir durch $\bar{\omega}$ und $\bar{\omega}+180°$ bezeichnen wollen, unendlich werde, so sind für diese beiden Werthe von θ die Gleichungen

$$V_0=0,\quad V_1=0$$

erfüllt. In diesem Falle lässt sich aber durch die fünf gegebenen Punkte

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$$

immer eine Parabel beschreiben, wie nun gezeigt werden soll. Zu dem Ende bezeichne man den Parameter der gesuchten Parabel durch p und nehme deren Scheitel als Anfang und ihre Axe als den positiven Theil der Axe der X eines rechtwinkligen Coordinatensystems der XY an, in welchem man den positiven Theil der Axe der Y so annimmt, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der X durch den Coordinatenwinkel hindurch zu dem positiven Theile der Axe der Y zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um im primitiven Coordinatensysteme von dem positiven Theile der ersten Coordinatenaxe durch den Coordinatenwinkel hindurch zu dem positiven Theile der zweiten Coordinatenaxe zu gelangen. Die Coordinaten der fünf gegebenen Punkte

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$$

in dem Systeme der XY seien respective:

$$X_0,\ Y_0;\quad X_1,\ Y_1;\quad X_2,\ Y_2;\quad X_3,\ Y_3;\quad X_4,\ Y_4.$$

Von dem Scheitel der gesuchten Parabel ziehe man eine mit dem positiven Theile der ersten primitiven Coordinatenaxe parallele

und gleich gerichtete gerade Linie aus und bezeichne den mit dieser Linie von der Axe der Parabel eingeschlossenen, auf gewöhnliche Weise von 0 bis 360° gezählten Winkel durch Θ; so hat man auf ganz ähnliche Weise wie in §. 3. die folgenden Gleichungen:

$$Y_0^2 - pX_0 = 0,$$

$$\{Y_0 + \varrho_1 \sin(\alpha_1 - \Theta)\}^2 - p\{X_0 + \varrho_1 \cos(\alpha_1 - \Theta)\} = 0,$$

$$\{Y_0 + \varrho_2 \sin(\alpha_2 - \Theta)\}^2 - p\{X_0 + \varrho_2 \cos(\alpha_2 - \Theta)\} = 0,$$

$$\{Y_0 + \varrho_3 \sin(\alpha_3 - \Theta)\}^2 - p\{X_0 + \varrho_3 \cos(\alpha_3 - \Theta)\} = 0,$$

$$\{Y_0 + \varrho_4 \sin(\alpha_4 - \Theta)\}^2 - p\{X_0 + \varrho_4 \cos(\alpha_4 - \Theta)\} = 0.$$

Zieht man die erste dieser fünf Gleichungen von den vier anderen ab, so erhält man die vier folgenden Gleichungen:

$$2Y_0 \sin(\Theta - \alpha_1) - \varrho_1 \sin(\Theta - \alpha_1)^2 + p\cos(\Theta - \alpha_1) = 0,$$

$$2Y_0 \sin(\Theta - \alpha_2) - \varrho_2 \sin(\Theta - \alpha_2)^2 + p\cos(\Theta - \alpha_2) = 0,$$

$$2Y_0 \sin(\Theta - \alpha_3) - \varrho_3 \sin(\Theta - \alpha_3)^2 + p\cos(\Theta - \alpha_3) = 0,$$

$$2Y_0 \sin(\Theta - \alpha_4) - \varrho_4 \sin(\Theta - \alpha_4)^2 + p\cos(\Theta - \alpha_4) = 0.$$

Multiplicirt man die drei ersten dieser Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_3),\quad \sin(\alpha_3 - \alpha_1),\quad \sin(\alpha_1 - \alpha_2);$$

die drei letzten mit

$$\sin(\alpha_3 - \alpha_4),\quad \sin(\alpha_4 - \alpha_2),\quad \sin(\alpha_2 - \alpha_3);$$

und addirt dann in beiden Fällen die Gleichungen zu einander, so erhält man, weil

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\Theta - \alpha_1) + \sin(\alpha_3 - \alpha_1)\sin(\Theta - \alpha_2) + \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\Theta - \alpha_3) = 0,$$

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\cos(\Theta - \alpha_1) + \sin(\alpha_3 - \alpha_1)\cos(\Theta - \alpha_2) + \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\cos(\Theta - \alpha_3) = 0$$

und

$$\sin(\alpha_3 - \alpha_4)\sin(\Theta - \alpha_2) + \sin(\alpha_4 - \alpha_2)\sin(\Theta - \alpha_3) + \sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\Theta - \alpha_4) = 0,$$

$$\sin(\alpha_3 - \alpha_4)\cos(\Theta - \alpha_2) + \sin(\alpha_4 - \alpha_2)\cos(\Theta - \alpha_3) + \sin(\alpha_2 - \alpha_3)\cos(\Theta - \alpha_4) = 0$$

ist; die beiden folgenden Gleichungen:

$$\varrho_1 \sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\Theta-\alpha_1)^2+\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin(\Theta-\alpha_2)^2$$
$$+\varrho_3\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\Theta-\alpha_3)^2=0,$$

$$\varrho_2\sin(\alpha_3-\alpha_4)\sin(\Theta-\alpha_2)^2+\varrho_3\sin(\alpha_4-\alpha_2)\sin(\Theta-\alpha_3)^2$$
$$+\varrho_4\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\Theta-\alpha_4)^2=0;$$

und die Möglichkeit, durch die fünf gegebenen Punkte eine Parabel zu beschreiben, hängt also davon ab, dass sich Θ so bestimmen lässt, dass diese beiden Gleichungen erfüllt werden. Weil nun aber nach der Voraussetzung, für $\theta=\overline{\omega}$ und $\theta=\overline{\omega}+180^0$,

$$V_0=0,\quad V_1=0$$

ist, so ist klar, dass auch die beiden obigen Gleichungen erfüllt werden, wenn man $\Theta=\overline{\omega}$ und $\Theta=\overline{\omega}+180^0$ setzt, wodurch die behauptete Möglichkeit der Beschreibung einer Parabel durch die fünf gegebenen Punkte im vorliegenden Falle im Allgemeinen erwiesen ist. Zur Bestimmung von p und Y_0 erhält man aus den obigen Gleichungen leicht die folgenden Formeln:

$$p = \frac{\varrho_1\sin(\Theta-\alpha_1)^2\sin(\Theta-\alpha_2)-\varrho_2\sin(\Theta-\alpha_2)^2\sin(\Theta-\alpha_1)}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)},$$

$$Y_0=-\frac{\varrho_1\sin(\Theta-\alpha_1)^2\cos(\Theta-\alpha_2)-\varrho_2\sin(\Theta-\alpha_2)^2\cos(\Theta-\alpha_1)}{2\sin(\alpha_1-\alpha_2)};$$

bei denen man zu beachten hat, dass $\sin(\alpha_1-\alpha_2)$ nicht verschwindet. Leicht erhellet, dass p für $\Theta=\overline{\omega}$ und $\Theta=\overline{\omega}+180^0$ absolut gleiche, dem Zeichen nach aber entgegengesetzte Werthe erhält; und da nun p seiner Natur nach positiv ist, so kann nie ein Zweifel bleiben, welchen der beiden obigen Werthe man für Θ zu setzen hat. Endlich findet man X_0 mittelst der Formel

$$X_0=\frac{Y_0{}^2}{p};$$

und die primitiven Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ des Scheitels der Parabel ergeben sich, wie früher die primitiven Coordinaten des Mittelpunkts der Ellipse oder Hyperbel, mittelst der Formeln:

$$\mathfrak{X}=\mathrm{R}_0\cos\mathrm{A}_0-X_0\cos\Theta+Y_0\sin\Theta,$$

$$\mathfrak{Y}=\mathrm{R}_0\sin\mathrm{A}_0-X_0\sin\Theta-Y_0\cos\Theta.$$

Vorzüglich entsteht nun noch die Frage, ob p verschwinden kann, weil man nur, wenn dies nicht der Fall ist, für X_0 einen

endlichen völlig bestimmten Werth erhält. Durch Elimination von Y_0 aus je zweien der vier Gleichungen:

$$2Y_0\sin(\Theta-\alpha_1)-\varrho_1\sin(\Theta-\alpha_1)^2+p\cos(\Theta-\alpha_1)=0,$$
$$2Y_0\sin(\Theta-\alpha_2)-\varrho_2\sin(\Theta-\alpha_2)^2+p\cos(\Theta-\alpha_2)=0,$$
$$2Y_0\sin(\Theta-\alpha_3)-\varrho_3\sin(\Theta-\alpha_3)^2+p\cos(\Theta-\alpha_3)=0,$$
$$2Y_0\sin(\Theta-\alpha_4)-\varrho_4\sin(\Theta-\alpha_4)^2+p\cos(\Theta-\alpha_4)=0$$

erhält man die sechs folgenden Gleichungen:

$$p\sin(\alpha_1-\alpha_2)=\{\varrho_1\sin(\Theta-\alpha_1)-\varrho_2\sin(\Theta-\alpha_2)\}\sin(\Theta-\alpha_1)\sin(\Theta-\alpha_2),$$
$$p\sin(\alpha_1-\alpha_3)=\{\varrho_1\sin(\Theta-\alpha_1)-\varrho_3\sin(\Theta-\alpha_3)\}\sin(\Theta-\alpha_1)\sin(\Theta-\alpha_3),$$
$$p\sin(\alpha_1-\alpha_4)=\{\varrho_1\sin(\Theta-\alpha_1)-\varrho_4\sin(\Theta-\alpha_4)\}\sin(\Theta-\alpha_1)\sin(\Theta-\alpha_4),$$
$$p\sin(\alpha_2-\alpha_3)=\{\varrho_2\sin(\Theta-\alpha_2)-\varrho_3\sin(\Theta-\alpha_3)\}\sin(\Theta-\alpha_2)\sin(\Theta-\alpha_3),$$
$$p\sin(\alpha_2-\alpha_4)=\{\varrho_2\sin(\Theta-\alpha_2)-\varrho_4\sin(\Theta-\alpha_4)\}\sin(\Theta-\alpha_2)\sin(\Theta-\alpha_4),$$
$$p\sin(\alpha_3-\alpha_4)=\{\varrho_3\sin(\Theta-\alpha_3)-\varrho_4\sin(\Theta-\alpha_4)\}\sin(\Theta-\alpha_3)\sin(\Theta-\alpha_4);$$

und wäre also $p=0$, so wäre:

$$\{\varrho_1\sin(\Theta-\alpha_1)-\varrho_2\sin(\Theta-\alpha_2)\}\sin(\Theta-\alpha_1)\sin(\Theta-\alpha_2)=0,$$
$$\{\varrho_1\sin(\Theta-\alpha_1)-\varrho_3\sin(\Theta-\alpha_3)\}\sin(\Theta-\alpha_1)\sin(\Theta-\alpha_3)=0,$$
$$\{\varrho_1\sin(\Theta-\alpha_1)-\varrho_4\sin(\Theta-\alpha_4)\}\sin(\Theta-\alpha_1)\sin(\Theta-\alpha_4)=0,$$
$$\{\varrho_2\sin(\Theta-\alpha_2)-\varrho_3\sin(\Theta-\alpha_3)\}\sin(\Theta-\alpha_2)\sin(\Theta-\alpha_3)=0,$$
$$\{\varrho_2\sin(\Theta-\alpha_2)-\varrho_4\sin(\Theta-\alpha_4)\}\sin(\Theta-\alpha_2)\sin(\Theta-\alpha_4)=0,$$
$$\{\varrho_3\sin(\Theta-\alpha_3)-\varrho_4\sin(\Theta-\alpha_4)\}\sin(\Theta-\alpha_3)\sin(\Theta-\alpha_4)=0.$$

Zwei der Grössen

$$\sin(\Theta-\alpha_1),\quad \sin(\Theta-\alpha_2),\quad \sin(\Theta-\alpha_3),\quad \sin(\Theta-\alpha_4)$$

können nicht verschwinden; denn wäre etwa

$$\sin(\Theta-\alpha_1)=\sin\Theta\cos\alpha_1-\cos\Theta\sin\alpha_1=0,$$
$$\sin(\Theta-\alpha_2)=\sin\Theta\cos\alpha_2-\cos\Theta\sin\alpha_2=0;$$

so wäre, wie man leicht findet, wenn man aus diesen beiden Gleichungen zuerst $\cos\Theta$, dann $\sin\Theta$ eliminirt:

$$\sin\Theta\sin(\alpha_1-\alpha_2)=0,\quad \cos\Theta\sin(\alpha_1-\alpha_2)=0;$$

also, weil $\sin(\alpha_1-\alpha_2)$ nicht verschwindet,

$$\sin\Theta=0,\quad \cos\Theta=0;$$

was ungereimt ist, weil

$$\sin\Theta^2+\cos\Theta^2=1$$

ist. Verschwände also von den vier Grössen

$$\sin(\Theta-\alpha_1),\quad \sin(\Theta-\alpha_2),\quad \sin(\Theta-\alpha_3),\quad \sin(\Theta-\alpha_4)$$

eine, etwa $\sin(\Theta-\alpha_1)$, so würden die drei anderen nicht verschwinden, und aus den sechs obigen Gleichungen folgte dann:

$$\begin{aligned}
&\varrho_2\sin(\Theta-\alpha_2)-\varrho_3\sin(\Theta-\alpha_3)=0,\\
&\varrho_2\sin(\Theta-\alpha_2)-\varrho_4\sin(\Theta-\alpha_4)=0,\\
&\varrho_3\sin(\Theta-\alpha_3)-\varrho_4\sin(\Theta-\alpha_4)=0;
\end{aligned}$$

drei Gleichungen, von denen eine jede eine Folge aus den beiden anderen ist. Die beiden ersten dieser Gleichungen bringt man leicht auf die Form:

$$\begin{aligned}
&(\varrho_2\cos\alpha_2-\varrho_3\cos\alpha_3)\sin\Theta-(\varrho_2\sin\alpha_2-\varrho_3\sin\alpha_3)\cos\Theta=0,\\
&(\varrho_2\cos\alpha_2-\varrho_4\cos\alpha_4)\sin\Theta-(\varrho_2\sin\alpha_2-\varrho_4\sin\alpha_4)\cos\Theta=0;
\end{aligned}$$

also, wenn man zuerst $\cos\Theta$, dann $\sin\Theta$ eliminirt:

$$\begin{aligned}
&\{\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_4\sin(\alpha_3-\alpha_4)+\varrho_4\varrho_2\sin(\alpha_4-\alpha_2)\}\sin\Theta=0,\\
&\{\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_4\sin(\alpha_3-\alpha_4)+\varrho_4\varrho_2\sin(\alpha_4-\alpha_2)\}\cos\Theta=0;
\end{aligned}$$

folglich, weil nie zugleich

$$\sin\Theta=0,\quad \cos\Theta=0$$

ist:

$$\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_4\sin(\alpha_3-\alpha_4)+\varrho_4\varrho_2\sin(\alpha_4-\alpha_2)=0;$$

daher würden nach §. 5. die drei Punkte A_2, A_3, A_4 in gerader Linie liegen, was der Voraussetzung widerstreitet. Hieraus ergiebt sich nun, dass keine der Grössen

$$\sin(\Theta-\alpha_1),\quad \sin(\Theta-\alpha_2),\quad \sin(\Theta-\alpha_3),\quad \sin(\Theta-\alpha_4)$$

verschwindet; und aus dem Obigen erhält man also die sechs Gleichungen:

$$\varrho_1 \sin(\Theta-\alpha_1)-\varrho_2 \sin(\Theta-\alpha_2)=0,$$
$$\varrho_1 \sin(\Theta-\alpha_1)-\varrho_3 \sin(\Theta-\alpha_3)=0,$$
$$\varrho_1 \sin(\Theta-\alpha_1)-\varrho_4 \sin(\Theta-\alpha_4)=0,$$
$$\varrho_2 \sin(\Theta-\alpha_2)-\varrho_3 \sin(\Theta-\alpha_3)=0,$$
$$\varrho_2 \sin(\Theta-\alpha_2)-\varrho_4 \sin(\Theta-\alpha_4)=0,$$
$$\varrho_3 \sin(\Theta-\alpha_3)-\varrho_4 \sin(\Theta-\alpha_4)=0;$$

die aber offenbar alle in den drei Gleichungen:

$$\varrho_1 \sin(\Theta-\alpha_1)-\varrho_2 \sin(\Theta-\alpha_2)=0,$$
$$\varrho_1 \sin(\Theta-\alpha_1)-\varrho_3 \sin(\Theta-\alpha_3)=0,$$
$$\varrho_1 \sin(\Theta-\alpha_1)-\varrho_4 \sin(\Theta-\alpha_4)=0$$

enthalten sind. Aus diesen Gleichungen schliesst man auf ganz ähnliche Art wie oben, dass sowohl die Punkte A_1, A_2, A_3; als auch die Punkte A_1, A_2, A_4; als auch die Punkte A_1, A_3, A_4; dass also die vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 in gerader Linie liegen müssten, was wieder gegen die Voraussetzung streitet. Hieraus ergiebt sich also, dass unter den gemachten Voraussetzungen nie $p=0$ werden kann, und dass sich daher im vorliegenden Falle, wenn man nämlich für tang 2ϱ einen völlig bestimmten Werth findet, und ε verschwindet oder unendlich wird, durch die fünf gegebenen Punkte A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 immer eine Parabel beschreiben lässt.

§. 8.

Wenn nun aber auch keiner der vorher betrachteten Fälle eingetreten ist, so kann man immer noch fragen, ob $a=0$, und also nach §. 3. auch $b=0$ werden kann. Wenn aber $a=0$ ist, so ist nach 17)

$$X_0^2+\varepsilon Y_0^2=0,$$

also

$$\varepsilon=-\frac{X_0^2}{Y_0^2},$$

wo weder X_0, noch Y_0 verschwindet, weil keiner der vorher betrachteten Fälle eingetreten, also ε weder unbestimmt ausgefallen, noch der Null gleich, noch unendlich geworden sein soll. Für

$$\varepsilon = -\frac{X_0^2}{Y_0^2}$$

ist nun nach §. 3.

$$\{2X_0+\varrho_1\cos(\theta-\alpha_1)\}\cos(\theta-\alpha_1)=-\frac{X_0^2}{Y_0^2}\{2Y_0-\varrho_1\sin(\theta-\alpha_1)\}\sin(\theta-\alpha_1),$$

$$\{2X_0+\varrho_2\cos(\theta-\alpha_2)\}\cos(\theta-\alpha_2)=-\frac{X_0^2}{Y_0^2}\{2Y_0-\varrho_2\sin(\theta-\alpha_2)\}\sin(\theta-\alpha_2),$$

$$\{2X_0+\varrho_3\cos(\theta-\alpha_3)\}\cos(\theta-\alpha_3)=-\frac{X_0^2}{Y_0^2}\{2Y_0-\varrho_3\sin(\theta-\alpha_3)\}\sin(\theta-\alpha_3),$$

$$\{2X_0+\varrho_4\cos(\theta-\alpha_4)\}\cos(\theta-\alpha_4)=-\frac{X_0^2}{Y_0^2}\{2Y_0-\varrho_4\sin(\theta-\alpha_4)\}\sin(\theta-\alpha_4);$$

also:

$$2X_0Y_0\{X_0\sin(\theta-\alpha_1)+Y_0\cos(\theta-\alpha_1)\}$$
$$=\varrho_1\{X_0^2\sin(\theta-\alpha_1)^2-Y_0^2\cos(\theta-\alpha_1)^2\},$$

$$2X_0Y_0\{X_0\sin(\theta-\alpha_2)+Y_0\cos(\theta-\alpha_2)\}$$
$$=\varrho_2\{X_0^2\sin(\theta-\alpha_2)^2-Y_0^2\cos(\theta-\alpha_2)^2\},$$

$$2X_0Y_0\{X_0\sin(\theta-\alpha_3)+Y_0\cos(\theta-\alpha_3)\}$$
$$=\varrho_3\{X_0^2\sin(\theta-\alpha_3)^2-Y_0^2\cos(\theta-\alpha_3)^2\},$$

$$2X_0Y_0\{X_0\sin(\theta-\alpha_4)+Y_0\cos(\theta-\alpha_4)\}$$
$$=\varrho_4\{X_0^2\sin(\theta-\alpha_4)^2-Y_0^2\cos(\theta-\alpha_4)^2\}.$$

Zuerst ist nun zu bemerken, dass nicht zwei der Grössen

$$X_0\sin(\theta-\alpha_1)+Y_0\cos(\theta-\alpha_1),$$
$$X_0\sin(\theta-\alpha_2)+Y_0\cos(\theta-\alpha_2),$$
$$X_0\sin(\theta-\alpha_3)+Y_0\cos(\theta-\alpha_3),$$
$$X_0\sin(\theta-\alpha_4)+Y_0\cos(\theta-\alpha_4)$$

verschwinden können; denn wäre etwa

$$X_0\sin(\theta-\alpha_1)+Y_0\cos(\theta-\alpha_1)=0,$$
$$X_0\sin(\theta-\alpha_2)+Y_0\cos(\theta-\alpha_2)=0;$$

so wäre, wie man auf der Stelle durch Elimination von Y_0 erhält:

$$X_0\sin(\alpha_1-\alpha_2)=0,$$

also, weil X_0 nicht verschwindet,

$$\sin(\alpha_1-\alpha_2)=0,$$

was gegen die Voraussetzung streitet. Also werden jederzeit drei der vier obigen Grössen nicht verschwinden, und sind nun diese drei nicht verschwindenden Grössen etwa:

$$X_0\sin(\theta-\alpha_1)+Y_0\cos(\theta-\alpha_1),$$
$$X_0\sin(\theta-\alpha_2)+Y_0\cos(\theta-\alpha_2),$$
$$X_0\sin(\theta-\alpha_3)+Y_0\cos(\theta-\alpha_3);$$

so folgt aus den Gleichungen

$$2X_0Y_0\{X_0\sin(\theta-\alpha_1)+Y_0\cos(\theta-\alpha_1)\}$$
$$=\varrho_1\{X_0^2\sin(\theta-\alpha_1)^2-Y_0^2\cos(\theta-\alpha_1)^2\},$$
$$2X_0Y_0\{X_0\sin(\theta-\alpha_2)+Y_0\cos(\theta-\alpha_2)\}$$
$$=\varrho_2\{X_0^2\sin(\theta-\alpha_2)^2-Y_0^2\cos(\theta-\alpha_2)^2\},$$
$$2X_0Y_0\{X_0\sin(\theta-\alpha_3)+Y_0\cos(\theta-\alpha_3)\}$$
$$=\varrho_3\{X_0^2\sin(\theta-\alpha_3)^2-Y_0^2\cos(\theta-\alpha_3)^2\}$$

durch Division mit den drei vorstehenden Grössen:

$$2X_0Y_0=\varrho_1\{X_0\sin(\theta-\alpha_1)-Y_0\cos(\theta-\alpha_1)\},$$
$$2X_0Y_0=\varrho_2\{X_0\sin(\theta-\alpha_2)-Y_0\cos(\theta-\alpha_2)\},$$
$$2X_0Y_0=\varrho_3\{X_0\sin(\theta-\alpha_3)-Y_0\cos(\theta-\alpha_3)\};$$

oder:

$$\frac{2}{\varrho_1}=\frac{\sin(\theta-\alpha_1)}{Y_0}-\frac{\cos(\theta-\alpha_1)}{X_0},$$
$$\frac{2}{\varrho_2}=\frac{\sin(\theta-\alpha_2)}{Y_0}-\frac{\cos(\theta-\alpha_2)}{X_0},$$
$$\frac{2}{\varrho_3}=\frac{\sin(\theta-\alpha_3)}{Y_0}-\frac{\cos(\theta-\alpha_3)}{X_0};$$

also, wenn man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\sin(\alpha_2-\alpha_3),\quad \sin(\alpha_3-\alpha_1),\quad \sin(\alpha_1-\alpha_2)$$

multiplicirt und dann zu einander addirt, weil, wie wir schon in §. 7. gesehen haben:

$$\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\theta-\alpha_1)+\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin(\theta-\alpha_2)+\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\theta-\alpha_3)=0,$$

$$\sin(\alpha_2-\alpha_3)\cos(\theta-\alpha_1)+\sin(\alpha_3-\alpha_1)\cos(\theta-\alpha_2)+\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos(\theta-\alpha_3)=0$$

ist,

$$\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_3)}{\varrho_1}+\frac{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}{\varrho_2}+\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\varrho_3}=0$$

oder

$$\varrho_1\varrho_2\sin(\alpha_1-\alpha_2)+\varrho_2\varrho_3\sin(\alpha_2-\alpha_3)+\varrho_3\varrho_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)=0,$$

woraus sich nach §. 5. ergiebt, dass die drei Punkte A_1, A_2, A_3 in gerader Linie liegen müssten. Da dies gegen die Voraussetzung streitet, so kann nicht $a=0$ sein.

Ich habe mich in dieser Abhandlung bemühet, alle möglichen Fälle sorgfältig zu unterscheiden, und Formeln zu entwickeln, durch welche die Bestimmung eines durch fünf gegebene Punkte gehenden Kegelschnitts auf dem Wege der Rechnung leicht möglich ist, indem mittelst dieser Formeln die den gesuchten Kegelschnitt der Lage und Grösse nach bestimmenden Elemente unmittelbar aus den rechtwinkligen oder polaren Coordinaten der fünf gegebenen Punkte, ohne irgend welche Zwischenrechnungen, abgeleitet werden können.

XXIV.

Ueber einige Lehrsätze der Statik.

Von

Herrn Professor Dr. *Minding*
an der Universität zu Dorpat.

Der Satz von Chasles.

Ein sehr bekannter, von dem vorgenannten Mathematiker gefundener Satz betrifft das Tetraeder, welches zwei Kräfte, die einem gegebenen Systeme von Kräften an festverbundenen Angriffspunkten gleichgelten, in so fern diese in gewohnter Weise durch Linien dargestellt werden, zu gegenüberstehenden Kanten hat. Dieses Tetraeder hat nämlich stets denselben Inhalt, wie auch das gegebene System durch zwei Kräfte ersetzt werde.

Der Beweis dieses Satzes, welchen Herr Professor Möbius im vierten Bande des Crelle'schen Journals und in seinem Lehrbuche der Statik S. 122. mittheilt, beruht darauf, dass das Tetraeder, wovon die Kräfte P und Q zwei gegenüberstehende Kanten sind, oder das Tetraeder (P, Q), dem Produkte aus der einen dieser Kräfte, z. B. Q, in das statische Moment M der anderen Kraft P, in Bezug auf eine durch Q gelegte Axe genommen, also dem Produkte $Q.M$ proportional ist. Führt man aber die Mittelkraft R von P und Q und das Moment V des auf ihr senkrechten (also kleinsten) zugehörigen Kräftepaares in die Betrachtung ein, da bekanntlich beliebige Kräfte sich immer, und nur auf eine Weise, auf eine einfache Kraft nebst einem darauf senkrechten Paare bringen lassen, — welche Grössen freilich auch in besonderen Fällen den Werth Null haben können, — so entspricht jenes Tetraeder auch eben sowohl dem Produkte $R.V$. Da nun aus dieser zweiten Auffassung des Tetraeders (P, Q) der

obige Lehrsatz ganz unmittelbar als sich von selbst verstehend hervorgeht, während er aus der anderen erst nach Aufstellung mehrerer Gleichungen durch Elimination gewonnen wird; so habe ich geglaubt, diese einfache Bemerkung, welche ich schon vor vielen Jahren gemacht, inzwischen aber nirgends ausgesprochen gefunden habe, den Freunden solcher statischer Betrachtungen vorlegen zu dürfen.

Es seien (Taf. V. Fig. 7.) $AB = P$, $CD = Q$ die beiden Kräfte, an den Angriffspunkten A und C. (Der Leser denke sich ABC in der Ebene des Papiers, D ausserhalb dieser.) In C bringe man zwei der AB parallele und gleiche, einander entgegengesetzte Kräfte CB' und CB'' an, wovon die erste, der AB gleichstimmige, mit CD zusammengesetzt, die Mittelkraft $CE = R$ gebe. Werden nun nicht allein die Kräfte durch Linien, sondern wird auch die Einheit der Kraft durch die Einheit der Länge dargestellt, so gehen die statischen Momente in Flächenräume über und es wird das Moment des Kräftepaares (AB, CB'') gleich der doppelten Fläche des Dreiecks ABC. Errichtet man noch in C ein Loth CN auf der Ebene ABC, so ist Tetr. $(P, Q) =$ Tetr. $ABCD = \frac{1}{3} ABC.CD.\cos DCN$; aber eben so ist auch, weil DE der CB', also der Ebene ABC parallel ist,

$$\text{Tetr.}\,(P, Q) = \text{Tetr.}\,ABCE = \tfrac{1}{3} ABC.CE.\cos ECN.$$

Das Produkt $2.ABC.\cos DCN$ ist die doppelte senkrechte Projection des Dreiecks ABC auf eine die CD senkrecht schneidende Ebene; diese aber ist zugleich das Moment der Kraft AB gegen die Axe CD, welches oben mit M bezeichnet wurde; also ist $2.ABC.\cos DCN = M$ und mithin Tetr. $(P, Q) = \frac{1}{6} CD.M$ $= \frac{1}{6} Q.M$, da $CD = Q$ ist. Dieser Ausdruck des Tetraeders ist der, von welchem Herr Prof. Möbius ausgeht.

Das Produkt $2.ABC.\cos ECN$ ist die doppelte senkrechte Projection des Dreiecks ABC auf eine die CE senkrecht schneidende Ebene, also ist es gleich dem Momente V des kleinsten zusammengesetzten Paares, welches in Verbindung mit einer der R gleichen und parallelen Kraft die Kräfte P und Q ersetzt. Daher ergiebt sich als zweiter Ausdruck:

$$\text{Tetr.}\,(P, Q) = \tfrac{1}{6} CE.V = \tfrac{1}{6} R.V.$$

Wenn nun die Kräfte P und Q den Kräften P' und Q' gleichgelten, so haben beide Systeme einerlei Mittelkraft R und ihre kleinsten zusammengesetzten Paare haben gleiche Momente V; also ist dann $6.\text{Tetr.}(P, Q) = R.V$ und eben so auch $6.\text{Tetr.}(P', Q') = R.V$; folglich Tetr.$(P, Q) =$ Tetr.(P', Q'), wie der Lehrsatz behauptet.

Anmerkung. Wenn die Kräfte P und Q ein Paar bilden, so ist $R=0$; wenn sie einer einfachen Kraft gleichgelten, ist $V=0$, und wenn sie einander Gleichgewicht halten, ist $R=0$ und $V=0$; in allen diesen Fällen ist $\text{Tetr.}(P,Q)=0$, so wie das obige Moment $M=0$; die vorstehenden Ausdrücke für $\text{Tetr.}(P,Q)$ gelten also ohne Ausnahme.

Zusatz. Es sei gegeben, dass die Kräfte P, Q einerseits und die Kräfte P', Q' andererseits dieselbe von Null verschiedene Mittelkraft haben und dass zugleich $\text{Tetr.}(P,Q)=\text{Tetr.}(P',Q')$ sei. Da nun das erste Tetraeder sich durch $\frac{1}{6}R.V$ und das zweite in gleicher Weise durch $\frac{1}{6}R'.V'$ ausdrücken lässt, wo R' nach der Voraussetzung $=R$ ist; so folgt aus dem Gegebenen, dass auch $V=V'$ sein muss, oder dass die kleinsten zusammengesetzten Paare beider Systeme alsdann auch gleiche Momente haben. Sollen daher die Kräfte P', Q' den P, Q gleichgelten, so bleiben nur noch die Bedingungen der Lage zu erfüllen, auf welche die gegebenen Voraussetzungen gar keinen Bezug haben, dass nämlich R mit R' in dieselbe Gerade fallen und beide, so wie die gleichen Momente V und V', in demselben Sinne wirken müssen.

Bemerkung über die Reduction auf zwei Kräfte.

Dass beliebige Kräfte an festverbundenen Angriffspunkten sich immer auf zwei bringen lassen, verdient gewiss bemerkt zu werden, aber zugleich muss man auch anerkennen, dass diese Reduction eine unvollendete ist, obgleich namhafte Lehrbücher, wie z. B. die von Francoeur und Poisson, sich damit begnügen. Die Bestimmung von zwei Kräften erfordert zehn Grössen, nämlich sechs Componenten und vier Coordinaten der Angriffspunkte; die beiden dritten Coordinaten bleiben willkürlich, weil der Angriffspunkt jeder Kraft in deren Richtung beliebig verlegt werden kann. Zwischen diesen zehn Grössen bestehen sechs Gleichungen; es lassen sich also vier Grössen beliebig annehmen, wenn auch mit einiger Auswahl, wie ein Blick auf die Bedingungsgleichungen lehrt. Werden hingegen die Kräfte auf eine einfache Kraft und ein zugehöriges Paar gebracht, so sind damit alle unwesentlichen Elemente ausgeschieden, und es bleibt nichts mehr unbestimmt, als der Angriffspunkt der einzelnen Kraft oder vielmehr nur zwei Coordinaten desselben. Dass aber gerade dieser Punkt der Wahl überlassen bleibt, ist für viele Anwendungen wesentlich, da man oft Veranlassung hat, an einem bestimmten Punkte, der z. B. der Schwerpunkt eines Körpers oder ein unbe-

weglicher Stützpunkt sein kann, die gegebenen Kräfte zu sammeln, um daraus die Mittelkraft und namentlich das zusammengesetzte Paar der Kräfte gerade für diesen Punkt abzuleiten. Für diese Anwendungen und überhaupt für die weiteren Zwecke der Mechanik ist aber die Reduction auf zwei Kräfte, auch abgesehen von ihrer grossen Unbestimmtheit, ganz untauglich, da sie die Auffassung der durch die Kräfte bewirkten Bewegungen nicht im geringsten erleichtert, während durch Zurückführung auf eine einfache Kraft und ein Kräftepaar die nachfolgende Bewegungstheorie schon so weit vorbereitet wird, als es in der Statik geschehen kann und soll. Aus diesen Gründen möchte in der Statik fester Körper auf die Reduction auf zwei Kräfte kein grosses Gewicht zu legen, am wenigsten aber dabei stehen zu bleiben sein.

Für das Folgende sehe ich mich genöthigt, bei dem Leser einige Bekanntschaft mit den Untersuchungen vorauszusetzen, welche ich vor mehr als zwanzig Jahren über die Frage nach einem Mittelpunkte nicht paralleler Kräfte angestellt und zuerst im 14. und 15. Bande des Crelle'schen Journals, bald darauf aber in einer sehr vereinfachten Bearbeitung in meinem Handbuche der theoretischen Mechanik mitgetheilt habe. Ich verkenne freilich das Gewagte dieser Voraussetzung nicht, da genanntes Buch nur wenig beachtet worden zu sein scheint. Inzwischen ersehe ich doch, dass Herr Professor Broch zu Christiania in seinem 1854 erschienenen Lehrbuche der Mechanik den genannten Gegenstand ziemlich ausführlich behandelt und dabei mein Handbuch recht fleissig benutzt und ausgebeutet hat, ohne dass es ihm jedoch gefallen hätte, dem Leser die Quelle zu nennen, aus welcher er schöpfte.

Der Satz, von welchem die Rede sein soll, hat zwar seinem Wortlaute nach einige Aehnlichkeit mit dem vorigen, ist aber von diesem wesentlich verschieden, weil er nicht nur für alle Zerlegungen der Kräfte gilt, sondern auch bei beliebiger Drehung der Kräfte (ohne Aenderung ihrer gegenseitigen Neigungen nämlich, wie hierbei immer zu verstehen ist) noch gültig bleibt, was bei dem vorigen Satze nicht der Fall war. Die erste Erwähnung des Satzes findet sich in Crelle's Journ. Bd. 15. S. 30.; gegenwärtig beabsichtige ich, den damals gegebenen Beweis zu vereinfachen und die Untersuchung vollständiger durchzuführen.

Werden die Kräfte eines gegebenen Systems, dessen Mittel-

kraft nicht Null ist, nach drei Richtungen zerlegt und die Componenten jeder Richtung an ihrem Schwerpunkte vereinigt, so heisse Δ die Fläche des Dreiecks, welches diese drei Schwerpunkte zu Spitzen hat. Es sei ferner T der Inhalt des Tetraeders, von welchem die an jenen Schwerpunkten wirkenden Resultanten paralleler Kräfte, der Richtung und Grösse nach, drei zusammenstossende Kanten bilden; so besteht der Lehrsatz darin, dass das Produkt $\Delta.T$ immer denselben Werth hat, nach welchen Richtungen auch die Kräfte zerlegt worden seien. Da dieses Produkt offenbar auch durch Drehung der Kräfte nicht geändert wird, so muss es sich, wie alle von Drehung und Zerlegungen unabhängige Grössen, durch die Mittelkraft R und durch die Argumente der Centralfigur (welche in meinem Lehrbuche bei dieser Untersuchung von S. 92. an überall durch p und q bezeichnet sind) ausdrücken lassen. In der That findet sich $\Delta.T = \frac{1}{6}R^2.\frac{1}{2}pq$.

Um diesen Satz zu beweisen, seien P, P', P'' die drei durch Zerlegung der ursprünglichen Kräfte entstandenen Resultanten paralleler Kräfte; durch ihre Angriffspunkte sei die Ebene der rechtwinkligen Axen x und y gelegt, und es sei für diese Punkte $x=a$, $y=b$ für P; $x=a'$, $y=b'$ für P'; $x=a''$, $y=b''$ für P''; daher bekanntlich:

$$2\Delta = ab' - a'b + a'b'' - a''b' + a''b - ab''.$$

Man denke sich dieselben Kräfte noch auf eine andere Weise in die Componenten Q, Q', Q'' zerlegt, welche aber senkrecht auf einander stehen und deren Angriffspunkte durch x und y, x' und y', x'' und y'' bestimmt seien. Wird ferner durch (P, Q) der Winkel zwischen zwei Richtungen P und Q angedeutet, so sei

$$\begin{array}{lll} \cos(P, Q) = \alpha & \cos(P, Q') = \beta & \cos(P, Q'') = \gamma \\ \cos(P', Q) = \alpha' & \cos(P', Q') = \beta' & \cos(P', Q'') = \gamma' \\ \cos(P'', Q) = \alpha'' & \cos(P'', Q') = \beta'' & \cos(P'', Q'') = \gamma''. \end{array}$$

Nach diesen Erklärungen der Zeichen ergeben sich sofort die Gleichungen: $Q = P\alpha + P'\alpha' + P''\alpha''$ u. s. w., oder kürzer geschrieben:

$$\left.\begin{array}{lll} Q = \Sigma P\alpha & Q' = \Sigma P\beta & Q'' = \Sigma P\gamma \\ Qx = \Sigma Pa.\alpha & Q'x' = \Sigma Pa.\beta & Q''x'' = \Sigma Pa.\gamma \\ Qy = \Sigma Pb.\alpha & Q'y' = \Sigma Pb.\beta & Q''y'' = \Sigma Pb.\gamma. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Setzt man ferner: $\alpha\beta' - \alpha'\beta = [\alpha, \beta']$, daher auch $\beta\gamma' - \beta'\gamma = [\beta, \gamma']$ u. s. f. und bezeichnet durch M den Modul der körperlichen Ecke,

welche die Richtungen P, P', P'' zu Kanten hat, so bestehen folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
[\beta, \gamma']\alpha + [\gamma, \alpha']\beta + [\alpha, \beta']\gamma &= 0,\\
[\beta, \gamma']\alpha' + [\gamma, \alpha']\beta' + [\alpha, \beta']\gamma' &= 0,\\
[\beta, \gamma']\alpha'' + [\gamma, \alpha']\beta'' + [\alpha, \beta']\gamma'' &= \mathfrak{M},
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

und diese Relationen bleiben auch richtig, wenn darin die Buchstaben α, β, γ und eben so, wenn ihre Zeiger ^{0}, $'$, $''$ cyklisch verwechselt werden. Mit Hülfe dieser allgemein bekannten Formeln ergeben sich aus (1) folgende Werthe:

$$\begin{aligned}
Q'Q''(x'y''-x''y') &= PP'(ab'-a'b)[\beta, \gamma']\\
&\quad + P'P''(a'b''-a''b')[\beta', \gamma''] + P''P(a''b-ab'')[\beta'', \gamma],\\
Q''Q(x''y-xy'') &= PP'(ab'-a'b)[\gamma, \alpha']\\
&\quad + P'P''(a'b''-a''b')[\gamma', \alpha''] + P''P(a''b-ab'')[\gamma'', \alpha],\\
QQ'(xy'-x'y) &= PP'(ab'-a'b)[\alpha, \beta']\\
&\quad + P'P''(a'b''-a''b')[\alpha', \beta''] + P''P(a''b-ab'')[\alpha'', \beta].
\end{aligned}$$

Werden diese Gleichungen linkerhand mit Q, Q', Q'', rechterhand aber mit deren Werthen aus (1), nämlich $\Sigma P\alpha, \ldots.$, der Reihe nach multiplicirt und die Produkte addirt, und wird noch für $xy'-x'y+x'y''-x''y'+x''y-xy''$ das entsprechende Zeichen $2.\Delta'$ eingeführt, so erhält man mittels der eben angedeuteten Relationen (2):

$$QQ'Q''.\Delta' = PP'P''.\mathfrak{M}.\Delta, \quad (3)$$

oder da $PP'P''.\mathfrak{M} = 6T$ und gleicherweise $QQ'Q'' = 6T'$ ist:

$$T.\Delta = T'.\Delta',$$

welche Gleichung den zu beweisenden Satz ausdrückt.

Zusatz 1. Es darf angenommen werden, dass die Richtungen der senkrechten Zerlegung der Kräfte so gewählt sind, dass keine der Componenten Q, Q', Q'' verschwindet; dagegen kann von den Componenten der anderen Zerlegung eine, z. B. $P=0$ sein. In diesem Falle sind jedoch, wie bekannt, wegen $P=0$ keineswegs auch $Pa=0$, $Pb=0$, sondern diese Produkte (Momente) behalten endliche bestimmte Werthe. Um sie anschaulicher darzustellen, werde im Anfange der Coordinaten eine beliebige Kraft K, parallel der Richtung der P, und zugleich an demselben Punkte auch die entgegengesetzte Kraft $-K$ angebracht.

Indem diese neuen Kräfte, an beliebiger Drehung des Systems theilnehmend, stets der Richtung P parallel bleiben und einander aufheben, wird durch ihre Beifügung an dem Systeme nichts geändert. Wird nun die Kraft K mit den ihr und einander parallelen Componenten, welche die Summe $P=0$ bilden, zusammengesetzt, so erhält man eine einfache Kraft K an einem festen Schwerpunkte, dessen Coordinaten wieder mit $x=a$, $y=b$ bezeichnet werden mögen. Diese Kraft K bildet mit der am Anfange der Coordinaten angebrachten Kraft $-K$ ein Paar, welches die der Richtung P parallelen Componenten in allen Stellungen des Systems ersetzt. Dabei besteht die Gleichung (3) fortwährend, nur müssen darin die Produkte Pa, Pb durch Ka, Kb ersetzt, P aber muss $=0$ angenommen werden, wo es ohne einen der Faktoren a und b vorkommt. Es war:

$$2.PP'P''.\varDelta = PP'P''\{ab'-a'b+a'b''-a''b'+a''b-ab''\}$$
$$=P'P''(b'.Pa-a'.Pb)+PP'P''(a'b''-a''b')$$
$$+P'P''(a''.Pb-b''.Pa);$$

wird nun Null für P, Ka für Pa, Kb für Pb eingesetzt, so verwandelt sich dieser Werth in folgenden:

$$KP'P''(ab'-a'b+a''b-ab''),$$

und die immer noch gültige Gleichung (3) nimmt folgende Gestalt an:

$$2.QQ'Q''.\varDelta = KP'P''.\mathfrak{M}(ab'-a'b+a''b-ab''). \qquad (4)$$

Ist noch eine zweite Componente $P'=0$, so muss die dritte $P''=R$, d. h. der Mittelkraft des gegebenen Systems gleich sein. Denkt man sich wieder eine willkürliche Kraft K', der Richtung P' parallel, nebst ihrer entgegengesetzten $-K'$ am Anfange der Coordinaten hinzugefügt, und dadurch die Kräfte P' auf ein Paar gebracht, nämlich $(K', -K')$, dessen Kräfte die Punkte (a', b') und $(0, 0)$ zu Angriffspunkten haben; so sind in der Gleichung (4) wiederum die Zeichen P', $P'a'$, $P'b'$ durch 0, $K'a'$, $K'b'$ zu ersetzen, und da zugleich $P''=R$ ist, so kommt:

$$2.QQ'Q''.\varDelta = KK'R.\mathfrak{M}.(ab'-a'b), \qquad (5)$$

wo a und b, a' und b' sich auf die Angriffspunkte der hinzugefügten Kräfte K und K' beziehen. Stehen die Richtungen P, P', P'' senkrecht auf einander, so ist $\mathfrak{M}=1$, und wenn ausserdem noch $P=0$, $P'=0$, mithin $P''=R$ ist, so ist der Angriffspunkt von R der Centralpunkt, welcher von jetzt an zum Anfange der Axen x und y genommen werde, deren Ebene keine andere ist, als die

Centralebene. Die Kräfte K und K' waren beliebig, man kann sie also $= R$ annehmen; nach allen diesen Annahmen wird

$$2 . QQ'Q'' . \Delta' = R^2 (ab' - a'b). \qquad (6)$$

Das gegebene System von Kräften ist hier auf fünf Kräfte gebracht, welche alle $= R$ sind und welche in eine einfache Kraft am Centralpunkte C und zwei Paare zerfallen. Die Arme dieser Paare fangen in C an und mögen CA und CB heissen; ihre Endpunkte A und B haben die Coordinaten a und b, a' und b', deren Anfangspunkt C ist; die Richtung der Axe x oder a ist dabei in der Centralebene noch beliebig. Auch sind die Richtungen der drei im Centralpunkte angebrachten Kräfte R senkrecht auf einander. Es ist aber immer möglich, die Zerlegungsrichtungen so zu wählen, dass die Arme CA und CB senkrecht auf einander stehen; sie fallen dann in die Durchschnitte derjenigen Ebenen, welche ich in meinen Untersuchungen die Mittelebenen genannt habe, mit der Centralebene. Wird diese Zerlegung der Kräfte vorausgesetzt, und nimmt man CA zur Axe der x, CB zur Axe der y, so wird $a = p$, $b = 0$, $a' = 0$, $b' = q$, und mithin

$$2 . QQ'Q'' . \Delta' = R^2 . pq,$$

oder, weil $QQ'Q'' . \Delta' = 6 . T\Delta' = 6 . T\Delta$ ist, so folgt: $T\Delta = \frac{1}{12} R^2 . pq$, welcher Ausdruck nicht allein die Unveränderlichkeit, sondern zugleich auch die geometrische Bedeutung des Produktes $T\Delta$ darlegt.

Zusatz 2. Wenn die gegebenen Kräfte so vertheilt sind, dass die drei Schwerpunkte bei irgend einer Zerlegung in gerader Linie liegen, so bleiben sie auch bei jeder anderen Zerlegung in derselben Geraden, welche ich die Centralaxe zu nennen pflege und welche für diesen besonderen Fall an die Stelle der Centralebene tritt. Solche Kräfte lassen sich immer durch zwei auf eine für alle Drehungen gültig bleibende Weise ersetzen, deren Angriffspunkte wieder in der Centralaxe liegen. Indem diese Zurückführung auf zwei Kräfte auf unzählig viele Arten geschehen kann, bleibt das Produkt aus dem Dreiecke, welches jene beiden Kräfte nach Richtung und Grösse zu Seiten hat, in den Abstand ihrer Angriffspunkte stets von derselben Grösse, und zwar ist dieses Produkt $= \frac{1}{2} R^2 . q$, wo R die Mittelkraft und q den Halbmesser des Centralkreises bedeutet, welcher in diesem besonderen Falle an die Stelle der Ellipse, so wie die Centralaxe an die Stelle der Hyperbel tritt. — Der Beweis ist auf ähnliche Art, wie bei dem entsprechenden allgemeinen Satze, leicht zu führen.

Schliesslich noch einige Bemerkungen, die sich auf die Lage der Mittelebenen gegen die oben mit CA, CB bezeichneten Arme

zweier Kräftepaare beziehen. Es seien, wie bisher, a, b; a', b';... die Coordinaten der Angriffspunkte der drei Kräfte P, P', P'', welche Punkte in der Centralebene und nicht in gerader Linie liegend gedacht werden; der Centralpunkt C sei der Anfang dieser Coordinaten. Zerlegt man nun die Kräfte P, P', P'' nach drei gegen einander senkrechten Richtungen, von welchen eine der Mittelkraft R parallel sei, bringt nach jeder der beiden anderen Richtungen die Kräfte $+R$ und $-R$ in C an und setzt nach jeder Richtung $+R$ mit den ihm parallelen Kräften zusammen, so ergeben sich zwei Schwerpunkte A und B, deren Coordinaten ξ und η (für A), ξ' und η' (für B) seien. Hiernach wird:

$$R\xi = \Sigma Pa\cos\alpha \qquad R\xi' = \Sigma Pa\cos\beta$$

$$R\eta = \Sigma Pb\cos\alpha \qquad R\eta' = \Sigma Pb\cos\beta.$$

Zugleich ist

$$\Sigma P\cos\alpha = 0, \quad \Sigma P\cos\beta = 0, \quad \Sigma P\cos\gamma = R,$$

und weil der Centralpunkt zum Anfange der Coordinaten gewählt ist:

$$\Sigma Pa\cos\gamma = 0, \quad \Sigma Pb\cos\gamma = 0.$$

Es sei nun

$$\cos\alpha = \sin\gamma\ \cos\delta \qquad \cos\beta = \sin\gamma\ \sin\delta$$

$$\cos\alpha' = \sin\gamma'\cos\delta' \qquad \cos\beta' = \sin\gamma'\ \sin\delta'$$

$$\cos\alpha'' = \sin\gamma''\cos\delta'' \qquad \cos\beta'' = \sin\gamma''\sin\delta'',$$

so gehen durch die Drehung der auf der einfachen Kraft R senkrechten Zerlegungsrichtungen um einen beliebigen Winkel u die δ, δ', δ'' in $\delta+u$, $\delta'+u$, $\delta''+u$ und die Schwerpunkte A und B in die neuen Schwerpunkte A' und B' über, deren Coordinaten x und y, x' und y' sein mögen. Es ergiebt sich sofort:

$$Rx = \Sigma Pa\sin\gamma\cos(\delta+u) \text{ u. s. w.};$$

daher:

$$x = \xi\cos u - \xi'\sin u \qquad y = \eta\cos u - \eta'\sin u$$

$$x' = \xi\sin u + \xi'\cos u \qquad y' = \eta\sin u + \eta'\cos u.$$

Soll nun der Winkel $A'CB'$ ein rechter sein, so muss die Bedingung $xx'+yy'=0$ erfüllt werden, woraus für u die Gleichung folgt:

$$\operatorname{tg} 2u = \frac{2(\xi\xi'+\eta\eta')}{\xi'^2+\eta'^2-\xi^2-\eta^2},$$

aus welcher dann weiter die Punkte A' und B' und mit ihnen die Lage der Mittelebenen bestimmt werden kann. Denkt man sich aber die Schwerpunkte A und B schon in den Mittelebenen liegend und die Arme CA und CB als Axen der x und y, so wird in obigen Ausdrücken der Coordinaten der neuen Schwerpunkte A' und B': $\xi = p$, $\eta = 0$, $\xi' = 0$, $\eta' = q$, und mithin:

$$x = p\cos u, \quad y = -q\sin u \quad (\text{für } A')$$

und

$$x' = p\sin u, \quad y' = q\cos u \quad (\text{für } B'),$$

wobei u ganz beliebig geblieben ist. Hieraus folgt, dass bei veränderter Zerlegungsrichtung die beiden zusammengehörigen Schwerpunkte A' und B' auf einer Ellipse fortrücken, deren Gleichung folgende ist:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1,$$

wie schon im 15. Bande des Crelle'schen Journals S. 34. bemerkt wurde; dabei bleibt die gegenseitige Lage der Punkte A' und B' immer eine solche, dass $xy + x'y' = 0$ und dass das Dreieck $A'CB'$ immer die gleiche Fläche behält oder $xy' - x'y = pq$ ist. Es lässt sich aber die mit dem Winkel u veränderliche Lage der beiden zusammengehörigen Schwerpunkte A' und B', in der Ellipse, deren senkrechte Hauptaxen $CA = p$, $CB = q$ sind, auf folgende einfache Anschauung zurückführen: Beschreibt man um C mit dem Halbmesser $CA = p$ einen Kreis $HEAGK$ (Taf. V. Fig. 8.), welcher von der Axe $CB = q$ in H geschnitten wird, dreht hierauf den rechten Winkel HCA beliebig, so dass er in die Lage ECG kommt, und fällt von den Punkten E und G des Kreises die Lothe ED und GF auf CA, welche die Ellipse in B' und A' schneiden, — nämlich so, dass die Punkte E und B' beide auf derselben Seite von CA liegen und ebenso auch die Punkte G und A' ihrerseits, — so sind A' und B' die gesuchten zusammengehörigen Schwerpunkte. Dabei ist es gleichgültig, ob der gewählte Halbmesser $CA = p$, mit welchem der Kreis beschrieben wurde, die grosse oder die kleine Halbaxe der Ellipse ist.

XXV.

Elementare Theorie des Pendelversuchs von Foucault, aus neuen Gesichtspunkten dargestellt.

Von
dem Herausgeber.

Einleitung.

Die Theorie des so ungemein wichtigen und in jeder Beziehung das grösste Interesse für sich in Anspruch nehmendes Foucault'schen Pendelversuchs ist schon oft auf elementarem Wege darzustellen versucht worden, und ich habe es mir zu einer besonderen Pflicht gemacht, mehrere dieser elementaren Darstellungen in früheren Heften des Archivs den Lesern dieser Zeitschrift mitzutheilen, auch selbst einen Beitrag zu denselben zu liefern versucht. Ich gestehe aber offen, dass keine dieser Darstellungen mich vollkommen befriedigt hat, so sehr ich auch das Verdienstliche mancher derselben anzuerkennen bereit bin, und diese Anerkennung bei jeder Gelegenheit auch öffentlich auszusprechen mich bemühet habe. Und so wenig mir selbst die bis jetzt bekannten elementaren Theorien des mit Recht so sehr berühmten Versuchs vollkommene Befriedigung gewährt haben, so habe ich dieselbe Erscheinung auch bei Anderen, insbesondere bei mehrerern meiner ausgezeichnetsten Schüler, wahrzunehmen mehrfache Gelegenheit gehabt. Daher habe ich mich vielfach bemühet, endlich eine mir völlige Befriedigung gewährende elementare Darstellung zu finden, und bin sehr oft und zu verschiedenen Zeiten zu diesen Meditationen zurückgekehrt. So bin ich denn endlich zu den Entwickelungen gelangt, die ich im Folgenden dem Urtheile der Leser des Archivs unterwerfen werde. Ich werde mich bemühen, zuerst die allgemeinen Principien, auf denen die folgende Darstellung beruhet, mit möglichster Kürze und Bündigkeit

darzulegen, worauf dann die weiteren Entwickelungen durchaus bloss rein-geometrischer Natur sein werden. Die durch diese Entwickelungen gewonnenen Resultate, die ich auch an sich für bemerkenswerth halte, sind keine Näherungsformeln, sondern völlig genaue analytische Ausdrücke, und führen mittelst einer ganz strengen Gränzenbetrachtung, die in der Natur des Foucault-schen Versuchs selbst ihre vollkommene Begründung und Berechtigung findet, sogleich zu den Ausdrücken, welche die Theorie dieses merkwürdigen Versuches enthalten, die also eben deshalb, weil sie durch eine ganz strenge Gränzenbetrachtung gewonnen worden sind, gleichfalls auf das Prädicat völlig strenger analytischer Ausdrücke Anspruch zu machen vollkommen berechtigt sind. Auf diese strenge Gränzenbetrachtung lege ich bei diesen Entwickelungen ebenfalls besonderes Gewicht, und kann anderen, solche strenge Gränzenbetrachtungen vertreten sollenden Betrachtungsweisen überhaupt keine wissenschaftliche Berechtigung in der neuen strengen Wissenschaft zuerkennen. Bei allen folgenden Entwickelungen habe ich mich absichtlich der analytischen Geometrie bedient, die ich bei dem gegenwärtigen Zustande des mathematischen Unterrichts, wenigstens auf den Lehranstalten, wo der vorliegende wichtige Gegenstand in ausgedehnterer Weise überhaupt zur Sprache kommen dürfte, für ganz eben so elementar, wie die synthetische Geometrie und die Trigonometrie halte. Dabei hat mich ein doppelter Gesichtspunkt geleitet. In wissenschaftlicher Rücksicht halte ich nämlich erstens keine andere Methode für eben so geeignet, mit gleicher Eleganz zu den neuen Ausdrücken zu gelangen, die ich im Folgenden entwickeln werde; und zweitens scheinen in didaktischer Beziehung die folgenden Entwickelungen sehr geeignet zur Uebung für Anfänger in der Anwendung der allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie zu sein. Nach diesen vorläufigen Bemerkungen gehe ich nun zu dem Gegenstande selbst über.

I.

Die allgemeinen Principien.

Wenn das in einem beliebigen Punkte der Oberfläche der um ihre Axe sich drehenden kugelförmigen Erde in geeigneter Weise aufgehängte Pendel in einer beliebigen Ebene in Schwingungen versetzt wird, so wird die Schwingungsebene

erstens durch die Schwerkraft genöthigt werden, fortwährend durch den Mittelpunkt der Erde zu gehen;

zweitens aber vermöge der Trägheit das Bestreben haben,

ihre Lage im Raume nicht zu verändern; d. h. sich selbst im Raume fortwährend parallel zu bleiben.

Diesem letzteren Bestreben würde die Schwingungsebene in der That auch vollständig folgen, wenn die Schwerkraft nicht vorhanden wäre, welche sie verhindert, demselben vollständig zu folgen; daher wird sie dem durch die Trägheit ihr eingedrückten Bestreben, bei der Bewegung der Erde fortwährend sich selbst parallel zu bleiben, nur so weit oder in dem Maasse folgen, als es ihr gewissermaassen von der Schwerkraft, die sie nöthigt, unausgesetzt durch den Mittelpunkt der Erde zu gehen, erlaubt oder gestattet wird. Hiernach wird also bei der Bewegung der Erde um ihre Axe die Schwingungsebene des Pendels stets eine solche Lage im Raume annehmen, dass sie immer durch den Mittelpunkt der Erde geht, und die, ihre in stetiger Folge unmittelbar vorhergehende Lage darstellende Ebene zwar schneidet, aber so schneidet, dass sie möglichst wenig von der zu derselben parallelen Lage abweicht. Bringen wir dieses hier im Allgemeinen ausgesprochene Princip auf einen strengen geometrischen Ausdruck, wie es die auf dasselbe zu gründende strenge mathematische Untersuchung fordert und gebietet, so wird sich für die Bestimmung der Lage der Schwingungsebene des Pendels in jedem Zeitmomente das folgende geometrische Princip ergeben:

Die Schwingungsebene des Pendels nimmt in jedem Zeitmomente eine solche Lage im Raume an, dass sie durch den Mittelpunkt der Erde geht, und die, ihre in stetiger Folge unmittelbar vorhergehende Lage darstellende Ebene unter dem kleinsten Winkel schneidet.

Dieser Lagenbestimmung der Schwingungsebene des Pendels nun einen Ausdruck in analytischen Formeln zu geben, werden wir, wie immer bei derartigen Untersuchungen, zuerst das bei derselben zur Geltung kommende Princip der Stetigkeit aufgeben müssen, und demzufolge zunächst das folgende geometrische Problem im Allgemeinen aufzulösen haben:

Durch einen gegebenen Punkt auf der um ihre Axe sich drehenden Erde, bei einer bestimmten Lage derselben, ist eine zugleich durch den Mittelpunkt der Erde gehende Ebene von gegebener Lage gelegt; wenn nun vermöge der Drehung der Erde um ihre Axe der in Rede stehende Punkt in eine andere beliebige Lage gekommen ist, so soll man die Lage einer durch denselben und den Mittelpunkt der Erde gehenden Ebene

bestimmen, welche mit der ersteren Ebene den kleinsten Winkel einschliesst.

Wenn uns die Auflösung dieses, zuerst den Fall der Discontinuität in's Auge fassenden Problems in zweckentsprechender Weise gelungen ist, so wird es, wie wir weiter unten sehen werden, dann auch leicht sein, durch einen strengen Gränzenübergang unmittelbar zu dem Falle der Continuität zu gelangen, welcher, wie aus dem Obigen von selbst sich ergiebt, hier durch die Natur der Sache von selbst gefordert wird.

II.

Analytische Auflösung der vorhergehenden Aufgabe.

Durch den als fest gedachten Mittelpunkt der Erde als Anfang legen wir ein festes rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz. Die Ebene der xy sei die Ebene des Aequators, so dass also die Axe der z mit der Erdaxe zusammenfällt. Der positive Theil der Axe der x kann beliebig angenommen werden, der positive Theil der Axe der y aber werde so angenommen, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x an durch den Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, nach derselben Richtung hin bewegen muss, nach welcher die Erde sich um ihre Axe dreht; endlich sei der positive Theil der Axe der z von dem Mittelpunkte der Erde nach deren Nordpole hin gerichtet. Dies vorausgesetzt, wollen wir uns nun den Ort, in welchem das Pendel aufgehängt ist, der im Folgenden der Beobachtungsort genannt werden soll, in einer beliebigen Lage denken, und seine polaren Coordinaten in Bezug auf das rechtwinklige System der xyz durch ω, $\bar{\omega}$, r bezeichnen. Der Winkel ω, welchen die Projection des nach dem Beobachtungsorte gezogenen Erdhalbmessers auf der Ebene der xy mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst, wird in der Ebene der xy von dem positiven Theile der Axe der x an durch den rechten Winkel (xy) hindurch, also im Sinne der Richtung der Drehung der Erde um ihre Axe, von 0 bis 360° gezählt; $\bar{\omega}$ ist die geographische Breite des Beobachtungsorts, absolut genommen also nicht grösser als 90°, aber positiv oder negativ, jenachdem der Beobachtungsort in der nördlichen oder südlichen Erdhälfte liegt; r bezeichnet den Halbmesser der Erde.

Wir wollen uns jetzt zuerst mit der Bestimmung der Lage der Schwingungsebene des Pendels bei der

durch die polaren Coordinaten ω, $\overline{\omega}$, r bestimmten ersten Lage des Beobachtungsorts beschäftigen.

Die Gleichung der Ebene des Meridians des Beobachtungsorts in dem angenommenen Systeme der xyz ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$y = x \operatorname{tang} \omega \quad \text{oder} \quad x \sin \omega - y \cos \omega = 0.$$

Von dem Beobachtungsorte aus denken wir uns in der Ebene des Meridians des Beobachtungsorts nach der Seite des Nordpols der Erde hin eine auf dem nach dem Beobachtungsorte gezogenen Erdhalbmesser senkrecht stehende Gerade gezogen, und bezeichnen die von dieser Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel respective durch u, v, w. Ziehen wir dann ferner von dem Mittelpunkte der Erde aus nach derselben Seite hin eine dieser Geraden parallele Gerade, so sind die Gleichungen dieser letzteren Geraden bekanntlich

$$\frac{x}{\cos u} = \frac{y}{\cos v} = \frac{z}{\cos w}.$$

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der nach dem Beobachtungsorte gezogene Erdhalbmesser mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, respective durch u', v', w', so hat man offenbar die folgenden Gleichungen:

$$r \cos u' = r \cos \omega \cos \overline{\omega},$$

$$r \cos v' = r \sin \omega \cos \overline{\omega},$$

$$r \cos w' = r \sin \overline{\omega};$$

weil die Formeln auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen die rechtwinkligen Coordinaten des Beobachtungsorts ausdrücken; also ist:

$$\cos u' = \cos \omega \cos \overline{\omega},$$

$$\cos v' = \sin \omega \cos \overline{\omega},$$

$$\cos w' = \sin \overline{\omega}.$$

Weil die vorher von dem Mittelpunkte der Erde aus in der Ebene des Meridians des Beobachtungsorts senkrecht gegen den nach dem Beobachtungsorte gehenden Erdhalbmesser gezogene Gerade in der Ebene des Meridians des Beobachtungsorts liegt, so ist nach dem Obigen offenbar:

$$\sin \omega \cos u - \cos \omega \cos v = 0;$$

und weil die in Rede stehende Gerade auf dem nach dem Beobachtungsorte gehenden Erdhalbmesser senkrecht steht, so hat man bekanntlich die Gleichung

$$\cos u \cos u' + \cos v \cos v' + \cos w \cos w' = 0,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\cos \omega \cos \bar{\omega} \cos u + \sin \omega \cos \bar{\omega} \cos v + \sin \bar{\omega} \cos w = 0.$$

Nimmt man hierzu noch die bekannte Gleichung

$$\cos u^2 + \cos v^2 + \cos w^2 = 1,$$

so hat man zur Bestimmung der Winkel u, v, w die drei folgenden Gleichungen:

$$\sin \omega \cos u - \cos \omega \cos v = 0,$$

$$\cos \omega \cos \bar{\omega} \cos u + \sin \omega \cos \bar{\omega} \cos v + \sin \bar{\omega} \cos w = 0,$$

$$\cos u^2 + \cos v^2 + \cos w^2 = 1.$$

Bestimmt man mittelst der beiden ersten Gleichungen $\cos u$ und $\cos v$ durch $\cos w$, so erhält man:

$$\cos u = -\cos \omega \tang \bar{\omega} \cos w,$$

$$\cos v = -\sin \omega \tang \bar{\omega} \cos w;$$

und folglich, wenn man diese Ausdrücke in die dritte Gleichung einführt:

$$\cos w = \pm \cos \bar{\omega};$$

also mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\cos u = \mp \cos \omega \sin \bar{\omega},$$

$$\cos v = \mp \sin \omega \sin \bar{\omega},$$

$$\cos w = \pm \cos \bar{\omega};$$

wo sich nun noch frägt, wie in diesen Formeln die Zeichen zu nehmen sind, was sich auf folgende Art entscheiden lässt. Denken wir uns in der von dem Mittelpunkte der Erde aus in der Ebene des Meridians des Beobachtungsorts senkrecht gegen den nach dem Beobachtungsorte gehenden Erdhalbmesser gezogenen Geraden einen beliebigen Punkt und bezeichnen dessen Entfernung von dem Mittelpunkt der Erde durch ϱ, so ist die dritte Coordinate dieses Punktes in dem angenommenen Coordinatensysteme offenbar in völliger Allgemeinheit $\varrho \cos w$, nach dem Obigen also $\pm \varrho \cos \bar{\omega}$; da nun aber diese dritte Coordinate unter

den oben gemachten Voraussetzungen offenbar jederzeit positiv ist, und $\cos\overline{\omega}$ gleichfalls jederzeit positiv ist, weil der absolute Werth von $\overline{\omega}$ den Quadranten nicht übersteigt, so muss man in dem vorhergehenden Ausdrucke $\pm\varrho\cos\overline{\omega}$ das obere Zeichen, und daher überhaupt auch in allen obigen Gleichungen dieselben Zeichen nehmen, d. h. man muss im Obigen

$$1) \quad \ldots\ldots \begin{cases} \cos u = -\cos\omega\sin\overline{\omega}, \\ \cos v = -\sin\omega\sin\overline{\omega}, \\ \cos w = \quad\cos\overline{\omega} \end{cases}$$

setzen.

Weil die Schwingungsebene des Pendels immer durch den Mittelpunkt der Erde, d. h. durch den Anfang des angenommenen Coordinatensystems geht, so hat dieselbe im Allgemeinen die Form

$$Ax + By + Cz = 0;$$

und da die Coordinaten des Beobachtungsorts offenbar

$$r\cos\omega\cos\overline{\omega},\quad r\sin\omega\cos\overline{\omega},\quad r\sin\overline{\omega}$$

sind, die Schwingungsebene des Pendels aber auch immer durch diesen Ort geht, so ist

$$A\cos\omega\cos\overline{\omega} + B\sin\omega\cos\overline{\omega} + C\sin\overline{\omega} = 0.$$

Ziehen wir von dem Mittelpunkte der Erde aus in der Schwingungsebene eine auf dem nach dem Beobachtungsorte gehenden Erdhalbmesser senkrecht stehende Gerade, und bezeichnen die von dieser Geraden mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch u_1, v_1, w_1; so sind die Gleichungen dieser Geraden:

$$\frac{x}{\cos u_1} = \frac{y}{\cos v_1} = \frac{z}{\cos w_1},$$

und es ist also, weil diese Gerade in der Schwingungsebene des Pendels liegt, nach dem Obigen:

$$A\cos u_1 + B\cos v_1 + C\cos w_1 = 0;$$

weil aber diese Gerade auch auf dem nach dem Beobachtungsorte gezogenen Erdhalbmesser senkrecht steht, so ist:

$$\cos u'\cos u_1 + \cos v'\cos v_1 + \cos w'\cos w_1 = 0,$$

also nach dem Obigen:

$$\cos\omega\cos\overline{\omega}\cos u_1 + \sin\omega\cos\overline{\omega}\cos v_1 + \sin\overline{\omega}\cos w_1 = 0;$$

und ausserdem ist bekanntlich

$$\cos u_1^2 + \cos v_1^2 + \cos w_1^2 = 1,$$

so dass wir also zwischen den Winkeln u_1, v_1, w_1 die drei folgenden Gleichungen haben:

$$A\cos u_1 + B\cos v_1 + C\cos w_1 = 0,$$
$$\cos\omega\cos\varpi\cos u_1 + \sin\omega\cos\varpi\cos v_1 + \sin\varpi\cos w_1 = 0,$$
$$\cos u_1^2 + \cos v_1^2 + \cos w_1^2 = 1.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen leitet man leicht die drei folgenden Gleichungen ab:

$$(A\sin\varpi - C\cos\omega\cos\varpi)\cos u_1 - (C\sin\omega\cos\varpi - B\sin\varpi)\cos v_1 = 0,$$
$$(B\cos\omega\cos\varpi - A\sin\omega\cos\varpi)\cos v_1 - (A\sin\varpi - C\cos\omega\cos\varpi)\cos w_1 = 0,$$
$$(C\sin\omega\cos\varpi - B\sin\varpi)\cos w_1 - (B\cos\omega\cos\varpi - A\sin\omega\cos\varpi)\cos u_1 = 0;$$

und bezeichnet also G einen gewissen noch unbestimmten Factor, so kann man offenbar setzen:

$$2) \quad \left\{\begin{array}{l} \cos u_1 = G(C\sin\omega\cos\varpi - B\sin\varpi), \\ \cos v_1 = G(A\sin\varpi - C\cos\omega\cos\varpi), \\ \cos w_1 = G(B\cos\omega - A\sin\omega)\cos\varpi. \end{array}\right.$$

Quadrirt man diese drei Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man wegen der dritten der drei obigen Gleichungen für den Factor G unmittelbar den folgenden Ausdruck:

$$3) \quad G = \pm \frac{1}{\sqrt{\left\{\begin{array}{c}(A\sin\varpi - C\cos\omega\cos\varpi)^2 + (B\sin\varpi - C\sin\omega\cos\varpi)^2 \\ + (A\sin\omega - B\cos\omega)^2\cos\varpi^2\end{array}\right\}}}.$$

Bezeichnen wir den 180° nicht übersteigenden Winkel, welchen die beiden von dem Mittelpunkte der Erde aus gezogenen, durch die Winkel u, v, w und u_1, v_1, w_1 bestimmten Geraden mit einander einschliessen, durch θ, so ist bekanntlich

$$\cos\theta = \cos u\cos u_1 + \cos v\cos v_1 + \cos w\cos w_1,$$

also nach 1) und 2):

$$\begin{array}{rl}\cos\theta = & - G\cos\omega\sin\varpi(C\sin\omega\cos\varpi - B\sin\varpi) \\ & - G\sin\omega\sin\varpi(A\sin\varpi - C\cos\omega\cos\varpi) \\ & + G\cos\varpi^2(B\cos\omega - A\sin\omega),\end{array}$$

und folglich, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$4) \quad \ldots \quad \cos\theta = -G(A\sin\omega - B\cos\omega),$$

wo für G immer sein obiger Werth zu setzen, wegen des Vorzeichens aber noch eine besondere Bestimmung zu geben ist.

Zu dem Ende wollen wir die Projection des nach dem Beobachtungsorte gezogenen Erdhalbmessers auf der Ebene des Aequators als den positiven Theil der Axe der x_1 eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $x_1y_1z_1$ annehmen, für welches die Ebene des Aequators die Ebene der x_1y_1 ist, und der positive Theil der Axe der y_1 so angenommen werden soll, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der x_1 an durch den rechten Winkel (x_1y_1) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y_1 zu gelangen, im Sinne der Drehung der Erde um ihre Axe bewegen muss; ausserdem soll der positive Theil der Axe der z_1 mit dem positiven Theile der Axe der z zusammenfallen. Dann hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten bekanntlich die folgenden Gleichungen:

$$x_1 = y\sin\omega + x\cos\omega,$$

$$y_1 = y\cos\omega - x\sin\omega;$$

und sind nun x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines in der von dem Mittelpunkte der Erde aus in der Schwingungsebene gezogenen Geraden liegenden Punktes, dessen Entfernung von dem Mittelpunkte der Erde wieder ϱ sein mag, so ist

$$x = \varrho\cos u_1, \quad y = \varrho\cos v_1, \quad z = \varrho\cos w_1;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$x_1 = \varrho(\sin\omega\cos v_1 + \cos\omega\cos u_1),$$

$$y_1 = \varrho(\cos\omega\cos v_1 - \sin\omega\cos u_1);$$

folglich nach 2), wie man leicht findet:

$$x_1 = \varrho G(A\sin\omega - B\cos\omega)\sin\bar{\omega},$$

$$y_1 = \varrho G\{(A\cos\omega + B\sin\omega)\sin\bar{\omega} - C\cos\bar{\omega}\}.$$

Wegen der oben gefundenen Gleichung

$$A\cos\omega\cos\bar{\omega} + B\sin\omega\cos\bar{\omega} + C\sin\bar{\omega} = 0$$

ist aber

$$A\cos\omega + B\sin\omega = -C\tang\bar{\omega},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$y_1 = -\frac{\varrho GC}{\cos\overline{\omega}}.$$

Nehmen wir nun die von dem Mittelpunkte der Erde aus in der Schwingungsebene gezogene Gerade immer so an, dass sie auf der Seite des Meridians des Beobachtungsorts liegt, nach welcher hin sich die Erde bewegt, so ist y_1 positiv, und aus der obigen Gleichung erhellet also, dass man unter der so eben gemachten Voraussetzung das Vorzeichen von G immer so nehmen muss, dass das Product GC negativ wird, wobei man nicht unbeachtet lassen darf, dass $\cos\overline{\omega}$ stets positiv ist, weil der absolute Werth von $\overline{\omega}$ nicht grösser als 90^0 ist.

Die Lage der Schwingungsebene des Pendels wollen wir uns jetzt durch die gerade Linie bestimmt denken, in welcher von derselben der Horizont des Beobachtungsorts geschnitten wird, wollen aber immer nur den einen der beiden Theile in's Auge fassen, in welche diese gerade Linie durch den Beobachtungsort getheilt wird, und werden im Folgenden diesen Theil der in Rede stehenden geraden Linie der Kürze wegen die Schwingungslinie nennen; der Theil der Mittagslinie des Beobachtungsorts, welcher von dem Beobachtungsorte aus nach der Seite des Nordpols der Erde hin liegt, soll dagegen von jetzt an die Nordlinie genannt werden. Die von der Schwingungslinie mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel wollen wir respective durch α, β, γ bezeichnen, und der von der Schwingungslinie mit der Nordlinie eingeschlossene Winkel, indem man denselben von der Nordlinie an nach der Seite des Meridians des Beobachtungsorts hin, nach welcher die Drehung der Erde gerichtet ist, von 0 bis 360^0 zählt, soll durch Θ bezeichnet werden, wobei man des Folgenden wegen nicht unbeachtet zu lassen hat, dass hiernach diese Winkel von der Nordlinie an eigentlich der Drehung der Erde entgegen gezählt werden. Unter diesen Voraussetzungen sind

$$\frac{x - r\cos\omega\cos\overline{\omega}}{\cos\alpha} = \frac{y - r\sin\omega\cos\overline{\omega}}{\cos\beta} = \frac{z - r\sin\overline{\omega}}{\cos\gamma}$$

die Gleichungen der geraden Linie, in welcher der Horizont des Beobachtungsorts von der Schwingungsebene des Pendels geschnitten wird. Da diese Linie auf dem nach dem Beobachtungsorte gezogenen Erdhalbmesser senkrecht steht, so ist

$$\cos\alpha\cos u' + \cos\beta\cos v' + \cos\gamma\cos w' = 0,$$

also nach dem Obigen:

$$\cos\alpha\cos\omega\cos\overline{\omega}+\cos\beta\sin\omega\cos\overline{\omega}+\cos\gamma\sin\overline{\omega}=0;$$

und da die in Rede stehende gerade Linie in der Schwingungsebene liegt, so muss auch die durch den Mittelpunkt der Erde mit derselben gezogene Parallele, deren Gleichungen

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}$$

sind, in der durch die Gleichung

$$Ax+By+Cz=0$$

charakterisirten Schwingungsebene des Pendels liegen, woraus sich unmittelbar die Gleichung

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma=0$$

ergiebt. Daher haben wir zwischen den Grössen A, B, C die beiden Gleichungen:

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma=0,$$
$$A\cos\omega\cos\overline{\omega}+B\sin\omega\cos\overline{\omega}+C\sin\overline{\omega}=0;$$

und bezeichnet also G_1 einen gewissen Factor, so kann man bekanntlich setzen:

$$A=G_1(\cos\beta\sin\overline{\omega}-\cos\gamma\sin\omega\cos\overline{\omega}),$$
$$B=G_1(\cos\gamma\cos\omega\cos\overline{\omega}-\cos\alpha\sin\overline{\omega}),$$
$$C=G_1(\cos\alpha\sin\omega-\cos\beta\cos\omega)\cos\overline{\omega}.$$

Also ist, wie man mit Hülfe der Gleichung

$$\cos\alpha\cos\omega\cos\overline{\omega}+\cos\beta\sin\omega\cos\overline{\omega}+\cos\gamma\sin\overline{\omega}=0$$

leicht findet:

$$A\sin\omega-B\cos\omega=G_1\{(\cos\alpha\cos\omega+\cos\beta\sin\omega)\sin\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\overline{\omega}\}$$

und

$$C\sin\omega\cos\overline{\omega}-B\sin\overline{\omega}=G_1\cos\alpha,$$
$$A\sin\overline{\omega}-C\cos\omega\cos\overline{\omega}=G_1\cos\beta,$$
$$(B\cos\omega-A\sin\omega)\cos\overline{\omega}=G_1\cos\gamma;$$

folglich

$$(A\sin\overline{\omega}-C\cos\omega\cos\overline{\omega})^2+(B\sin\overline{\omega}-C\sin\omega\cos\overline{\omega})^2$$
$$+(A\sin\omega-B\cos\omega)^2\cos\overline{\omega}^2=G_1{}^2,$$

und daher nach dem Obigen:

$$G^2 G_1^2 = 1.$$

Aus der Gleichung

$$Ax + By + Cz = 0$$

der Schwingungsebene des Pendels und den obigen Ausdrücken von A, B, C erhellet aber auf der Stelle, dass es verstattet ist, $G_1 = 1$ zu setzen, woraus sich dann ferner nach dem Vorhergehenden

$$G^2 = 1, \text{ also } G = \pm 1$$

ergiebt. Daher ist nach dem Obigen

$$A = \cos\beta \sin\varpi - \cos\gamma \sin\omega \cos\varpi,$$

$$B = \cos\gamma \cos\omega \cos\varpi - \cos\alpha \sin\varpi,$$

$$C = (\cos\alpha \sin\omega - \cos\beta \cos\omega) \cos\varpi$$

und

$$A \sin\omega - B \cos\omega = (\cos\alpha \cos\omega + \cos\beta \sin\omega) \sin\varpi - \cos\gamma \cos\varpi.$$

Wenn nun die Schwingungslinie auf der Seite des Meridians des Beobachtungsorts liegt, nach welcher die Drehung der Erde gerichtet ist, so ist es nach dem Obigen offenbar verstattet, $\Theta = \theta$, folglich $\cos\Theta = \cos\theta$, $\sin\Theta = \sin\theta$ zu setzen, und nach 4) ist also:

$$\cos\Theta = \mp \{(\cos\alpha \cos\omega + \cos\beta \sin\omega) \sin\varpi - \cos\gamma \cos\varpi\},$$

das Zeichen so genommen, dass

$$GC = \pm (\cos\alpha \sin\omega - \cos\beta \cos\omega) \cos\varpi,$$

d. h., weil $\cos\varpi$ positiv ist, dass

$$\pm (\cos\alpha \sin\omega - \cos\beta \cos\omega)$$

negativ wird; wenn dagegen die Schwingungslinie auf der entgegengesetzten Seite des Meridians des Beobachtungsorts liegt, so muss man offenbar $\Theta = \theta + 180^0$, also $\cos\Theta = -\cos\theta$, $\sin\Theta = -\sin\theta$ setzen, und nach 4) ist folglich:

$$\cos\Theta = \pm \{(\cos\alpha \cos\omega + \cos\beta \sin\omega) \sin\varpi - \cos\gamma \cos\varpi\},$$

das Zeichen so genommen, dass

$$GC = \pm (\cos\alpha \sin\omega - \cos\beta \cos\omega) \cos\varpi,$$

d. h., weil $\cos\varpi$ positiv ist, dass

$$\pm(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)$$

negativ wird. Nun überzeugt man sich aber ganz auf dieselbe Weise wie oben in einem ähnlichen Falle mittelst einer leichten Coordinaten-Verwandlung sogleich, dass die Grösse

$$\cos\beta\cos\omega - \cos\alpha\sin\omega$$

im ersten Falle positiv, im zweiten Falle negativ ist, dass also die Grösse

$$\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega$$

im ersten Falle negativ, im zweiten Falle positiv ist; woraus sich mittelst des Obigen auf der Stelle ergiebt, dass in beiden Fällen, also in völliger Allgemeinheit,

$$\cos\Theta = -\{(\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)\sin\varpi - \cos\gamma\cos\varpi\}$$

oder

$$5) \;..\; \cos\Theta = \cos\gamma\cos\varpi - (\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)\sin\varpi$$

zu setzen ist.

Weil bekanntlich

$$\cos\alpha\cos\omega\cos\varpi + \cos\beta\sin\omega\cos\varpi + \cos\gamma\sin\varpi = 0$$

und folglich

$$\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega = -\cos\gamma\tang\varpi,$$

$$\cos\gamma = -(\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)\cot\varpi$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\cos\Theta = \frac{\cos\gamma}{\cos\varpi} = -\frac{\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega}{\sin\varpi},$$

und folglich

$$\sin\Theta^2 = 1 - \frac{\cos\gamma^2}{\cos\varpi^2} = 1 - \cos\gamma^2 - \cos\gamma^2\tang\varpi^2$$

$$= \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 - (\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)^2$$

$$= \cos\alpha^2\sin\omega^2 + \cos\beta^2\cos\omega^2 - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\omega\cos\omega$$

$$= (\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)^2,$$

also nach dem Vorhergehenden offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\sin\Theta = -(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega).$$

Daher haben wir jetzt die folgenden ganz allgemein gültigen Formeln:

$$6) \ldots \begin{cases} \cos\Theta = \dfrac{\cos\gamma}{\cos\bar{\omega}} = -\dfrac{\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega}{\sin\bar{\omega}}, \\ \sin\Theta = \cos\beta\cos\omega - \cos\alpha\sin\omega. \end{cases}$$

Bevor wir weiter gehen, wollen wir zuerst zeigen, wie die Lage einer Ebene bestimmt wird, die durch eine gegebene gerade Linie geht und gegen eine gegebene Ebene unter dem kleinsten Winkel geneigt ist. Zu dem Ende sei in Taf. V. Fig. 9. die gegebene gerade Linie $\overline{AB}$, und $\overline{MN}$ sei die gegebene Ebene. Durch den Punkt B ziehe man in der gegebenen Ebene die beliebige gerade Linie $\overline{BC}$, fälle von A auf die gegebene Ebene des Perpendikel $\overline{AA_1}$, auf die Linie $\overline{BC}$ des Perpendikel $\overline{AC}$, und ziehe die Linien $\overline{BA_1}$ und $\overline{CA_1}$. Dann ist

$$\overline{AA_1} = \overline{AC}.\sin\overline{ACA_1},$$

$$\overline{AC} = \overline{AB}.\sin\overline{ABC};$$

also

$$\overline{AA_1} = \overline{AB}.\sin\overline{ABC}.\sin\overline{ACA_1}$$

oder

$$\sin\overline{ACA_1} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AB}.\sin\overline{ABC}}.$$

Da die Linien $\overline{AA_1}$ und $\overline{AB}$ constant sind, so wird der Winkel $\overline{ACA_1}$ ein Minimum werden, wenn $\sin\overline{ABC}$ ein Maximum wird, also für

$$\angle\,\overline{ABC} = 90^0$$

oder wenn die Linie $\overline{BC}$ in der Ebene $\overline{MN}$ auf der Linie $\overline{AB}$ senkrecht steht. Folglich wird die gesuchte Ebene bestimmt durch die gegebene gerade Linie und die auf derselben senkrecht stehende, in der gegebenen Ebene liegende gerade Linie.

Ferner wollen wir uns nun mit der Bestimmung der Lage der Schwingungsebene des Pendels bei einer durch die polaren Coordinaten ω_1, $\bar{\omega}$, r bestimmten zweiten Lage des Beobachtungsorts beschäftigen.

Bei dieser Bestimmung halten wir uns ganz an die im Obigen für dieselbe entwickelten Principien und suchen denselben nur einen analytischen Ausdruck zu geben.

Der nach dem Beobachtungsorte gezogene Erdhalbmesser schliesse mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z die 180° nicht übersteigenden Winkel u_1', v_1', w_1' ein, so ist:

$$\cos u_1' = \cos \omega_1 \cos \overline{\omega},$$

$$\cos v_1' = \sin \omega_1 \cos \overline{\omega},$$

$$\cos w_1' = \sin \overline{\omega}.$$

Ein anderer beliebiger, auf diesem Erdhalbmesser senkrecht stehender Erdhalbmesser sei gegen die positiven Theile der Axen der x, y, z unter den, 180° nicht übersteigenden Winkeln u'', v'', w'' geneigt, so ist

$$\cos u_1' \cos u'' + \cos v_1' \cos v'' + \cos w_1' \cos w'' = 0,$$

folglich nach dem Obigen:

$$\cos \omega_1 \cos \overline{\omega} \cos u'' + \sin \omega_1 \cos \overline{\omega} \cos v'' + \sin \overline{\omega} \cos w'' = 0.$$

Soll nun dieser Erdhalbmesser in der ersten Schwingungsebene des Pendels liegen, so muss

$$A \cos u'' + B \cos v'' + C \cos w'' = 0$$

sein; und aus den beiden Gleichungen

$$A \cos u'' + B \cos v'' + C \cos w'' = 0,$$

$$\cos \omega_1 \cos \overline{\omega} \cos u'' + \sin \omega_1 \cos \overline{\omega} \cos v'' + \sin \overline{\omega} \cos w'' = 0$$

folgt nun, wenn G' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\cos u'' = G'(C \sin \omega_1 \cos \overline{\omega} - B \sin \overline{\omega}),$$

$$\cos v'' = G'(A \sin \overline{\omega} - C \cos \omega_1 \cos \overline{\omega}),$$

$$\cos w'' = G'(B \cos \omega_1 - A \sin \omega_1) \cos \overline{\omega}.$$

Ist nun im Allgemeinen

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0$$

die Gleichung der zweiten Schwingungsebene des Pendels, so ist, weil nach den oben entwickelten Principien diese Ebene durch die beiden vorhergehenden Erdhalbmesser bestimmt wird, welche also in dieser Schwingungsebene liegen müssen:

$$A_1 \cos u'' + B_1 \cos v'' + C_1 \cos w'' = 0,$$
$$A_1 \cos \omega_1 \cos \overline{\omega} + B_1 \sin \omega_1 \cos \overline{\omega} + C_1 \sin \overline{\omega} = 0;$$

folglich, wenn G_1' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$A_1 = G_1'(\sin\omega_1\cos\overline{\omega}\cos w'' - \sin\overline{\omega}\cos v''),$$

$$B_1 = G_1'(\sin\overline{\omega}\cos u'' - \cos\omega_1\cos\overline{\omega}\cos w''),$$

$$C_1 = G_1'(\cos\omega_1\cos v'' - \sin\omega_1\cos u'')\cos\overline{\omega};$$

also, wie man mittelst des Vorhergehenden leicht findet, wenn der Kürze wegen

$$7) \quad . \quad . \quad \Omega = A\cos\omega_1\cos\overline{\omega} + B\sin\omega_1\cos\overline{\omega} + C\sin\overline{\omega}$$

gesetzt wird:

$$A_1 = -G'G_1'(A - \Omega\cos\omega_1\cos\overline{\omega}),$$

$$B_1 = -G'G_1'(B - \Omega\sin\omega_1\cos\overline{\omega}),$$

$$C_1 = -G'G_1'(C - \Omega\sin\overline{\omega});$$

wo es aber offenbar verstattet ist, bloss

$$A_1 = A - \Omega\cos\omega_1\cos\overline{\omega},$$

$$B_1 = B - \Omega\sin\omega_1\cos\overline{\omega},$$

$$C_1 = C - \Omega\sin\overline{\omega}$$

zu setzen. Für die Grösse Ω erhält man, wenn man in deren vorstehenden Ausdruck die oben für A, B, C gefundenen Ausdrücke einführt und dabei, wie es nach dem Obigen erforderlich ist, zugleich $G_1 = 1$ setzt, nach einigen leichten Verwandlungen den folgenden Ausdruck:

$$8) \quad \Omega = 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_1)\left\{\begin{array}{c} \cos\alpha\cos\tfrac{1}{2}(\omega + \omega_1)\sin\overline{\omega} \\ + \cos\beta\sin\tfrac{1}{2}(\omega + \omega_1)\sin\overline{\omega} \\ - \cos\gamma\cos\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_1)\cos\overline{\omega} \end{array}\right\}\cos\overline{\omega}.$$

Bezeichnen jetzt α_1, β_1, γ_1 die von der zweiten Schwingungslinie mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel, so haben wir, da die in Rede stehende Schwingungslinie im Horizont des Beobachtungsorts liegt, zu deren Bestimmung ganz in ähnlicher Weise wie früher die folgenden Gleichungen:

$$A_1\cos\alpha_1 + B_1\cos\beta_1 + C_1\cos\gamma_1 = 0,$$

$$\cos\omega_1\cos\overline{\omega}\cos\alpha_1 + \sin\omega_1\cos\overline{\omega}\cos\beta_1 + \sin\overline{\omega}\cos\gamma_1 = 0;$$

aus denen, wenn G'' einen gewissen Factor bezeichnet, sich sogleich die folgenden Ausdrücke ergeben:

$$\cos\alpha_1 = G''(C_1 \sin\omega_1 \cos\overline{\omega} - B_1 \sin\overline{\omega}),$$

$$\cos\beta_1 = G''(A_1 \sin\overline{\omega} - C_1 \cos\omega_1 \cos\overline{\omega}),$$

$$\cos\gamma_1 = G''(B_1 \cos\omega_1 - A_1 \sin\omega_1)\cos\overline{\omega};$$

also, wie man leicht findet, wenn man die obigen Ausdrücke von A_1, B_1, C_1 einführt:

$$\cos\alpha_1 = G''(C \sin\omega_1 \cos\overline{\omega} - B \sin\overline{\omega}),$$

$$\cos\beta_1 = G''(A \sin\overline{\omega} - C \cos\omega_1 \cos\overline{\omega}),$$

$$\cos\gamma_1 = G''(B \cos\omega_1 - A \sin\omega_1)\cos\overline{\omega}.$$

Bezeichnet nun endlich Θ_1 den von der zweiten Schwingungslinie mit der zweiten Nordlinie eingeschlossenen, ganz auf ähnliche Art wie früher den Winkel Θ genommenen Winkel, so ist nach 6):

$$9) \;.\;.\; \begin{cases} \cos\Theta_1 = \dfrac{\cos\gamma_1}{\cos\overline{\omega}} = -\dfrac{\cos\alpha_1 \cos\omega_1 + \cos\beta_1 \sin\omega_1}{\sin\overline{\omega}}, \\ \sin\Theta_1 = \cos\beta_1 \cos\omega_1 - \cos\alpha_1 \sin\omega_1; \end{cases}$$

also, wie man mittelst des Vorhergehenden sogleich findet:

$$10) \;.\; \begin{cases} \cos\Theta_1 = G''(B\cos\omega_1 - A\sin\omega_1), \\ \sin\Theta_1 = G''\{(A\cos\omega_1 + B\sin\omega_1)\sin\overline{\omega} - C\cos\overline{\omega}\}. \end{cases}$$

Entwickeln wir nun

$$\sin(\Theta - \Theta_1) = \sin\Theta\cos\Theta_1 - \cos\Theta\sin\Theta_1$$

mittelst der Formeln 6) und 10), so erhalten wir zuvörderst ohne alle Schwierigkeit:

$$\begin{aligned} \sin(\Theta - \Theta_1) = \;& G''(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)(A\sin\omega_1 - B\cos\omega_1) \\ & + G''(\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)(A\cos\omega_1 + B\sin\omega_1) \\ & - G''C(\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)\cot\overline{\omega}, \end{aligned}$$

oder, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\begin{aligned} \sin(\Theta - \Theta_1) = \;& G''(A\cos\beta - B\cos\alpha)\sin(\omega - \omega_1) \\ & + G''(A\cos\alpha + B\cos\beta)\cos(\omega - \omega_1) \\ & - G''C(\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)\cot\overline{\omega}. \end{aligned}$$

Leicht findet man aber mittelst der aus dem Obigen bekannten Ausdrücke von A, B, C und der Gleichungen

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$

$$\cos\alpha\cos\omega\cos\overline{\omega} + \cos\beta\sin\omega\cos\overline{\omega} + \cos\gamma\sin\overline{\omega} = 0$$

die folgenden Ausdrücke:

$$A\cos\beta - B\cos\alpha = \quad \sin\overline{\omega},$$

$$A\cos\alpha + B\cos\beta = -(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)\cos\gamma\cos\overline{\omega};$$

oder, weil

$$(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)\cos\overline{\omega} = C$$

ist:

$$A\cos\beta - B\cos\alpha = \quad \sin\overline{\omega},$$

$$A\cos\alpha + B\cos\beta = -C\cos\gamma.$$

Nimmt man hierzu nun noch die Gleichung

$$(\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)\cot\overline{\omega} = -\cos\gamma,$$

so erhält man ohne alle Schwierigkeit:

$$\sin(\Theta - \Theta_1) = G''\{\sin(\omega - \omega_1)\sin\overline{\omega} + C\cos\gamma[1 - \cos(\omega - \omega_1)]\},$$

also

$$\sin(\Theta - \Theta_1) = G''\{\sin(\omega - \omega_1)\sin\overline{\omega} + 2C\cos\gamma\sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_1)^2\},$$

folglich:

$$11) \quad \frac{\sin(\Theta - \Theta_1)}{\sin(\omega - \omega_1)} = G''\{\sin\overline{\omega} + C\cos\gamma\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_1)\};$$

oder:

$$12) \quad \frac{\sin(\Theta - \Theta_1)}{\sin(\omega - \omega_1)} = G''\{\sin\overline{\omega} + (\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)\cos\gamma\cos\overline{\omega}\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_1)\}.$$

Weil aber, wie aus dem Obigen erhellet,

$$\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega = -\sin\Theta, \quad \cos\gamma\cos\overline{\omega} = \cos\Theta\cos\overline{\omega}^2$$

ist, so kann man auch setzen:

$$13) \quad \frac{\sin(\Theta - \Theta_1)}{\sin(\omega - \omega_1)} = G''\{\sin\overline{\omega} - \sin\Theta\cos\Theta\cos\overline{\omega}^2\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_1)\}$$

oder:

$$14) \quad \frac{\sin(\Theta - \Theta_1)}{\sin(\omega - \omega_1)} = G''\{\sin\overline{\omega} - \tfrac{1}{2}\sin 2\Theta\cos\overline{\omega}^2\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_1)\}.$$

Nach dem Obigen ist offenbar:

$$\frac{1}{G''^2} = (A\sin\overline{\omega} - C\cos\omega_1\cos\overline{\omega})^2 + (B\sin\overline{\omega} - C\sin\omega_1\cos\overline{\omega})^2$$
$$+ (A\sin\omega_1 - B\cos\omega_1)^2\cos\overline{\omega}^2,$$

also, wie man leicht findet:

$$\frac{1}{G''^2} = A^2 + B^2 + C^2 - (A\cos\omega_1\cos\overline{\omega} + B\sin\omega_1\cos\overline{\omega} + C\sin\overline{\omega})^2,$$

und folglich, weil aus den aus dem Obigen bekannten Ausdrücken von A, B, C sich leicht ergiebt, dass $A^2+B^2+C^2=1$ ist, wobei man die Gleichungen

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$
$$\cos\alpha\cos\omega\cos\overline{\omega} + \cos\beta\sin\omega\cos\overline{\omega} + \cos\gamma\sin\overline{\omega} = 0$$

zu berücksichtigen hat, zugleich auch nach 7):

$$15) \quad \ldots \quad \frac{1}{G''^2} = 1 - \Omega^2, \quad G''^2 = \frac{1}{1-\Omega^2}.$$

Wir wollen nun auch noch

$$\cos(\Theta - \Theta_1) = \cos\Theta\cos\Theta_1 + \sin\Theta\sin\Theta_1$$

entwickeln. Zunächst erhält man mittelst der aus dem Obigen bekannten Formeln unmittelbar:

$$\cos(\Theta - \Theta_1) = G''\frac{(\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)(A\sin\omega_1 - B\cos\omega_1)}{\sin\overline{\omega}}$$
$$- G''(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)\{(A\cos\omega_1 + B\sin\omega_1)\sin\overline{\omega} - C\cos\overline{\omega}\},$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$\cos(\Theta - \Theta_1)$$
$$= G''\frac{\left\{\begin{array}{c}(\cos\alpha\cos\omega + \cos\beta\sin\omega)(A\sin\omega_1 - B\cos\omega_1)\\ -(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)(A\cos\omega_1 + B\sin\omega_1)\end{array}\right\}}{\sin\overline{\omega}}$$
$$+ G''(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)\{(A\cos\omega_1 + B\sin\omega_1)\cos\overline{\omega} + C\sin\overline{\omega}\}\cot\overline{\omega},$$

oder nach leichter Rechnung:

$$\cos(\Theta - \Theta_1)$$
$$= G''\frac{(A\cos\beta - B\cos\alpha)\cos(\omega - \omega_1) - (A\cos\alpha + B\cos\beta)\sin(\omega - \omega_1)}{\sin\overline{\omega}}$$
$$+ G''(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)\{(A\cos\omega_1 + B\sin\omega_1)\cos\overline{\omega} + C\sin\overline{\omega}\}\cot\overline{\omega}.$$

Nun ist aber

$$A\cos\beta - B\cos\alpha = \sin\overline{\omega}$$

und

$$A\cos\alpha + B\cos\beta = -C\cos\gamma$$
$$= -(\cos\alpha\sin\omega - \cos\beta\cos\omega)\cos\gamma\cos\overline{\omega}$$
$$= \sin\Theta\cos\Theta\cos\overline{\omega}^2,$$

auch

$$\Omega = (A\cos\omega_1 + B\sin\omega_1)\cos\overline{\omega} + C\sin\overline{\omega};$$

also:

$$\cos(\Theta-\Theta_1) = G''\{\cos(\omega-\omega_1) - \sin\Theta[\Omega + \cos\Theta\cos\overline{\omega}\sin(\omega-\omega_1)]\cot\overline{\omega}\},$$

und folglich:

$$16)\quad \frac{\cos(\Theta-\Theta_1)}{\cos(\omega-\omega_1)} = G''\{1 - \frac{\sin\Theta[\Omega+\cos\Theta\cos\overline{\omega}\sin(\omega-\omega_1)]}{\cos(\omega-\omega_1)}\cot\overline{\omega}\}$$

oder:

$$17)\quad \frac{\cos(\Theta-\Theta_1)}{\cos(\omega-\omega_1)} = G''\{1 - \frac{\Omega\sin\Theta + \frac{1}{2}\sin 2\Theta\cos\overline{\omega}\sin(\omega-\omega_1)}{\cos(\omega-\omega_1)}\cot\overline{\omega}\}.$$

III.

Uebergang zum Falle der Continuität.

Wir wollen jetzt annehmen, dass sich $\omega-\omega_1$, und folglich auch $\Theta-\Theta_1$ der Null nähere, so werden $\cos(\omega-\omega_1)$ und $\cos(\Theta-\Theta_1)$ sich beide der positiven Einheit nähern, und der Gränzwerth von

$$\frac{\cos(\Theta-\Theta_1)}{\cos(\omega-\omega_1)}$$

wird also offenbar eine positive Grösse sein. Weil nun nach 8)

$$\Omega = 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)\left\{\begin{array}{c}\cos\alpha\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)\sin\overline{\omega}\\ +\cos\beta\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)\sin\overline{\omega}\\ -\cos\gamma\cos\frac{1}{2}(\omega-\omega_1)\cos\overline{\omega}\end{array}\right\}\cos\overline{\omega}$$

ist, so nähert sich Ω, immer unter der Voraussetzung, dass $\omega-\omega_1$ sich der Null nähert, offenbar auch der Null, und wegen der Gleichung 17) ist daher offenbar

$$\operatorname{Lim}\frac{\cos(\Theta-\Theta_1)}{\cos(\omega-\omega_1)} = \operatorname{Lim} G'',$$

also nach dem Obigen Lim G'' eine positive Grösse. Nach 15) ist aber

$$G''^2 = \frac{1}{1-\Omega^2},$$

also, weil Ω sich der Null nähert, Lim. $G''^2 = 1$, und folglich, weil, wie wir eben bemerkt haben, Lim G'' positiv ist, auch

$$\text{Lim}\, G'' = 1.$$

Drücken wir nun die Gleichung 14) auf folgende Art aus:

$$\left\{\frac{\sin(\Theta-\Theta_1)}{\Theta-\Theta_1} : \frac{\sin(\omega-\omega_1)}{\omega-\omega_1}\right\} \cdot \frac{\Theta-\Theta_1}{\omega-\omega_1}$$
$$= G''\{\sin\overline{\omega} - \tfrac{1}{2}\sin 2\Theta \cos\overline{\omega}^2 \tan \tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)\},$$

so erhalten wir, weil die Grösse

$$\tfrac{1}{2}\sin 2\Theta \cos\overline{\omega}^2 \text{tang}\, \tfrac{1}{2}(\omega-\omega_1)$$

sich der Null nähert, wenn $\omega-\omega_1$ sich der Null nähert, auf der Stelle die folgende Gränzgleichung, bei der man immer zu beachten hat, dass $\omega-\omega_1$ und $\Theta-\Theta_1$ sich zugleich der Null nähern:

$$\left\{\text{Lim}\frac{\sin(\Theta-\Theta_1)}{\Theta-\Theta_1} : \text{Lim}\frac{\sin(\omega-\omega_1)}{\omega-\omega_1}\right\}.\text{Lim}\frac{\Theta-\Theta_1}{\omega-\omega_1} = \sin\overline{\omega}\,.\,\text{Lim}\, G'',$$

und weil nach einem allgemein bekannten Satze

$$\text{Lim}\frac{\sin(\omega-\omega_1)}{\omega-\omega_1} = 1, \quad \text{Lim}\frac{\sin(\Theta-\Theta_1)}{\Theta-\Theta_1} = 1,$$

nach dem Vorhergehenden aber auch

$$\text{Lim}\, G'' = 1$$

ist, so geht die vorstehende Gränzgleichung auf der Stelle in die folgende über:

$$18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{Lim}\frac{\Theta-\Theta_1}{\omega-\omega_1} = \sin\overline{\omega}.$$

Dass diese hier in aller Strenge abgeleitete Gleichung die vollständige Theorie des Foucault'schen Versuchs enthält, wird man auf der Stelle übersehen, wenn man nur alles Obige, namentlich auch das, was über die Art und Weise, wie die Winkel Θ und Θ_1 genommen worden sind, gesagt worden ist, sorgfältig beachtet. Noch weitere Erläuterungen hierüber hinzuzufügen, halte ich daher an diesem Orte für überflüssig, und hoffe, dass man den obigen, mit aller Strenge durchgeführten Entwickelungen einigen Beifall nicht versagen wird.

XXVI.

Die Auflösung der Gleichungen des fünften und sechsten Grades durch Construction nach Descartes, in eigenthümlicher Darstellung.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

Ueber den vierten Grad hinaus ist bekanntlich die allgemeine Auflösung der Gleichungen in dem gewöhnlichen algebraischen Sinne unmöglich; ja schon die Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades nimmt geometrische Hülfsmittel in Anspruch, insofern man die Anwendung der goniometrischen Formeln und Tafeln in den Kreis der Anwendungen der Geometrie auf die Algebra zu ziehen keinen Anstand nimmt; und was ist denn die allgemeine Auflösung der reinen Gleichungen mittelst des Cotesischen Lehrsatzes am Ende anders als eine Anwendung der Geometrie auf die Algebra? insbesondere da sich in diesem Falle die Wurzeln der aufzulösenden Gleichungen, oder wenigstens die reellen quadratischen Factoren, welche, gleich Null gesetzt, zu Gleichungen des zweiten Grades führen, durch deren Auflösung die in Rede stehenden Wurzeln erhalten werden, auf eine so einfache und elegante Weise geometrisch darstellen lassen. Endlich weiss man auch, mit wie grossem Glück man in vielen Fällen geometrische Betrachtungen bei den Beweisen wichtiger allgemeiner Sätze von den Gleichungen in Anwendung gebracht hat. Ich bin daher der Meinung, dass man mit demselben Eifer, mit welchem man bisher die wohl fast zum Abschlusse gebrachte Anwendung der Analysis auf die Geometrie bearbeitet hat, nun

auch umgekehrt die Anwendung der Geometrie auf die Analysis, insbesondere auf die eigentliche Algebra, studiren sollte, und habe mir schon längst vorgenommen, in einem diesen Gegenstand betreffenden grösseren Werke in Verbindung mit eigenen Untersuchungen Alles zusammenzustellen, was bisher in dieser Beziehung geleistet worden ist. Für jetzt will ich indess in dieser Abhandlung nur einen Punkt zur Sprache bringen, der, so alt er auch ist, bisher nach meiner Meinung nicht in dem Maasse, wie er verdient, beachtet worden ist, zugleich in der Hoffnung, dadurch vielleicht auch andere Mathematiker zu veranlassen, ihre Kräfte der Anwendung der Geometrie auf die Algebra zu widmen, und die Ergebnisse ihrer Untersuchungen in dieser Zeitschrift mitzutheilen.

Es ist bekannt, dass viele der berühmtesten älteren Mathematiker, hauptsächlich aber Descartes, Fermat, La Hire, L'Hospital, Hudde, Schooten, Newton, Halley, u. s. w. sich sehr eifrig mit der Auflösung der Gleichungen durch Construction mittelst verschiedener mehr oder weniger leicht zu beschreibender Curven beschäftigt haben. Newton in seiner „Arithmetica universalis. Lugduni Batavorum. 1732. p. 212.—p. 241." und auch Maclaurin in seiner „Algebra" von der mir die unter dem Titel: „Traité d'Algèbre et de la manière de l'appliquer. Traduit de de l'Anglois de M. Maclaurin. Paris. 1753. p. 387.—p. 404. erschienene französische Uebersetzung vorliegt, haben diesem Gegenstande ganze Kapitel ihrer Werke gewidmet. Die neueren Mathematiker haben diesen Weg der Auflösung der Gleichungen längst verlassen, wobei wohl der an sich ganz richtige Gesichtspunkt maassgebend gewesen ist, dass einmal die Auflösung der Gleichungen durch Construction von geringer praktischer Brauchbarkeit sei, und dass ferner bei einem an sich rein arithmetischen Gegenstande die Anwendung der Geometrie als ein fremdartiges Hülfsmittel betrachtet werden müsse. Dessenungeachtet bin ich der Meinung, dass es jetzt an der Zeit sein dürfte, den früher so eifrig verfolgten geometrischen Weg der Auflösung der algebraischen Gleichungen von Neuem zu betreten, natürlich einzig und allein aus dem Grunde, weil zu einem Fortschritte in der Auflösung der Gleichungen auf arithmetischem Wege bei der jetzigen Lage der Sache so gut wie gar keine Hoffnung verhanden ist. In naher Verbindung hiermit steht ein anderer, von den älteren Mathematikern gleichfalls mit grossem Eifer in's Auge gefasster Gegenstand, nämlich die Angabe zweckmässiger Instrumente zur organischen Beschreibung der bei der Auflösung der Gleichungen durch Construction angewandten Curven, worüber ich mich jedoch für jetzt hier nicht weiter verbreiten will.

Am eifrigsten unter allen Mathematikern hat wohl der scharfsinnige Descartes sich mit der Auflösung der Gleichungen durch Construction beschäftigt. Seine „Geometrie" (Renati Descartes Geometria, una cum notis Florimondi de Beaune, opera atque studio Francisci a Schooten. Francofurti ad Moenum. 1695. 4°.) ist ein aus 106 Seiten bestehendes Werkchen, welches auf diesem geringen Raume mehr neue Ideen enthält als viele andere bändereiche Werke, und hauptsächlich zu weiteren Untersuchungen anzuregen den Zweck hatte, was Descartes auch selbst andeutet, indem er seine merkwürdige, des sorgfältigsten Studiums sehr werthe Schrift mit den folgenden Worten schliesst: „Sed institutum meum non est prolixum librum conscribere, sed potius multa paucis comprehendere: quod forte judicabunt me fecisse, qui consideraturi sunt, quod, reductis ad eandem constructionem Problematis omnibus ejusdem generis, modum simul, quo ad infinitas alias diversas reduci, atque ita omnia infinitis modis resolvi possint, ostenderim. Praeterea etiam, quod constructis iis omnibus, quae Plana sunt, intersectione circuli et lineae rectae, et iis omnibus, quae Solida sunt, intersectione circuli et parabolae, ac tandem iis omnibus, quae uno gradu magis sunt composita, intersectione similiter circuli et lineae, uno gradu magis quam parabola compositae, eandem tantum viam in construendis reliquis omnibus, quae magis magisque in infinitum sunt composita, sequi oporteat. Etenim cognitis, in materia mathematicarum progressionum, duobus aut tribus prioribus terminis, reliquos invenire non est difficile. Adeo ut sperem a posteris mihi gratias habitum iri, non solum pro iis, quae hic explicui; sed etiam pro iis, quae consulto omisi, quo ipsis voluptatem illa inveniendi relinquerem." Wegen seiner grossen Kürze ist dieses Werkchen auch häufig commentirt worden, wie dies von Florimond de Beaune, von Schooten, ja selbst von dem berühmten Jacob Bernoulli in der Schrift: „Notae et animadversiones tumultuariae in Geometriam Cartesii. Editae primum ad calcem editionis Francofurtensis. Anno 1695*). (Jacobi Bernoulli Opera. T. II. 665.)" geschehen ist. Den weitläufigsten sehr werthvollen Commentar hat aber auf 590 Seiten der scharfsinnige und nach dem Zeugniss seiner Zeitgenossen sehr gelehrte Jesuit Claude Rabuel unter dem Titel: „Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes. Par le R. P. Claude Rabuel, de la Compagnie de Jesus. A Lyon. 1730. 4°". herausgegeben, wo in der Vorrede von dem commentirten berühmten Werkchen gesagt wird: „Cet Ouvrage,

*) Ohne Namen des Verfassers.

qu'un habile Géomètre de ce siècle appelle avec raison la Géométrie Françoise, étoit d'une difficulté presqu'insurmontable. M. Descartes avoit affecté de la resserrer dans les bornes les plus étroites. Bien des raisons, qu'on peut voir dans ses lettres, l'y avoient engagé." Den Schluss dieser merkwürdigen Schrift von Descartes macht die vollständige Auflösung der Gleichungen des fünften und sechsten Grades durch Construction. Dieselbe in ihrer Verbindung mit gewissen nöthigen Vorbereitungssätzen, die meistens nur angedeutet sind, mit vollständiger Deutlichkeit aufzufassen, ist nicht ganz leicht, und auch die Commentatoren, selbst Jacob Bernoulli, scheinen mehrfache von ihnen nicht ganz gelöste Schwierigkeiten gefunden zu haben. Wenn auch, wie ich sehr gern zugebe, auf diese Auflösung der Gleichungen des fünften und sechsten Grades in der That Alles Anwendung findet, was sich überhaupt gegen die geometrische Auflösung der Gleichungen sagen lässt, so gewährt es doch, wie es mir scheint, bei diesem Gegenstande, wo die arithmetische Betrachtung uns so ganz und gar keinen Aufschluss gewährt und uns völlig im Dunkeln und im Stich lässt, ein eigenthümliches Interesse, zu sehen, wie durch die sechs Durschnittspunkte zweier nach einfachen Gesetzen gekrümmten Linien, die im Ganzen auch leicht zu construiren sind, wenigstens sehr leicht construirt gedacht werden können, mit einem Male die sechs Wurzeln einer Gleichung des sechsten Grades erhalten werden, wenn die Wurzeln sämmtlich reell sind; wie diese sechs Durchnittspunkte sich auf eine geringere Anzahl reduciren, wenn unter den sechs Wurzeln imaginäre vorkommen; wie gewisse Durchschnittspunkte mit einander zusammenfallen, wenn die Gleichung gleiche reelle Wurzeln enthält; wie überhaupt die ganze Natur der Gleichung sich in den Duschschnittspunkten der zwei in Rede stehenden Curven darstellt und ausdrückt. Je merkwürdiger diese Construction namentlich deshalb ist, weil sie sich ganz allgemein auf jede Gleichung des fünften und sechsten Grades anwenden lässt, wenn mit derselben in gewissen Fällen einige nothwendige Transformationen vorgenommen worden sind: desto auffallender ist es, dass von derselben noch in keinem der mir bekannten neueren Werke die Rede gewesen ist, ja dass auch die älteren Commentatoren des Descartes sich nicht weitläufiger und eingehender mit derselben befasst haben, was vielleicht zum Theil seinen Grund in gewissen, von diesem Gegenstande dargebotenen Schwierigkeiten hat. Ich will daher im Geiste der neueren Analysis eine vollständige Darstellung dieser Auflösung der Gleichungen des fünften und sechsten Grades nebst allen nöthigen algebraischen und geometrischen Vorbereitungs-

sätzen in dieser Abhandlung liefern, indem ich gestehe, dass ich, nachdem es mir gelungen war, die eigentliche Natur dieser Auflösung vollständig zu durchschauen, den Scharfsinn ihres Urhebers von Neuem lebhaft bewundert habe. Besonders freuen wird es mich aber, wenn diese Abhandlung zu neuen Forschungen über die geometrische Auflösung der Gleichungen anregen sollte, welches auch einer der Zwecke ist, die ich durch dieselbe zu erreichen beabsichtige.

Allgemeine Betrachtungen über die Gleichungen.

§. 1.

Wenn

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \ldots = 0$$

eine beliebige Gleichung des $n$ten Grades ist, und in derselben $y-a$ für x gesetzt wird, wo also $y = x + a$ ist, so erhält man die Gleichung:

$$(y-a)^n - A(y-a)^{n-1} + B(y-a)^{n-2} - C(y-a)^{n-3} + \ldots = 0,$$

oder, wenn man die Binomial-Coefficienten auf gewöhnliche Weise bezeichnet und der Kürze wegen

$$A' = n_1 a + A,$$

$$B' = n_2 a^2 + (n-1)_1 aA + B,$$

$$C' = n_3 a^3 + (n-1)_2 a^2 A + (n-2)_1 aB + C,$$

$$D' = n_4 a^4 + (n-1)_3 a^3 A + (n-2)_2 a^2 B + (n-3)_1 aC + D,$$

u. s. w.

setzt, die Gleichung:

$$y^n - A'y^{n-1} + B'y^{n-2} - C'y^{n-3} + D'y^{n-4} - \ldots = 0.$$

Wenn man von sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung, welche mit der Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \ldots = 0$$

von gleich hohem Grade ist, die Grösse a subtrahirt, so erhält man die Wurzeln dieser letzteren Gleichung; oder, wenn a eine positive Grösse ist, so sind in der Gleichung

$$y^n - A'y^{n-1} + B'y^{n-2} - C'y^{n-3} + D'y^{n-4} - \ldots = 0$$

die sämmtlichen um die Grösse a vermehrten Wurzeln der Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \ldots = 0$$

enthalten, wobei wir rücksichtlich der imaginären Wurzeln bemerken, dass eine Vermehrung oder eine Verminderung derselben sich immer nur auf ihre reellen Theile beziehen soll; auch wollen wir im Folgenden der Kürze wegen die imaginären Wurzeln selbst positiv oder negativ nennen, jenachdem ihre reellen Theile positiv oder negativ sind, und zugleich soll eine imaginäre Wurzel dann als nicht verschwindend betrachtet werden, wenn ihr reeller Theil nicht verschwindet.

Hieraus erhellet nun, dass man durch successive Vermehrung oder eigentlich Vergrösserung der Wurzeln einer Gleichung nach der vorhergehenden Transformation immer zu einer Gleichung gelangen kann, deren sämmtliche Wurzeln positiv sind, und in denen auch keine Wurzel verschwindet.

§. 2.

Wenn man die beiden Polynome

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + Dx^{m-4} - \ldots$$

und

$$x^{m_1} - A_1x^{m_1-1} + B_1x^{m_1-2} - C_1x^{m_1-3} + D_1x^{m_1-4} - \ldots$$

in einander multiplicirt, so erhält man als Product die Grösse

$$\begin{aligned} x^{m+m_1} &- (A + A_1)x^{m+m_1-1} \\ &+ (B + AA_1 + B_1)x^{m+m_1-2} \\ &- (C + BA_1 + AB_1 + C_1)x^{m+m_1-3} \\ &+ (D + CA_1 + BB_1 + AC_1 + D_1)x^{m+m_1-4} \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

und sind nun die Coefficienten $A, B, C, D, \ldots$ und $A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots$ der beiden Factoren sämmtlich positiv und verschwinden nicht, so sind auch die Coefficienten

$$A+A_1,$$
$$B+AA_1+B_1,$$
$$C+BA_1+AB_1+C_1,$$
$$D+CA_1+BB_1+AC_1+D_1,$$
u. s. w.

des Products sämmtlich positiv und verschwinden nicht.

§. 3.

Jede Gleichung, deren Wurzeln

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots ;\ p\pm q\sqrt{-1},\ p_1\pm q_1\sqrt{-1},\ p_2\pm q_2\sqrt{-1}, \ldots$$

sind, lässt sich bekanntlich unter der Form

$$\left.\begin{array}{l}(x-a)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots\\ \times(x^2-2px+p^2+q^2)(x^2-2p_1x+p_1^2+q_1^2)(x^2-2p_2x+p_2^2+q_2^2)\ldots\end{array}\right\}=0$$

darstellen; und wenn also sämmtliche Wurzeln der Gleichung positiv sind und nicht verschwinden, so hat nach dem vorhergehenden Paragraphen die Gleichung offenbar die Form

$$x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+Dx^{n-4}-\ldots=0,$$

wo die Coefficienten A, B, C, D, ... sämmtlich positiv sind und keiner verschwindet. Weil man nun mittelst der in §. 1. gelehrten Transformation aus jeder gegebenen Gleichung durch successive Vermehrung der Wurzeln eine andere ableiten kann, in welcher sämmtliche Wurzeln positiv sind und nicht verschwinden, so ist klar, dass man durch die in Rede stehende Transformation aus jeder Gleichung eine andere von der Form

$$x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+Dx^{n-4}-\ldots=0$$

ableiten kann, deren Coefficienten A, B, C, D, ... sämmtlich positiv sind, und nicht verschwinden; aus den Wurzeln dieser transformirten Gleichung erhält man aber die Wurzeln der gegebenen Gleichung leicht, wenn man die ersteren sämmtlich um ein und dieselbe, durch die angewandten Transformationen offenbar selbst gegebene Grösse vermindert.

Hieraus erhellet, dass es verstattet ist, im Folgenden bloss Gleichungen von der Form

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \ldots = 0$$

zu betrachten, deren Coefficienten A, B, C, D,.... sämmtlich positiv sind und nicht verschwinden*).

§. 4.

Wir wollen nun annehmen, dass man durch die mehr erwähnte Transformation einer Gleichung des $n$ten Grades eine Gleichung desselben Grades von der vorhergehenden Form erhalten habe. Dann ist in der transformirten Gleichung der Coefficient des dritten Gliedes entweder grösser als das Quadrat der Hälfte des Coefficienten des zweiten Gliedes oder nicht. Im ersten Falle darf man die Transformation als beendigt betrachten, im zweiten Falle muss man, des Folgenden wegen, dieselbe fortsetzen, bis die in Rede stehende Bedingung erfüllt ist. Dass dies aber immer möglich ist, kann auf folgende Art leicht gezeigt werden. Die reellen oder imaginären Wurzeln der noch weiter zu transformirenden Gleichung des $n$ten Grades seien a, b, c, d, e, f, g..... Vermehrt man nun diese sämmtlichen Wurzeln um die reelle positive Grösse u, so ist der Coefficient des zweiten Gliedes in der transformirten Gleichung, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, bekanntlich

$$\begin{aligned}(a+u)+(b+u)+(c+u)+(d+u)+(e+u)+\ldots\\ =a+b+c+d+e+\ldots+nu,\end{aligned}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$S=a+b+c+d+e+f+\ldots$$

setzen, wo S nach der Voraussetzung eine reelle positive Grösse ist, $S+nu$. Der Coefficient des dritten Gliedes ist bekanntlich:

$$\begin{aligned}(a+u)(b+u)+(a+u)(c+u)+(a+u)(d+u)+(a+u)(e+u)+\ldots\\ +(b+u)(c+u)+(b+u)(d+u)+(b+u)(e+u)+\ldots\\ +(c+u)(d+u)+(c+u)(e+u)+\ldots\\ +(d+u)(e+u)+\ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

*) Dass umgekehrt eine Gleichung dieser Form immer bloss reelle positive nicht verschwindende Wurzeln haben kann, erhellet auf der Stelle; denn wäre $-a=a.(-1)$ eine reelle negative oder verschwindende Wurzel derselben, so wäre

$$\begin{aligned}a^n(-1)^n - Aa^{n-1}(-1)^{n-1} + Ba^{n-2}(-1)^{n-2} - Ca(-1)^{n-3} + \ldots\\ =\pm a^n \pm Aa^{n-1} \pm Ba^{n-2} \pm Ca^{n-3} \pm \ldots = 0,\end{aligned}$$

was unter der gemachten Voraussetzung offenbar ungereimt ist.

oder, wie leicht mittelst bekannter Sätze erhellet:

$$\begin{array}{l} ab+ac+ad+ae+\ldots\ldots+(n-1)(a+b+c+d+\ldots\ldots)u+\frac{n(n-1)}{2}u^2, \\ \quad +bc+bd+be+\ldots\ldots \\ \qquad +cd+ce+\ldots\ldots \\ \qquad\quad +de+\ldots\ldots \end{array}$$

u. s. w.

oder auch, wenn der Kürze wegen

$$\begin{array}{l} \Sigma=ab+ac+ad+ae+af+\ldots\ldots \\ \qquad +bc+bd+be+bf+\ldots\ldots \\ \qquad\quad +cd+ce+cf+\ldots\ldots \\ \qquad\qquad +de+df+\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\quad +ef+\ldots\ldots \end{array}$$

u. s. w.

gesetzt wird, wo nach der Voraussetzung Σ eine reelle positive Grösse ist,

$$\Sigma+(n-1)Su+\tfrac{1}{2}n(n-1)u^2.$$

Die Bedingung

$$\Sigma+(n-1)Su+\tfrac{1}{2}n(n-1)u^2>\left(\frac{S+nu}{2}\right)^2$$

führt nun nach und nach zu den folgenden Bedingungen:

$$\Sigma+(n-1)Su+\tfrac{1}{2}n(n-1)u^2>\tfrac{1}{4}S^2+\tfrac{1}{2}nSu+\tfrac{1}{4}n^2u^2,$$

$$\tfrac{1}{2}(n-2)Su+\tfrac{1}{2}n(\tfrac{1}{2}n-1)u^2>\frac{S^2-4\Sigma}{4};$$

und da unter der Voraussetzung, dass $n>2$ ist, diese Bedingung offenbar immer erfüllt ist, wenn die Bedingung

$$\tfrac{1}{2}(n-2)Su>\frac{S^2-4\Sigma}{4}$$

erfüllt, d. h. wenn

$$u>\frac{S^2-4\Sigma}{2(n-2)S}$$

ist, diese Bedingung sich aber unter der gemachten Voraussetzung offenbar immer erfüllen lässt, so lässt sich, wenn $n>2$ ist, auch die Bedingung

$$\Sigma + (n-1)\,Su + \tfrac{1}{2}n(n-1)u^2 > \left(\frac{S+nu}{2}\right)^2$$

immer erfüllen.

Der Fall $n=2$ bildet eine Ausnahme. Denn die Bedingung

$$(a+u)(b+u) > \left\{\frac{(a+u)+(b+u)}{2}\right\}^2$$

oder

$$ab + (a+b)u + u^2 > \frac{(a+b+2u)^2}{4}$$

verlangt die Erfüllung der Bedingung

$$4ab + 4(a+b)u + 4u^2 > (a+b)^2 + 4(a+b)u + 4u^2,$$

oder

$$4ab > (a+b)^2,$$

oder

$$(a+b)^2 - 4ab < 0,$$

also die Erfüllung der Bedingung $a^2+b^2-2ab<0$, also $(a-b)^2<0$, was ungereimt ist.

Für $n>2$ werden wir also, wenn in der transformirten Gleichung, deren reelle Wurzeln sämmtlich positiv sind und nicht verschwinden, die Bedingung, dass der Coefficient des dritten Gliedes grösser als das Quadrat der Hälfte des Coefficienten des zweiten Gliedes ist, noch nicht erfüllt wäre, immer die Wurzeln fernerhin noch so weit oder so lange vermehren können, bis sich diese Bedingung erfüllt zeigt; und nehmen wir nun dies mit dem Obigen zusammen, so dürfen wir uns berechtigt halten, im Folgenden nur Gleichungen von der Form

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \ldots = 0$$

zu betrachten, wo sämmtliche Coefficienten A, B, C, D, ... positiv sind und nicht verschwinden, und wo

$$B > \tfrac{1}{4}A^2$$

ist. Dass man aus den Wurzeln der transformirten Gleichung immer die Wurzeln der ursprünglich gegebenen Gleichung leicht erhält, wenn man die ersteren sämmtlich um ein und dieselbe, durch die angewandten Transformationen selbst unmittelbar gegebene reelle positive Grösse vermindert, braucht kaum nochmals besonders bemerkt zu werden.

Die Conchoiden.

§. 5.

Wenn in einer Ebene ein fester Punkt und in der Ebene einer in der ersten Ebene nach der Richtung ihrer Axe sich bewegenden Parabel ein zweiter, mit der Ebene der Parabel zugleich sich bewegender Punkt gegeben ist, so heisst der geometrische Ort der Punkte, in denen die sich bewegende Parabel in jeder Lage von einer durch die beiden gegebenen Punkte gelegten geraden Linie geschnitten wird, eine parabolische Conchoide.

§. 6.

Die erste Ebene, in welcher sich die Parabel nach der Richtung ihrer Axe bewegt, wollen wir als Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y annehmen, und der Parameter der Parabel soll durch p bezeichnet werden. Die Coordinaten des in dieser Ebene gegebenen festen Punktes seien a, b. Die Allgemeinheit wird nicht beeinträchtigt, wenn wir annehmen, dass die Parabel in der Ebene der xy sich so bewegt, dass ihre Axe auf der Axe der x hin gleitet. Ferner wollen wir die positiven x so annehmen, dass ihre Richtung von dem Scheitel der Parabel an gerechnet nach deren innerem Raume hin liegt, und in Bezug auf ein durch den Scheitel der Parabel als Anfang gelegtes, dem primitiven Coordinatensysteme paralleles Coordinatensystem sollen die Coordinaten des in der Ebene der Parabel gegebenen, mit derselben zugleich sich bewegenden Punktes durch c, d bezeichnet werden.

Die erste Coordinate des Scheitels der Parabel bei einer beliebigen Lage derselben sei u. Dann ist bei dieser Lage der Parabel in Bezug auf das System der xy die Gleichung der durch die beiden Punkte (ab) und (cd) gelegten geraden Linie offenbar:

$$y-d=\frac{b-d}{a-(c+u)}\{x-(c+u)\},$$

weil $c+u$, d die Coordinaten des in der Ebene der Parabel gegebenen Punktes in Bezug auf das System der xy sind; und die Gleichung der Parabel in Bezug auf dieses letztere System ist:

$$y^2=p(x-u).$$

Für die Durchschnittspunkte beider Linien müssen, wenn x, y deren Coordinaten bezeichnen, die beiden vorhergehenden Gleichungen bestehen, und die Gleichung der parabolischen Conchoide wird also offenbar erhalten, wenn man aus den beiden vorhergehenden Gleichungen die Grösse u eliminirt. Zuvörderst hat man aus der ersten Gleichung:

$$c+u=\frac{(b-d)x-a(y-d)}{b-y},$$

und aus der zweiten Gleichung ergiebt sich:

$$x-u=\frac{y^2}{p};$$

durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man aber auf der Stelle die Gleichung

$$c+x=\frac{(b-d)x-a(y-d)}{b-y}+\frac{y^2}{p},$$

welche die Gleichung der parabolischen Conchoide ist, und nach einigen leichten Transformationen sogleich auf die Form

$$y^3-by^2+p(a-c-x)y+p(bc-ad+dx)=0$$

gebracht wird.

Gewöhnlich setzt man, was auch für unseren gegenwärtigen Zweck genügt, $d=0$, und nimmt also den in der Ebene der sich bewegenden Parabel gegebenen Punkt in der Axe der Parabel an, was wir daher von jetzt an thun wollen; auch setzt man meistens c als positiv voraus, d. h. man nimmt den in der Ebene der Parabel gegebenen Punkt innerhalb der Parabel an, was von jetzt an gleichfalls geschehen soll.

Unter diesen Voraussetzungen ist nach dem Vorhergehenden die Gleichung der parabolischen Conchoide:

$$y^3-by^2+p(a-c-x)y+bcp=0,$$

oder, wie man leicht findet:

$$(y-b)(y^2-cp)+p(a-x)y=0,$$

woraus

$$x-a=\frac{(y-b)(y^2-cp)}{py},$$

also

$$x = a + \frac{(y-b)(y^2 - cp)}{py}$$

oder

$$x = a + \frac{(y-b)(y-\sqrt{cp})(y+\sqrt{cp})}{py}$$

folgt.

Unter den in Rede stehenden Voraussetzungen hat man nach dem Vorhergehenden auch die Gleichungen:

$$y = \frac{b}{a-(c+u)}\{x-(c+u)\}, \quad y^2 = p(x-u);$$

mittelst welcher x, y durch u ausgedrückt werden können. Durch Elimination von y erhält man nämlich zuvörderst zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$\frac{b^2}{\{a-(c+u)\}^2}\{x-(c+u)\}^2 = p(x-u)$$

oder

$$\frac{b^2}{\{a-(c+u)\}^2}\{(x-u)-c\}^2 = p(x-u),$$

welche Gleichung man leicht auf die Form

$$(x-u)^2 - \frac{2b^2c + p\{a-(c+u)\}^2}{b^2}(x-u) = -c^2$$

bringt; und durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung erhält man:

$$x - u = \frac{2b^2c + p(a-c-u)^2 \pm (a-c-u)\sqrt{p\{4b^2c + p(a-c-u)^2\}}}{2b^2},$$

also

$$x-(c+u) = \{a-(c+u)\}\frac{p(a-c-u) \pm \sqrt{p\{4b^2c + p(a-c-u)^2\}}}{2b^2},$$

folglich nach dem Obigen:

$$y = \frac{p(a-c-u) \pm \sqrt{p\{4b^2c + p(a-c-u)^2\}}}{2b};$$

zur Bestimmung von x, y haben wir daher die beiden folgenden Formeln, in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen:

$$x=\frac{2b^2(c+u)+p(a-c-u)^2\pm(a-c-u)\sqrt{p\{4b^2c+p(a-c-u)^2\}}}{2b^2},$$

$$y=\frac{p(a-c-u)\pm\sqrt{p\{4b^2c+p(a-c-u)^2\}}}{2b}.$$

Aus diesen Formeln erhellet zuvörderst, dass im Allgemeinen jedem reellen Werthe von u zwei reelle Werthe von x, y entsprechen. Nehmen wir nun aber, wodurch der Allgemeinheit der Betrachtung durchaus kein Eintrag geschieht, grösserer Bestimmtheit wegen an, dass auch b positiv sei, so erhellet leicht, dass jederzeit die oberen Zeichen für y positive, die unteren Zeichen dagegen für y negative Werthe liefern.

Die auf der positiven und negativen Seite der Axe der x liegenden Hälften der sich bewegenden Parabel wollen wir jetzt respective die positive und negative Hälfte dieser Parabel nennen, und man sieht nun aus dem Obigen offenbar, dass die parabolische Conchoide aus zwei von einander getrennten Zweigen besteht, von denen der eine von den Durchschnittspunkten der Geraden mit der positiven Hälfte der Parabel, der andere von den Durchschnittspunkten der Geraden mit der negativen Hälfte der Parabel gebildet oder beschrieben wird. Für den ersten dieser beiden Zweige der parabolischen Conchoide, welcher deren positiver Zweig genannt werden soll, ist nach dem Obigen:

$$x=\frac{2b^2(c+u)+p(a-c-u)^2+(a-c-u)\sqrt{p\{4b^2c+p(a-c-u)^2\}}}{2b^2},$$

$$y=\frac{p(a-c-u)+\sqrt{p\{4b^2c+p(a-c-u)^2\}}}{2b};$$

und für den zweiten Zweig der parabolischen Conchoide, welcher deren negativer Zweig genannt werden soll, ist:

$$x=\frac{2b^2(c+u)+p(a-c-u)^2-(a-c-u)\sqrt{p\{4b^2c+p(a-c-u)^2\}}}{2b^2},$$

$$y=\frac{p(a-c-u)-\sqrt{p\{4b^2c+p(a-c-u)^2\}}}{2b}.$$

Die Gleichung

$$y^3-by^2+p(a-c-x)y+bcp=0$$

hat für jedes bestimmte x immer entweder eine reelle und zwei imaginäre, oder drei reelle Wurzeln. Sind die drei Wurzeln überhaupt A, B, C, so ist bekanntlich

$$ABC = -bcp,$$

und das Product der drei Wurzeln ist daher stets negativ. Sind nun die beiden Wurzeln B, C imaginär, also

$$B = v + w\sqrt{-1}, \quad C = v - w\sqrt{-1};$$

so ist

$$BC = (v + w\sqrt{-1})(v - w\sqrt{-1}) = v^2 + w^2,$$

folglich

$$ABC = A(v^2 + w^2) = -bcp,$$

also A negativ. Sind alle drei Wurzeln reell, so ist, da ihr Product negativ ist, mindestens eine negativ, und die andern sind entweder beide positiv oder beide negativ. Also hat unsere Gleichung für jedes bestimmte x entweder eine reelle negative und zwei imaginäre Wurzeln, oder eine reelle negative und zwei reelle positive Wurzeln, oder drei reelle negative Wurzeln.

§. 7.

Wie man die parabolische Conchoide durch Bewegung einer Parabel beschreiben kann, ist aus dem Obigen von selbst ersichtlich; dieselbe lässt sich aber auch durch Bestimmung einzelner ihrer Punkte construiren, was jetzt noch kurz gezeigt werden soll.

Den in der Ebene der xy gegebenen festen Punkt wollen wir durch A bezeichnen, und jetzt, was ohne der Allgemeinheit zu schaden geschehen kann, $a = 0$ setzen, so dass also der Punkt A in dem positiven Theile der Ordinatenaxe liegend angenommen wird. Der Anfang der Coordinaten mag durch O bezeichnet werden. Aus einem beliebigen Punkte der Abscissenaxe, dessen Abscisse r sei, beschreibe man mit dem beliebigen Halbmesser ϱ einen Kreis, welcher die Ordinatenaxe auf der positiven und negativen Seite der Abscissenaxe respective in den Punkten B und B' schneidet; die Gleichung dieses Kreises ist

$$(x - r)^2 + y^2 = \varrho^2,$$

also für $x = 0$:

$$y = \pm\sqrt{\varrho^2 - r^2},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\overline{BO} = \overline{B'O} = \sqrt{\varrho^2 - r^2}.$$

Die von dem Mittelpunkte des beschriebenen Kreises aus nach

den Seiten der positiven und negativen Abscissen hin liegenden Durchschnittspunkte desselben mit der Abscissenaxe seien respective B_1 und B_1'; die Abscissen dieser beiden Punkte sind nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten offenbar respective $r+\varrho$ und $r-\varrho$. Auf der Abscissenaxe bestimme man jetzt einen Punkt, dessen Abscisse $c+(r-\varrho)$ ist, und verbinde denselben mit dem Punkte B durch eine gerade Linie, deren Gleichung nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$y-\sqrt{\varrho^2-r^2}=-\frac{\sqrt{\varrho^2-r^2}}{c+(r-\varrho)}x$$

oder

$$y-\sqrt{\varrho^2-r^2}=-\frac{\sqrt{\varrho^2-r^2}}{c-(\varrho-r)}x$$

ist. Durch den Punkt A ziehe man mit dieser Linie eine Parallele, deren Gleichung nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$y-b=-\frac{\sqrt{\varrho^2-r^2}}{c-(\varrho-r)}x$$

ist, und bestimme deren Durchschnittspunkte P und P' mit den durch B und B' mit der Abscissenaxe parallel gezogenen Geraden, so haben wir, da die Gleichungen dieser Parallelen respective

$$y=\sqrt{\varrho^2-r^2} \quad \text{und} \quad y=-\sqrt{\varrho^2-r^2}$$

oder überhaupt

$$y=\pm\sqrt{\varrho^2-r^2}$$

sind, wenn das obere Zeichen der durch B, das untere Zeichen der durch B' mit der Abscissenaxe parallel gezogenen Geraden entspricht, zur Bestimmung der Coordinaten x, y dieser Durchschnittspunkte die Gleichungen:

$$y=\pm\sqrt{\varrho^2-r^2}, \quad y-b=-\frac{\sqrt{\varrho^2-r^2}}{c-(\varrho-r)}x$$

wo das obere Zeichen dem Punkte P, das untere dem Punkte P' entspricht. Hat man nun aber auf der Abscissenaxe einen Punkt bestimmt, dessen Abscisse p ist, und den Kreis durch diesen Punkt so beschrieben, dass dieser Punkt von dem Mittelpunkte des Kreises aus nach der Seite der positiven Abscissen hin liegt, so ist nach dem Obigen $\varrho+r=p$, folglich

$$\sqrt{\varrho^2-r^2}=\sqrt{(\varrho+r)(\varrho-r)}=\sqrt{p(\varrho-r)},$$

und die obigen Gleichungen sind also unter diesen Voraussetzungen:

$$y = \pm\sqrt{p(\varrho - r)}, \quad y - b = -\frac{\sqrt{p(\varrho - r)}}{c - (\varrho - r)}\,x.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch Division:

$$\frac{y-b}{y} = \mp\frac{x}{c-(\varrho - r)},$$

also, wie man leicht findet:

$$\varrho - r = \frac{c(y-b) \pm xy}{y-b};$$

nun ist $y^2 = p(\varrho - r)$, also

$$y^2 = \frac{p\{c(y-b) \pm xy\}}{y-b}$$

oder

$$y^2 = \frac{p\{(c \pm x)y - bc\}}{y-b},$$

und folglich, wie man sogleich übersieht:

$$y^3 - by^2 - p(c \pm x)y + bcp = 0.$$

Verbindet man den durch die Abscisse $c + (r - \varrho)$ bestimmten Punkt der Abscissenaxe mit dem Punkte B' durch eine Gerade, so ist deren Gleichung:

$$y + \sqrt{\varrho^2 - r^2} = \frac{\sqrt{\varrho^2 - r^2}}{c + (r - \varrho)}\,x$$

oder

$$y + \sqrt{\varrho^2 - r^2} = \frac{\sqrt{\varrho^2 - r^2}}{c - (\varrho - r)}\,x.$$

und die Gleichung der durch den Punkt A mit dieser geraden Linie parallel gezogenen Geraden ist

$$y - b = \frac{\sqrt{\varrho^2 - r^2}}{c - (\varrho - r)}\,x.$$

Zur Bestimmung der Coordinaten x, y der Durchschnittspunkte P_1 und P_1' dieser Geraden mit den durch B und B' mit der Abscissenaxe parallel gezogenen Geraden hat man also die Gleichungen:

$$y=\pm\sqrt{\varrho^2-r^2},\quad y-b=\frac{\sqrt{\varrho^2-r^2}}{c-(\varrho-r)}x$$

wo das obere Zeichen dem Punkte P_1, das untere dem Punkte P_1' entspricht; hat man aber den beschriebenen Kreis auch jetzt wieder auf dieselbe Art construirt wie vorher, so werden die vorstehenden Gleichungen:

$$y=\pm\sqrt{p(\varrho-r)},\quad y-b=\frac{\sqrt{p(\varrho-r)}}{c-(\varrho-r)}x.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Division:

$$\frac{y-b}{y}=\pm\frac{x}{c-(\varrho-r)},$$

also, wie man leicht findet:

$$\varrho-r=\frac{c(y-b)\mp xy}{y-b};$$

nun ist $y^2=p(\varrho-r)$, also

$$y^2=\frac{p\{c(y-b)\mp xy\}}{y-b}$$

oder

$$y^2=\frac{p\{(c\mp x)y-bc\}}{y-b},$$

woraus sogleich

$$y^3-by^2-p(c\mp x)y+bcp=0$$

folgt. Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist für $a=0$ die Gleichung der parabolischen Conchoide:

$$y^3-by^2-p(c+x)y+bcp=0;$$

also sind die durch die vorhergehende Construction bestimmten Punkte P und P_1' Punkte der parabolischen Conchoide, deren man durch die vorhergehende Construction beliebig viele finden kann.

Die Angabe eines recht zweckmässigen Instruments zur Beschreibung parabolischer Conchoiden würde ich für verdienstlich halten.

§. 8.

Die elliptische und hyperbolische Conchoide entstehen auf ganz ähnliche Weise wie die parabolische Conchoide; da wir diese Curven zu unserem gegenwärtigen Zwecke jedoch nicht gebrauchen, so werden hier wenige Bemerkungen über dieselben

genügen. Die in §. 6. eingeführten Bezeichnungen behalten wir auch hier bei, mit Ausnahme des Parameters p; die Coordinaten c, d sollen sich aber jetzt auf den Mittelpunkt der bewegten Ellipse oder Hyperbel beziehen, und auch u soll die Abscisse dieses Mittelpunkts in einer beliebigen Lage der Ellipse oder Hyperbel sein. Die Gleichung der durch die Punkte (ab) und (cd) gelegten Geraden ist wie in §. 6. auch jetzt wieder:

$$y-d=\frac{b-d}{a-(c+u)}\{x-(c+u)\},$$

und die Gleichung der Ellipse ist, wenn m, n ihre Halbaxen bezeichnen:

$$\left(\frac{x-u}{m}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2=1;$$

für die Hyperbel hat man hier und im Folgenden nur überall $n\sqrt{-1}$ für n zu setzen. Aus der ersten dieser beiden Gleichungen erhalten wir:

$$c+u=\frac{(b-d)x-a(y-d)}{b-y},$$

also

$$u=\frac{(b-d)x-a(y-d)}{b-y}-c,$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$x-u=\frac{(x-a)(y-d)+c(y-b)}{y-b}.$$

Führt man diesen Werth von $x-u$ in die Gleichung

$$\left(\frac{x-u}{m}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2=1$$

ein, so erhält man als Gleichung der elliptischen und hyperbolischen Conchoide die folgende:

$$\left\{\frac{(x-a)(y-d)+c(y-b)}{m(y-b)}\right\}^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2=1,$$

mit deren Umgestaltung wir uns nicht weiter beschäftigen wollen, indem wir in der Kürze nur noch Folgendes bemerken.

Für $a=0$ wird die vorstehende Gleichung:

$$\left\{\frac{x(y-d)+c(y-b)}{m(y-b)}\right\}^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2=1,$$

und setzt man in dieser Gleichung noch $c=d=0$ und $m=n$, so wird dieselbe:

$$\frac{x^2y^2}{(y-b)^2}+y^2=m^2,$$

welches die bekannte Gleichung der gewöhnlichen Conchoide des Nikomedes ist.

Auflösung der Gleichungen des fünften und sechsten Grades.

§. 9.

Wir wollen jetzt die Durchschnittspunkte einer parabolischen Conchoide und eines Kreises bestimmen, deren Gleichungen respective

$$y^3-by^2-p(c+x)y+bcp=0$$

und

$$(x-f)^2+(y-g)^2=r^2$$

sind, wo bei der parabolischen Conchoide $a=0$ gesetzt worden ist, was bekanntlich verstattet ist. Die Coordinaten x, y der Durchschnittspunkte beiden Curven müssen aus den zwei Gleichungen

$$y^3-by^2-p(c+x)y+bcp=0,$$
$$(x-f)^2+(y-g)^2=r^2$$

bestimmt werden, da dieselben diesen beiden Gleichungen genügen müssen. Die Elimination von x ist am leichtesten, weil diese Grösse in der Gleichung der parabolischen Conchoide nur in der ersten Potenz vorkommt. Aus der Gleichung der parabolischen Conchoide folgt aber, wenn man x mittelst derselben bestimmt:

$$x=\frac{(y-b)(y^2-cp)}{py},$$

und führt man nun diesen Werth von x in die Gleichung des Kreises ein, so wird dieselbe:

$$\left\{\frac{(y-b)(y^2-cp)}{py}-f\right\}^2+(y-g)^2=r^2$$

oder

$$\{(y-b)(y^2-cp)-fpy\}^2+p^2y^2(y-g)^2=p^2r^2y^2,$$

also

$$\{y^3-by^2-(c+f)py+bcp\}^2+p^2y^2(y-g)^2=p^2r^2y^2,$$

und folglich, wenn man diese Gleichung gehörig entwickelt und ordnet:

$$\left.\begin{array}{l} y^6 \\ -2by^5 \\ +\{b^2-2(c+f)p+p^2\}y^4 \\ +\{2b(2c+f)p-2gp^2\}y^3 \\ +\{(c+f)^2p^2-2b^2cp+g^2p^2-p^2r^2\}y^2 \\ -2bc(c+f)p^2y \\ +b^2c^2p^2 \end{array}\right\}=0.$$

Aus dieser Gleichung des sechsten Grades muss, um die Coordinaten der Durchschnittspunkte unserer beiden Curven zu finden, y bestimmt werden, worauf man x mittelst der Formel

$$x=\frac{(y-b)(y^2-cp)}{py}$$

erhält.

§. 10.

Sei nun die aufzulösende Gleichung des sechsten Grades:

$$y^6-\alpha y^5+\beta y^4-\gamma y^3+\delta y^2-\varepsilon y+\omega=0,$$

wobei wir annehmen, dass diese Gleichung schon auf die Form gebracht sei, dass die Coefficienten α, β, γ, δ, ε, ω sämmtlich positive nicht verschwindende Grössen sind, und dass

$$\beta>\tfrac{1}{4}\alpha^2$$

ist, was bekanntlich nach dem Obigen jederzeit möglich ist. Vergleichen wir nun diese Gleichung mit der in dem vorhergehenden Paragraphen gefundenen Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} y^6 \\ -2by^5 \\ +\{b^2-2(c+f)p+p^2\}y^4 \\ +\{2b(2c+f)p-2gp^2\}y^3 \\ +\{(c+f)^2p^2-2b^2cp+g^2p^2-p^2r^2\}y^2 \\ -2bc(c+f)p^2y^2 \\ +b^2c^2p^2 \end{array}\right\}=0,$$

so erhalten wir zur Bestimmung der sechs Grössen b, c, p, f, g, r aus $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \omega$ die sechs folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \alpha=2b, \\ \beta=b^2-2(c+f)p+p^2, \\ \gamma=2gp^2-2b(2c+f)p, \\ \delta=(c+f)^2p^2-2b^2cp+g^2p^2-p^2r^2, \\ \varepsilon=2bc(c+f)p^2, \\ \omega=b^2c^2p^2. \end{array}$$

Aus der ersten Gleichung erhält man für b den positiven Werth:

$$b=\tfrac{1}{2}\alpha,$$

und aus der sechsten Gleichung ergiebt sich

$$bcp=\sqrt{\omega},$$

wobei man zu beachten hat, dass nach §. 6. die Grössen b, c, p sämmtlich positiv sind. Führt man den gefundenen Werth von bcp in die fünfte Gleichung ein, so wird dieselbe:

$$\varepsilon=2(c+f)p\sqrt{\omega},$$

woraus sich

$$(c+f)p=\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\omega}}$$

ergiebt. Diesen Werth von $(c+f)p$ führe man in die zweite Gleichung ein, so erhält man:

$$\beta=b^2-\frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega}}+p^2=\tfrac{1}{4}\alpha^2-\frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega}}+p^2,$$

also:

$$p=\sqrt{\beta-\tfrac{1}{4}\alpha^2+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega}}},$$

welcher Ausdruck unter allen Umständen reell und endlich ist, da nach der Voraussetzung

$$\beta>\tfrac{1}{4}\alpha^2$$

ist, und alle Coefficienten der gegebenen Gleichung des sechsten Grades positive nicht verschwindende Grössen sind. Führt man jetzt die gefundenen Ausdrücke von b und p in die Gleichung

$$bcp=\sqrt{\omega} \quad \text{oder} \quad c=\frac{\sqrt{\omega}}{bp}$$

ein, so erhält man:

$$c=\frac{2\sqrt{\omega}}{\alpha\sqrt{\beta-\tfrac{1}{4}\alpha^2+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega}}}}=\frac{2\sqrt{\omega}}{\alpha p},$$

welcher Ausdruck positiv ist. Aus der Gleichung

$$(c+f)p=\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\omega}}$$

ergiebt sich nun:

$$c+f=\frac{\varepsilon}{2p\sqrt{\omega}}, \quad \text{also} \quad f=\frac{\varepsilon}{2p\sqrt{\omega}}-c,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$f=\frac{\varepsilon}{2p\sqrt{\omega}}-\frac{2\sqrt{\omega}}{\alpha p}.$$

Aus der dritten der sechs aufzulösenden Gleichungen erhält man:

$$g=\frac{\gamma}{2p^2}+\frac{b(2c+f)}{p},$$

also, weil

$$b=\tfrac{1}{2}\alpha, \quad 2c+f=\frac{2\sqrt{\omega}}{\alpha p}+\frac{\varepsilon}{2p\sqrt{\omega}}$$

ist:

$$g=\frac{\gamma}{2p^2}+\frac{\sqrt{\omega}}{p^2}+\frac{\alpha\varepsilon}{4p^2\sqrt{\omega}}.$$

Aus der vierten der sechs aufzulösenden Gleichungen erhält man endlich:

$$r^2=g^2+(c+f)^2-\frac{\delta+2b^2cp}{p^2},$$

also nach dem Obigen:

$$r=\sqrt{g^2+\frac{\varepsilon^2}{4p^2\omega}-\frac{\delta+\alpha\sqrt{\omega}}{p^2}}.$$

Wir haben also zur Berechnung der sechs Grössen b, c, p, f, g, r die folgenden Formeln:

$$b=\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$p=\sqrt{\beta-\tfrac{1}{4}\alpha^2+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega}}},$$

$$c=\frac{2\sqrt{\omega}}{\alpha p},$$

$$f=\frac{\varepsilon}{2p\sqrt{\omega}}-\frac{2\sqrt{\omega}}{\alpha p},$$

$$g=\frac{\gamma}{2p^2}+\frac{\sqrt{\omega}}{p^2}+\frac{\alpha\varepsilon}{4p^2\sqrt{\omega}},$$

$$r=\sqrt{g^2+\frac{\varepsilon^2}{4p^2\omega}-\frac{\delta+\alpha\sqrt{\omega}}{p^2}};$$

welche man fast noch bequemer zur numerischen Rechnung auch auf folgende Art darstellen kann:

$$b=\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$p=\sqrt{\beta-b^2+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega}}},$$

$$c=\frac{\sqrt{\omega}}{bp},$$

$$f=\frac{\varepsilon}{\alpha cp^2}-c,$$

$$g=\frac{\gamma}{2p^2}+\frac{b(2c+f)}{p},$$

$$r=\sqrt{(c+f)^2+g^2-\frac{\delta+\alpha\sqrt{\omega}}{p^2}},$$

Man erhält durch diese Formeln für b,c,p endliche reelle völlig bestimmte positive, für f, g endliche reelle völlig bestimmte Werthe, und nur r kann imaginär ausfallen. Wenn dies aber der Fall ist, d. h. wenn

$$g^2+\frac{\varepsilon^2}{4p^2\omega}-\frac{\delta+\alpha\sqrt{\omega}}{p^2}<0,$$

oder

$$4g^2p^2\omega+\varepsilon-4(\delta+\alpha\sqrt{\omega})\omega<0,$$

oder nach dem Obigen

$$4p^2\left(\frac{\gamma}{2p^2}+\frac{\sqrt{\omega}}{p^2}+\frac{\alpha\varepsilon}{4p^2\sqrt{\omega}}\right)^2\omega+\varepsilon^2-4(\delta+\alpha\sqrt{\omega})\omega<0,$$

oder

$$\frac{(\gamma+2\sqrt{\omega}+\frac{\alpha\varepsilon}{2\sqrt{\omega}})^2\omega}{p^2}+\varepsilon^2-4(\delta+\alpha\sqrt{\omega})\omega<0,$$

oder

$$(\gamma+2\sqrt{\omega}+\frac{\alpha\varepsilon}{2\sqrt{\omega}})^2\omega+p^2\{\varepsilon^2-4(\delta+\alpha\sqrt{\omega})\omega\}<0,$$

oder

$$(\gamma+2\sqrt{\omega}+\frac{\alpha\varepsilon}{2\sqrt{\omega}})^2\omega+(\beta-\tfrac{1}{4}\alpha^2+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega}})\{\varepsilon^2-4(\delta+\alpha\sqrt{\omega})\omega\}<0$$

ist; so sind alle Wurzeln unserer Gleichung

$$y^6-\alpha y^5+\beta y^4-\gamma y^3+\delta y^2-\varepsilon y+\omega=0$$

imaginär. Denn aus §. 9. erhellet unmittelbar, dass sich diese Gleichung, indem b, c, p, f, g, r ihre obigen Werthe behalten, immer auf die Form

$$\left\{\frac{(y-b)(y^2-cp)}{py}-f\right\}^2+(y-g)^2=r^2\text{*)}$$

bringen lässt, wo b, c, p, f, g unter allen Bedingungen reelle Grössen sind; und sollte nun unter der gemachten Voraussetzung, wenn nämlich

$$r^2=g^2+\frac{\varepsilon^2}{4p^2\omega}-\frac{\delta+\alpha\sqrt{\omega}}{p^2}$$

negativ, oder r imaginär ist, y irgend einen reellen, der Gleichung

$$y^6-\alpha y^5+\beta y^4-\gamma y^3+\delta y^2-\varepsilon y+\omega=0$$

---

*) Diese Transformation jeder Gleichung des sechsten Grades ist an sich bemerkenswerth, und verdient wohl, dass ich hier auf dieselbe besonders aufmerksam mache.

genügenden Werth, diese Gleichung also eine reelle Wurzel haben, so müsste dieser reelle Werth von y auch die Gleichung

$$\left\{\frac{(y-b)(y^2-cp)}{py}-f\right\}^2+(y-g)^2=r^2$$

erfüllen, was jedenfalls ungereimt ist, da in dieser Gleichung die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens eine reelle positive, die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens eine reelle negative Grösse ist.

Wenn aber die Formel

$$r=\sqrt{g^2+\frac{\varepsilon^2}{4p^2\omega}-\frac{\delta+\alpha\sqrt{\omega}}{p^2}}$$

für r einen reellen Werth liefert, so kann man mittelst der im Vorhergehenden durch die Coefficienten der Gleichung

$$y^6-\alpha y^5+\beta y^4-\gamma y^3+\delta y^2-\varepsilon y+\omega=0$$

bestimmten Grössen b, c, p die parabolische Conchoide, und mittelst der durch dieselben Coefficienten bestimmten Grössen f, g, r den Kreis wirklich beschreiben, und die Ordinaten der Durchschnittspunkte dieser beiden Curven werden dann, wie aus allem Obigen unzweideutig hervorgeht, die reellen Wurzeln der obigen Gleichung sein, was einer weiteren Erläuterung nicht bedürfen wird. Die Anzahl der Durchschnittspunkte der beiden Curven wird natürlich immer der Anzahl der reellen Wurzeln, welche die in Rede stehende Gleichung hat, entsprechen.

Descartes beschreibt nur den positiven Zweig (§. 6.) der parabolischen Conchoide, und war deshalb getadelt worden, wie man bei Rabuel a. a. O. p. 574. nachsehen kann. Gegen diesen Tadel vertheidigt sich Descartes in einem seiner Briefe, und hat auch vollkommen Recht; denn da die Gleichung

$$y^6-\alpha y^5+\beta y^4-\gamma y^3+\delta y^2-\varepsilon y+\omega=0,$$

wie wir aus dem Obigen wissen, nur reelle positive Wurzeln hat*), der negative Zweig der parabolischen Conchoide aber bloss negative Ordinaten enthält, so können sich in diesem die Wurzeln der Gleichung nicht finden, sondern bloss im positiven Zweige, welcher

*) Wenigstens wird angenommen, dass die gegebene Gleichung des sechsten Grades immer so transformirt worden sei, dass die transformirte Gleichung, auf welche die obige Auflösung angewandt wird, nur reelle positive Wurzeln hat.

nur positive Ordinaten enthält. Die Construction des negativen Zweiges der parabolischen Conchoide würde also in der That eine ganz unnütze Arbeit sein, und jener Mathematiker, welcher den scharfsinnigen Descartes tadelte, dass er den negativen Zweig der in Rede stehenden Curve*) nicht beschrieben habe, konnte sich daher wohl schwerlich eine völlig deutliche Einsicht in dessen nach unserer Meinung in ihrer Art vollendete Auflösung der Gleichungen des sechsten Grades verschafft haben.

Ob die parabolische Conchoide sich mit hinreichender Leichtigkeit so genau beschreiben lässt, dass von der obigen Auflösung der Gleichungen des sechsten Grades der Algebra ein praktischer Nutzen erwachsen kann: darauf kann es nach meiner Meinung bei einem solchen, zunächst und hauptsächlich ein theoretisches Interesse darbietenden Gegenstande für's Erste nicht ankommen. Nach einigen von mir angestellten Versuchen glaube ich aber sagen zu können, dass, wenn man nur erst die zu bewegende Parabel beschrieben hat, die fernere Construction der parabolischen Conchoide einer besonderen Schwierigkeit nicht unterliegt.

§. 11.

Was die Auflösung der Gleichungen des fünften Grades, im Allgemeinen der Gleichung

$$y^5 + ay^2 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$$

betrifft, so kann man diese Gleichung immer zuerst auf die Form

$$y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + dy^2 + ey = 0$$

einer Gleichung des sechsten Grades bringen, und wenn man nun nach der im Obigen gegebenen Anleitung die Wurzeln dieser Gleichung nur hinreichend vermehrt oder vergrössert; so wird man die Auflösung immer wieder auf die Auflösung einer Gleichung des sechsten Grades von der vorher betrachteten Form

$$y^6 - \alpha y^5 + \beta y^4 - \gamma y^3 + \delta y^2 - \varepsilon y + \omega = 0,$$

wo alle Coefficienten nicht verschwindende positive Grössen sind, zurückführen können, was weiter zu erläutern nicht erforderlich sein wird.

---

*) la compagne de la ligne courbe, wie Descartes sagt.

Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades.

§. 12.

Die Gleichungen des dritten und vierten Grades können auf verschiedene Arten durch Construction aufgelöst werden. Meistens müssen dabei mehrere verschiedene Fälle besonders betrachtet werden, und gewöhnlich wird auch angenommen, dass das zweite Glied der Gleichungen auf bekannte Weise weggeschafft sei. Die von Hudde gegebenen Auflösungen sind sehr allgemein und nehmen die letztere Voraussetzung nicht in Anspruch, weshalb ich, der Verwandtschaft dieses Gegenstandes mit den vorhergehenden Betrachtungen wegen, diese Auflösungen hier kurz mittheilen will.

Die aufzulösende Gleichung sei die Gleichung

$$y^4-\alpha y^3+\beta y^2-\gamma y+\omega=0$$

des vierten Grades, wo nur angenommen werden soll, dass ω eine nicht verschwindende positive Grösse sei, welche Bedingung sich bekanntlich nach unseren früheren Betrachtungen immer als erfüllt betrachten lässt. Man construire eine gleichseitige Hyperbel, deren Gleichung

$$xy=\sqrt{\omega}$$

ist, und einen Kreis, dessen Gleichung, wenn

$$f=\frac{\gamma}{2\sqrt{\omega}},\quad g=\tfrac{1}{2}\alpha,\quad r=\sqrt{f^2+g^2-\beta}=\sqrt{\tfrac{1}{4}\alpha^2+\frac{\gamma^2}{4\omega}-\beta}$$

gesetzt wird,

$$(x-f)^2+(y-g)^2=r^2$$

ist. Eliminirt man $x=\frac{\sqrt{\omega}}{y}$, so wird diese letztere Gleichung:

$$\left(\frac{\sqrt{\omega}}{y}-\frac{\gamma}{2\sqrt{\omega}}\right)^2+(y-\tfrac{1}{2}\alpha)^2=\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}\alpha^2+\frac{\gamma^2}{4\omega}-\beta}\right)^2,$$

also

$$\frac{\omega}{y^2}-\frac{\gamma}{y}+\frac{\gamma^2}{4\omega}+y^2-\alpha y+\tfrac{1}{4}\alpha^2=\tfrac{1}{4}\alpha^2+\frac{\gamma^2}{4\omega}-\beta,$$

oder

$$\frac{\omega}{y^2}-\frac{\gamma}{y}+y^2-\alpha y+\beta=0,$$

und folglich

$$y^4-\alpha y^3+\beta y^2-\gamma y+\omega=0;$$

daher sind die Ordinaten der Durchschnittspunkte der beiden beschriebenen Curven die Wurzeln dieser Gleichung. Wenn

$$\tfrac{1}{4}\alpha^2+\frac{\gamma^2}{4\omega}-\beta<0,$$

oder, da ω positiv angenommen wird,

$$(\alpha^2-4\beta)\omega+\gamma^2<0$$

ist, so sind alle Wurzeln der Gleichung

$$y^4-\alpha y^3+\beta y^2-\gamma y+\omega=0$$

imaginär.

§. 13.

Um die Gleichung

$$y^3-\alpha y^2+\beta y-\omega=0,$$

wo wir annehmen wollen und bekanntlich zu dieser Annahme berechtigt sind, dass wenigstens β und ω nicht verschwindende positive Grössen sind, aufzulösen, construire man eine gleichseitige Hyperbel, deren Gleichung

$$xy=\frac{\omega}{\sqrt{\beta}}$$

ist, und, wenn

$$f=\sqrt{\beta},\quad g=\tfrac{1}{2}\alpha+\frac{\omega}{2\beta},\quad r=\sqrt{(\tfrac{1}{2}\alpha-\frac{\omega}{2\beta})^2}$$

gesetzt wird, einen Kreis, dessen Gleichung

$$(x-f)^2+(y-g)^2=r^2$$

ist. Eliminirt man $x=\frac{\omega}{y\sqrt{\beta}}$, so wird diese letztere Gleichung:

$$\left(\frac{\omega}{y\sqrt{\beta}}-\sqrt{\beta}\right)^2+(y-\tfrac{1}{2}\alpha-\frac{\omega}{2\beta})^2=(\tfrac{1}{2}\alpha-\frac{\omega}{2\beta})^2,$$

oder, wie man nach gehöriger Entwickelung leicht findet:

$$y^4-(\alpha+\frac{\omega}{\beta})y^3+(\beta+\frac{\alpha\omega}{\beta})y^2-2\omega y+\frac{\omega^2}{\beta}=0.$$

Nun ist aber

$$y^4-(\alpha+\frac{\omega}{\beta})y^3+(\beta+\frac{\alpha\omega}{\beta})y^2-2\omega y+\frac{\omega^2}{\beta}$$

$$=(y-\frac{\omega}{\beta})(y^3-\alpha y^2+\beta y-\omega),$$

und die oben stehende Gleichung wird also:

$$(y-\frac{\omega}{\beta})(y^3-\alpha y^2+\beta y-\omega)=0.$$

Die Ordinaten der Durschnittspunkte der beiden beschriebenen Curven sind die Wurzeln dieser Gleichung, und diese Ordinaten repräsentiren also den Werth $\frac{\omega}{\beta}$ und die Wurzeln der aufzulösenden Gleichung

$$y^3-\alpha y^2+\beta y-\omega=0.$$

Führt man den Werth $\frac{\omega}{\beta}$ für y in die Function $y^3-\alpha y^2+\beta y-\omega$ ein, so wird dieselbe:

$$\frac{\omega^2}{\beta^2}\left(\frac{\omega}{\beta}-\alpha\right),$$

und $\frac{\omega}{\beta}$ ist also nur dann auch eine Wurzel der Gleichung

$$y^3-\alpha y^2+\beta y-\omega=0,$$

wenn $\frac{\omega}{\beta}-\alpha=0$, also $\alpha\beta=\omega$ ist.

Die obige Gleichung

$$\left(\frac{\omega}{y\sqrt{\beta}}-\sqrt{\beta}\right)^2+(y-\tfrac{1}{2}\alpha-\frac{\omega}{2\beta})^2=(\tfrac{1}{2}\alpha-\frac{\omega}{2\beta})^2$$

kann man auch unter der Form

$$\left(\frac{\omega}{y}-\beta\right)^2+\beta(y-\tfrac{1}{2}\alpha-\frac{\omega}{2\beta})^2=\beta(\tfrac{1}{2}\alpha-\frac{\omega}{2\beta})^2$$

darstellen.

XXVII.

Ueber eine neue Methode, Höhenwinkel mittelst Reflexion zu messen.

Von

Herrn Professor *Karl Kořistka*

am polytechnischen Institute in Prag.

Messungen von Höhenwinkeln oder Zenithdistanzen kamen bisher theils bei astronomischen Bestimmungen, theils bei geodätischen Operationen vor. Man bediente sich hiebei bekanntlich meist der Theodolite, oder grosser Verticalkreise, welche auf starken und schweren Stativen aufgestellt wurden, oder bei astronomischen Beobachtungen auch der Sextanten oder Prismenkreise. Bei geodätischen Operationen wendete man die letzteren aus bekannten Gründen sehr selten, und bei Messungen terrestrischer Höhenwinkel fast gar nicht an.

Die Messungen terrestrischer Höhenwinkel in grösserer Zahl geschahen bisher nur bei grossen Netzlegungen über ein ganzes Land, und, wenn wir einige wenige Arbeiten unter Bessel's und Struve's Leitung in Preussen und im südöstlichen Russland ausnehmen, meist nur zu dem Behufe, um die Knotenpunkte dieses Netzes auf ein gemeinschaftliches Niveau reduciren zu können. Die hiebei erhaltenen relativen und absoluten Höhen der Punkte wurden als solche nur von wenigen Geographen benützt, da zu eigentlichen Höhenmessungen mit besonderer Vorliebe das Barometer angewendet wurde. Allein diese Messungen bezogen sich, sowie auch jene, grösstentheils auf Punkte, welche besonders hoch

über ihre Umgebungen emporragten, also hohe Bergspitzen, und der Nutzen der Hypsometrie beschränkte sich somit darauf, diese höchsten Spitzen eines Landes oder eines Gebirgszuges mit ihrer Höhe über der Meeresfläche anzugeben. Man stritt sich hiebei über kleine Differenzen, welche gar oft innerhalb der Grenzen derjenigen Fehler lagen, welche nach neueren Untersuchungen theils durch die terrestrische Refraction, theils durch die nicht immer horizontale Lage der Luftschichten von gleicher Dichte bei trigonometrischen sowohl, wie auch bei barometrischen Messungen hervorgebracht werden.

Erst in neuerer Zeit begann man einzusehen, dass gute Höhenmessungen eine besondere Wichtigkeit für die Begründung der rationellen Orographie eines Landes erlangen können, indem sie vorzüglich ein brauchbares Materiale zur Beurtheilung der geometrischen Beschaffenheit, oder der Formen des Bodens, von welchen so viele physikalische, industrielle, natur- und cultur-historische Fragen abhängen, geben können, — dass es aber dabei durchaus nicht auf eine ängstliche und sehr scharfe Messung der höchsten Bergspitzen eines Landes, sondern vielmehr darauf ankomme, dass möglichst viele gleich vertheilte Punkte, wenn auch mit etwas geringerer Schärfe gemessen würden, wobei ein besonderes Augenmerk auf die Einsattelungen und Pässe der Gebirge, auf die mittlere Erhebung ausgedehnter Plateau's, auf die relativen Höhenunterschiede einzelner Terrassenbildungen, auf die Niveauunterschiede und allmäligen Steigungen der Thalsolen, und auf andere bisher wenig beachtete Punkte zu richten wäre. In vielen Ländern wurde bereits diess erkannt, und in Frankreich, in der Schweiz, in Baden, Sachsen u. s. w. sind jetzt die Aufnahmen des Katasters und der Mappirung so eingerichtet, dass auch die entsprechenden Höhenwinkel aller wichtigeren Punkte gemessen werden, um so Zahlen für ein richtiges Relief des Bodens zu erhalten.

Bei uns wurde man von zwei Seiten fast zugleich auf die Wichtigkeit möglichst vieler zusammenhängender hypsometrischer Messungen aufmerksam. Einmal waren es die grossartigen Eisenbahnbauten und die Flussregulirungen, welche den Nutzen von derlei Messungen ersichtlich machten, und zweitens war es der Aufschwung der geologischen Arbeiten, welche leztere das Bedürfniss der Kenntniss von absoluten und relativen Höhen sehr vieler Punkte hatten, und auch in der That eine grosse Zahl solcher Messungen veranlassten. Es wurde nun ein Bedürfniss, solche Methoden der Messung aufzufinden, wodurch man möglichst viele Bestimmungen in kurzer Zeit zu machen im Stande wäre.

Professor Stampfer in Wien war der erste, welcher (Sitzungsber. d. math. nat. Cl. der Kaiserl. Akademie. Märzheft 1849) darauf aufmerksam machte, wie mit Hilfe der von ihm construirten Nivellirinstrumente und der ausgezeichneten Karten des k. k. mil. geograph. Institutes diese Aufgabe gelöst werden könne, und ich selbst habe mich, indem ich die allgemeinen Andeutungen derselben bei wirklichen Messungen speciell durchzuführen suchte) dieser Methode seit sechs Jahren mit grossem Vortheile bei meinen Höhenmessungen insbesondere dort, wo eine sehr grosse Genauigkeit nothwendig war, bedient, und hiebei immer die bewundernswürdige Schärfe ihrer Angaben bestättiget gefunden. (Näheres hierüber in meinen Abhandlungen u. Berichten im Jahrb. d. geologischen Reichsanstalt in Wien im II., III., IV., V. und VI. Jahrgange).

So vorzüglich nun diese Methode ist, so ist sie doch zunächst nur für solche bestimmt, welche eigene Bereisungen bloss zum Behufe von Höhenmessungen unternehmen, und sich längere Zeit an einem Beobachtungspunkte aufhalten können. Es gibt aber eine grosse Klasse wissenschaftlicher Reisender, deren Hauptzweck ein anderer ist, die aber dennoch, besonders weil sie gleichförmig ein ganzes Land nach allen Richtungen durchstreifen, ein vorzügliches Material für die Orographie liefern könnten, wenn ihnen die Messung der Höhen, wenn auch mit einer geringeren Genauigkeit, nicht zu sehr erschwert wäre, und sie in ihrem Hauptzwecke hindern oder stören würde. Hieher rechne ich vorzüglich die Offiziere der Geographen-Corps, die reisenden Geologen, einzelne ein Terrain vorläufig recognoscirende Techniker, Marineoffiziere, welche vom Schiffe aus Küstenaufnahmen zu machen haben u. s. w. Zwar könnte diese Art Reisender ein Barometer mit sich führen, allein abgesehen davon, dass bei Messungen mit demselben bei grösserer Entfernung vom correspondirenden Beobachtungspunkte die Ungenauigkeit doch gar zu bedeutend zunimmt, dass ferner nicht alle sichtbaren, sondern nur jene Punkte gemessen werden können, auf welche der Reisende sich selbst begibt, so ist ganz insbesondere bei einer längeren Reise die unausgesetzte und ängstliche Beaufsichtigung des Barometers bei aller noch so guten Construction und Verpackung doch ein sehr lästiger Umstand. Der Mitnahme der angeführten Winkelmessinstrumente steht aber bei Fussreisenden die Nothwendigkeit im Wege, ein schweres Stativ mit sich führen zu müssen, die längere Dauer, um eine feste Auf- und genaue Horizontalstellung zu gewinnen, die trotzdem bei auf hohen Bergen gewöhnlich herrschenden Winden vorkommende Ungenauigkeit in den Winkelmessungen, wenn man nicht die Zeit hat, besseres

Wetter abzuwarten, da eine zwischen der Pointirung des Objectes und der Horizontalstellung der optischen Achse vorkommende noch so geringe Erschütterung des Statives schon Abweichungen hervorbringt.

In Berücksichtigung dieser Umstände habe ich versucht, ein Winkelmess-Instrument zu construiren, welches zu hypsometrischen Messungen für bloss orographische Zwecke, bei denen also eine Genauigkeit von 6 bis 12 Fuss hinreicht, und für die oben angeführte Klasse von Reisenden vollkommen geeignet sein dürfte. Die wichtigsten Vortheile desselben sind seine leichte Transportabilität, seine Compendiosität, die vollkommene Entbehrlichkeit eines schweren dreifüssigen Statives, die äusserst schnelle Aufstellung auf jedem Punkte, eine nur einmalige Einstellung und Notirung der Alhidade, anstatt zweien, wie bisher, endlich die Möglichkeit, auch bei windigem Wetter, ja sogar, bei etwas ruhiger See, vom Schiffe aus, Höhenwinkel mit für obige Zwecke hinreichender Genauigkeit messen zu können.

Das Princip des Instrumentes, welches ich Reflexions-Hypsometer nennen möchte, ist das der Reflexion des Bildes der Luftblase der Libelle in die optische Achse, welches meines Wissens bisher bloss zweimal, und zwar von Dr. Romershausen in Halle bei seinem Spiegelniveau, und von Gravatt in London bei seinen „reflecting levels“, beidemale aber nur zur Herstellung einer horizontalen Visur, und ohne Möglichkeit einer Winkelmessung angewendet wurde. — Sei in Tafel VI. Fig. 1. OP die optische Achse eines Fernrohrs, welche in dieser Lage zugleich vollkommen horizontal ist. Die verlängerte Visur treffe auf den Punkt H, welcher also in einem Horizont liegt mit dem Ocular O des Fernrohres. Sei ferner in D die vom Objectiv erzeugte Bildebene, und in einem gewissen Abstand DG in G ein guter Planspiegel mn unter einem Winkel von 45 Grad gegen die optische Achse fest und so mit dem Fernrohre verbunden, dass dadurch das Gesichtsfeld vertikal in zwei gleiche Theile getheilt wird. Unterhalb der optischen Achse sei aber im Fernrohr noch eine Libelle LL so angebracht, dass der höchste Punkt ihrer Krümmung bei horizontaler Stellung derselben C so gelegen ist, dass $CG=DG$, wodurch offenbar für das Auge am Ocular O ein Spiegelbild des Libellentheiles bei C in der Bildebene bei D erscheint. Durch diesen Punkt ist auch zugleich im freien Theile des Gesichtsfeldes ein feiner Horizontalfaden gespannt. Die Libelle sei um den Punkt C drehbar, und CT sei die Richtung der Tangente für die Krümmung der Libelle im Punkte C. Offenbar wird beim Einspielen der Libelle die Blase in C erscheinen, und in

ihrer vertikalen Projection als Spiegelbild von der Verlängerung des Horizontalfadens in D halbirt werden. — Wäre nun ein Höhenwinkel $H'OH$ zu messen, so pointire man den Punkt H' mit dem Faden, wodurch die optische Achse des Fernrohres in die Lage OP' kommt. Es ist klar, dass an der Winkelbewegung der optischen Achse alle mit dem Fernrohre verbundenen Gegenstände Theil genommen haben, und es wird der Spiegel jetzt etwa die Lage $m'n'$ und die Libelle die Lage $L'C'L'$ annehmen, und wenn wir daher jetzt zum Spielpunkte der letzteren C' die Tangente $C'T'$ ziehen, so hat dieselbe einen eben so grossen Winkel beschrieben, wie die optische Achse. Ziehen wir also durch C' eine zur CT Parallele $C'T''$, so muss $T''C'T' = HGH'$ sein. Dreht man aber wirklich die Libelle so, dass $C'T'$ in die Lage $C'T''$ kommt, so wird offenbar die Blase wieder in C' einspielen, und ihr Bild von dem auf den Punkt H' gerichteten Faden halbirt werden. Die Winkelbewegung der Libelle ist in diesem Falle genau gleich dem Höhenwinkel $H'OH$. — Um diese Winkelbewegung ersichtlich und messbar zu machen, braucht man nur die Libelle mittelst einer Fassung im Inneren des Fernrohres so anzubringen, dass sie um eine Axe beweglich ist, deren Umdrehungspunkt genau mit C oder C' zusammenfällt, und mit dieser an der äusseren Fläche des Rohres eine Alhidade fest in Verbindung zu setzen, so kann man mit Hilfe eines eingetheilten Sectors oder einer Schraube jene Winkelbewegung genau messen. — Es wurde hier stillschweigend vorausgesetzt, dass die Bewegung der Libelle in einer vertikalen Ebene Statt finde.

Auf diesem bisher noch nicht angewendeten Prinzipe der Messung vertikaler Winkel beruht nun die Construction des Instrumentes, dessen wichtigere Theile ich mir erlaube, in Nachfolgendem zu beschreiben:

a) Das Fernrohr. Das Instrument soll compendiös, also muss das Fernrohr kurz sein, zugleich aber soll eine kleine Libelle sich zwischen dem Ocular und der Bildebene befinden; daher habe ich ein achromatisches Objectiv von kurzer Brennweite $p = 6$ Pariser Zolle zu dem ersten von mir angefertigten Instrumente gewählt. Die Oeffnung wurde grösser genommen, als bei so kleinen Fernröhren gewöhnlich ist. Als Ocular wählte ich eine einfache Convexlinse, $p' = 1{\cdot}5$ Par. Zolle, um den Spielraum für die Libelle ganz frei zu haben, obwohl sich auch eine terrestrische Linsencombination für diesen Zweck einrichten liesse. Aus obigen beiden Linsen, welche ein zwar umgekehrtes, aber besonders scharfes, Bild des Objectes liefern, ergibt sich somit

die Vergrösserungszahl $\frac{p}{p'}=4$, welche ich für die Zwecke des Instrumentes, wobei selten grössere Distanzen als 4000 Klafter vorkommen, ausreichend fand.

b) Der Spiegel und der Faden. Die Röhre des Fernrohres endiget gegen das Ocular zu in einen parallelepipedischen hohlen Ansatz *AB* (Taf. VI. Fig. 2. und 3.), in welchem an der oberen Fläche in der Ebene des vom Objective erzeugten Bildes *h* eine schmale Oeffnung *aa'* senkrecht auf die Längsrichtung eingelassen, die untere Fläche *cd* aber in der Längsrichtung ganz weggenommen ist. An der hinteren Wand kann ein Theil derselben *efcd* ebenfalls ganz weggenommen werden, da er nur mittelst vier Schräubchen mit dem Ganzen verbunden ist. Ueberdiess befinden sich in der Mitte des Ansatzes *AB* an seiner vorderen Wand in der Richtung der optischen Achse bei *G*, sowie rechtwinklig darunter in *C*, so dass $GC=Gh$ ist, zwei etwas konisch ausgedrehte Oeffnungen. In die Oeffnung bei *aa'* wird eine dünne Platte eingeschoben und festgeschraubt, in welcher sich eine kreisrunde Oeffnung befindet, vor welcher sich in einer Nut *kk* durch eine Feder angepresst ein dünnes Plättchen mit einer etwas kleineren Oeffnung bewegt. In dieser letzteren ist ein feiner Faden *hh* gespannt. Die Hälfte dieser Oeffnung ist durch einen Plan-Spiegel *mn* verschlossen, dessen Ebene gegen die optische Axe unter einem Winkel von 45 Grad geneigt ist. Dieser Spiegel wird mit Hilfe eines an seiner Metallfassung befindlichen kurzen Zapfens und einer Schraubenmutter *ii* in *G* befestiget, indem beim Anziehen dieser Mutter die Fassung des Spiegels mittelst zweier Ansätze *qq* angedrückt wird. Der Spiegel selbst ist oben gebrochen, so dass die obere Fläche *m'm* senkrecht auf die optische Achse steht. Der Spiegel *mn* reflectirt das Bild der Blase der unter ihm befindlichen Libelle in das Auge, und da $GC=Gh$, so erscheint nothwendig auch dieses Bild in der Bildebene des Fernrohres in *h*.

c) Die Libelle. Diess ist der wichtigste Theil des Instrumentes, und da ich ihr eine bisher noch nicht versuchte Form gegeben habe, so erlaube ich mir in Folgendem, einiges Nähere hierüber mitzutheilen. Der erste Zweck der Libelle ist die Angabe der horizontalen Lage der Tangente zu ihrem Spielpunkte. Meine Libellen sind aus Glasröhren, 1·5 Zolle lang, im Inneren ausgeschliffen, und was den Krümmungsradius betrifft von zweierlei Art; die einen, für die feineren Instrumente, geben, wenn die Blase einspielt, bei 15 bis 20 Secunden einen Ausschlag von 1 Pariser Linie, die anderen, für die kleineren Instrumente, geben diesen Ausschlag erst bei 1 Minute.

Es ist aber klar, dass, wenn das Instrument in freier Hand oder mit einem Stockstativ gebraucht werden soll, man ein Mittel haben müsse, die Limbusebene des Instrumentes in eine vertikale Ebene, oder doch nahe in dieselbe zu bringen, und es wird vor Allem, um sich über die Natur und Grösse des durch Vernachlässigung der vertikalen Stellung entstehenden Fehlers eine richtige Vorstellung zu machen, nothwendig sein, etwas näher auf diesen Gegenstand einzugehen. Nehmen wir an, dass die Ebene des Limbus GAB und die vertikale GAC in Taf. VI. Fig. 4. sich (wie diess in der Natur dieses Instrumentes liegt) stets in der Linie der optischen Achse GA schneiden, und seien GB und GC die Durchschnittslinien dieser Ebenen mit einer durch G gelegten horizontalen, so erhalten wir mit Hilfe von $GA=r=1$ die Bögen $AB=h$, $AC=b$, von denen der eine h den gemessenen Höhenwinkel, der andere b aber die auf die Vertikalebene reducirte wahre Grösse desselben ausdrückt. Man hat somit in dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ABC als bekannt vorauszusetzen den Winkel A und den Bogen h, während die Grösse $h-b$, für welche wir einen Ausdruck suchen, den Fehler x angibt. Suchen wir einen Ausdruck für x, so erhalten wir:

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}(h-b) = \frac{\operatorname{tang} h - \operatorname{tang} b}{1+\operatorname{tang} h \operatorname{tang} b}.$$

Das Dreieck ABC gibt unmittelbar

$$\operatorname{tang} b = \cos A \operatorname{tang} h.$$

Diesen Werth substituirt, gibt:

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{tang} h(1-\cos A)}{1+\cos A \operatorname{tang}^2 h} = \frac{2 \operatorname{tang} h \sin^2 \tfrac{1}{2} A}{1+\cos A \operatorname{tang}^2 h} \dots \quad 1).$$

Diese Formel kann für die logarithmische Berechnung eingerichtet werden, indem man

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} h \sqrt{\cos A}$$

setzt. Man erhält dann

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1+\cos A \operatorname{tang}^2 h},$$

somit durch Substitution

$$\operatorname{tang} x = 2 \operatorname{tang} h \sin^2 \tfrac{1}{2} A \cos^2 \varphi. \quad 2)$$

In folgender Tabelle habe ich einige nach dieser Formel berechnete Werthe zusammengestellt, und zwar für $A=1^0$, 2^0 und

3° und für $h=5°$, 10°, 15°, 20°, 25° und 30°; die berechneten Werthe von x sind in Minuten und Secunden angegeben:

	$h=5°$	$h=10°$	$h=15°$	$h=20°$	$h=25°$	$h=30°$
$A=1°$	0′ 2″·7	0′ 5″·3	0′ 7″·9	0′ 10″·1	0′ 12″·2	0′ 13″·7
$A=2°$	0′ 10″·9	0′ 21″·5	0′ 31″·6	0′ 40″·5	0′ 48″·4	0′ 54″·7
$A=3°$	0′ 24″·5	0′ 48″·3	1′ 10″·9	0′ 30″·9	1′ 48″·6	2′ 2″·7

Man sieht hieraus, dass für $A=1°$ der Fehler bei den gewöhnlich vorkommenden Höhenwinkeln von 0 bis 10 Graden 5 Secunden nicht übersteigen wird, während derselbe bei einer Neigung von $A=2°$ schon 20 Secunden und darüber betragen kann. — Bei dieser Gelegenheit ist es vielleicht noch interessant, die Maximalwerthe von x kennen zu lernen. Suchen wir nemlich durch Differenziation des Ausdruckes 1) den Werth von

$$\frac{d\,\mathrm{tang}\,x}{dh}=0,$$

so gibt diess für x ein Maximum, wenn

$$\mathrm{tang}\,h=\frac{1}{\sqrt{\cos A}} \qquad 3)$$

ist, wo dann der Ausdruck 1) übergeht in den Ausdruck

$$\mathrm{tang}\,x=\frac{\sin^2 \frac{1}{2}A}{\sqrt{\cos A}}. \qquad 4)$$

Folgende Tabelle enthält die Werthe von h und x für $A=1°$, 2° und 3° nach Gl. 3) und 4) berechnet:

	$A=1°$	$A=2°$	$A=3°$
$h=$	44° 59′ 52″·2	44° 59′ 28″·5	44° 58′ 49″·1
$x=$	0° 0′ 15″·7	0° 1′ 3″·1	0° 2′ 21″·3

Aus der ersten Tabelle ist ersichtlich, dass die Neigung der Limbus-Ebene gegen die vertikale bei den feineren und grösseren Instrumenten einen, und bei den kleineren Instrumenten zwei Grade nicht wird überschreiten dürfen. Die Sicherheit der Stellung der Limbusebene innerhalb dieser Grenze habe ich dadurch erreicht, dass ich zu den Libellen flache oder ovale Glasröhren,

deren Querschnitt durch ll' (Taf. VI. Fig. 3.) angedeutet ist, benützte. Die runden Glasröhren werden in noch weichem Zustande durch einen Ring, dessen Form die eben bezeichnete ist, gezogen, bis sie erkalten. Diese Glasröhren werden im Inneren an der oberen Fläche sehr flach ausgeschliffen, so dass die Krümmung senkrecht auf die Achse der Libelle oder im Querschnitt einem Radius von 2·5 Zollen entspricht, wodurch bei einer Neigung von 1 Grad schon eine Bewegung der Blase um mehr als eine halbe Linie nach rechts oder links bewirkt wird. Die Glasröhre erhält auf ihrer Oberfläche zwei Linien eingeschnitten, welche beide durch den Punkt C gehen, und zwar die eine in der Richtung der Längsachse der Libelle, die andere senkrecht darauf. Es ist klar, dass im Spiegel mn (Taf. VI. Fig. 3.) ein reflectirtes Bild dieser beiden Striche $v'v'$ und $h'h'$ erscheint, und dass somit der Beobachter den Limbus des Instrumentes so zu halten hat, dass das Bild der Blase immer von beiden Strichen halbirt wird. Die Glasröhre der Libelle selbst wird (Taf. VI. Fig. 5. und Fig. 6.) in einer Fassung von Messing festgehalten, welche aus einer etwa 0·3 Linien dicken gut gehämmerten Messingplatte so geschnitten wird, wie Taf. VI. Fig. 6. zeigt; die vier Arme $l''l''l''l''$ werden über einem eisernen Dorne von der Form der Glasröhre zusammengebogen, und mit kleinen Schräubchen an ihren Enden $l''l''$.... so zusammengezogen, dass die Libellenröhre fest und unverrückbar eingefasst ist. Die Fassung hat einen Ansatz, an welchen die Umdrehungsaxe der Libelle in Gestalt eines genau abgedrehten etwas konischen Zapfens von Stahl eingesetzt und angelöthet ist. Um die Libellenröhre und die Blase noch besser zu beleuchten, so wie zum Schutze derselben beim Transporte, ist die untere Fläche des Instrumentes durch eine an der inneren Fläche mit weissem Papiere überzogene Messingplatte cd (Taf. VI. Fig. 2.) verschliessbar, welche sich in einem Scharniere bewegt, und während der Beobachtung unter einem Winkel von 45° aufgeklappt wird. Die Blase erscheint dann im Spiegel sehr scharf gezeichnet.

d) Die Alhidade und der Limbus. Die Libelle in ihrer Fassung wird, nachdem die Platte $efdc$ abgeschraubt wurde, mittelst des Zapfens C an der Seitenwand BB (Taf. VI. Fig. 3.) befestiget, indem an der Aussenseite eine Alhidade CE (Taf. VI. Fig. 7.) angeschoben, und das Ende des Zapfens durch eine Mutter angezogen wird. — Es hat sich nun darum gehandelt, wie eine richtige und genaue Winkelablesung herzustellen wäre, ohne doch die Compendiosität des Ganzen aufzugeben. Die Winkel sollen bei den grösseren Instrumenten wenigstens bis auf ⅓ Minute oder 20 Secunden mit vollkommener Sicherheit, bei denen zweiter Art

aber bis auf 1 Minute angegeben werden. Wenn es nun auch gegenwärtig ein Leichtes ist, eine solche Theilung am Limbus herzustellen, so spielt doch der Fehler wegen der Excentricität der Alhidade hiebei eine so unangenehme Rolle, dass man nur dann ganz beruhiget sein kann, wenn man die letztere als Durchmesser nimmt, und doppelte Nonien anbringt, wodurch aber nothwendig der Limbus doppelt so gross wird; oder aber, indem man die Winkelbewegung durch die geradlinige einer feinen Schraube misst, wobei die Excentricität ebenfalls unschädlich ist, weil sie bereits in der Winkelgleichung enthalten ist. Bei dem von mir construirten Instrument habe ich für die Messung der Winkel anfangs die letztere Methode gewählt, überzeugte mich jedoch, dass bei etwas grösseren Winkeln mit dem Aufwärts- und Abwärts-Schrauben ein grosser Zeitverlust verbunden sei. Ich habe daher den Bogen *MM*, welcher etwa 40 Grade umfasst, auf einer guten Theilmaschine in ganze, halbe und viertel Grade theilen lassen. Die Alhidade *CE* ist an ihrem Ende mit einem Mikrometerwerk versehen, dessen Klemmung in *K* sichtbar ist. Die Mikrometerschraube selbst hat etwa $\frac{3}{4}$ Linien im Durchmesser, ist sehr gleichförmig und fein geschnitten, so dass etwa 50 Windungen auf einen Zoll gehen, und ist an ihrem Ende mit einer Scheibe als Kopf *N* versehen, welche am Rande in 10 gleiche Theile getheilt ist, so dass man mittelst eines Zeigers z auch noch $\frac{1}{100}$ einer Schraubenwindung ablesen kann. Die Alhidade ist an dem an die Theilung grenzenden Ende schief abgeschnitten, und auf der so gebildeten schiefen Ebene ist eine feine Linie α gezogen, welche als Marke beim Ablesen dient. Zur schärferen Bestimmung der Coincidenz der Theilstriche dient eine einfache Lupe, welche bei *E*, drehbar, befestiget ist. Zur Vermeidung eines todten Ganges der Schraube dient eine starke Feder *r*. Es ist klar, dass man auf diese Weise jeden Winkel sehr genau messen kann, wenn man nur den Werth einer Schraubenwindung im Winkelmaass ausgemittelt hat, zu welcher Ausmittelung verschiedene Stellen des getheilten Bogens *MM* selbst benützt werden. Die Excentricität wird am einfachsten dadurch unschädlich gemacht, dass man mehrere bekannte Höhen- und Tiefenwinkel, welche man leicht mittelst Maasstäben und bekannten Distanzen herstellen kann, misst, sich die Abweichung von der Wahrheit notirt, und sich dann eine Tabelle entwirft für den Bogen des Instrumentes, welche die jedem gemessenen Winkel entsprechende Correction enthält. Uebrigens ist zu bemerken, dass diese Correction für kleine Winkel in den meisten Fällen wird vernachlässiget werden können, vorausgesetzt, dass keine grössere Genauigkeit der Messung als bis auf 20—30 Secunden gefordert wird. Der oberste

Theilstrich am Bogen *MM* erhält die Ziffer 0 Grad, und die Numerirung geht continuirlich nach abwärts bis 40 Grad.

e) Die Boussole. In unbekannten Gegenden und ohne Führer, oft selbst mit diesem, ist man manchmal beim Gebrauche der topographischen Karten über die Benennungen neben einander liegender Orte im Zweifel, und in solchen Fällen ist das am Standpunkte abgelesene und auf die Karte aufgetragene magnetische Azimuth jener Orte von entscheidender Wichtigkeit. Für Geologen, Montanisten, Ingenieure u. s. w. ist es oft interessant und wissenswerth, das Streichen einer geologischen Formation oder der Lagerstätte eines nutzbaren Fossiles zu kennen. Aus diesen Gründen habe ich das hier beschriebene Instrument mit einer Boussole versehen. Dieselbe besteht *AZZ'B* (Taf. VI. Fig. 2.) aus einem hohlen Cylinder von 2 Zollen Durchmesser und ¼ Zoll Höhe. Die Magnetnadel *tt'* ist auf eine getheilte und gefirnisste starke Papierscheibe geleimt, und wird so auf die Spitze gelegt, dass die Theilung nach unten gekehrt ist. Um diese Theilung zu benützen, ist in der Bodenplatte eine Oeffnung *p'*, und in der Seitenwand eine zweite *p* angebracht. Die letztere ist durch eine kleine um ein Scharnier bewegliche Platte verschliessbar, ebenso die erste, nur befindet sich auf dieser ein kleiner Planspiegel *g* von etwa 2 Linien Breite eingekittet. Dieser Oeffnung *p'* entspricht eine etwas grössere in dem Ansatze *AB*. Die Boussole wird mittelst zweier Schräubchen an den Ansatz *AB* befestigt, früher jedoch durch allmäliges Aufmachen der Spiegelplatte *g* jene Stellung derselben gefunden, bei welcher die von der unteren Fläche der eingetheilten Scheibe auf jene fallenden Strahlen auf den Spiegel *mm'* und von diesem in das am Oculare befindliche Auge reflectirt werden. Beim Messen wird auch die Platte *p* geöffnet, um jenen Theil der Theilung, der dem Auge sichtbar ist, zu beleuchten. Es ist klar, dass auf diese Weise, ohne die mindeste Beirrung der Messung des Höhenwinkels, bei Pointirung des Objects gleichzeitig jener Theilstrich der Boussole abgelesen werden kann, welcher sich mit dem Objecte in einer vertikalen Geraden befindet.

f) Das Stativ. Ein Stativ ist bei einer einzelnen Winkelmessung und bei gehöriger Einübung des Beobachters eigentlich nicht nothwendig; daher an dem Instrumente an der unteren Fläche ein Knie mit einem hohlen Cylinder angebracht ist, in welches ein hölzerner Griff eingesetzt wird, um das Instrument in der linken Hand zu halten, während die rechte mit dem Einstellen der Libelle durch die Alhidade beschäftigt ist. Bei einiger Uebung bringt man es bald dahin, die Libelle sehr scharf auf den das

Object pointirenden Faden zu bringen; denn erstens sind die Libellen, wie oben bemerkt, weit weniger empfindlich, als die grosser Nivellirinstrumente, zweitens braucht man das Einspielen nur wenige Momente festzuhalten; drittens erhält das Fernrohr eine feste Richtung durch das pointirte Object, und viertens endlich ist es auch nicht nöthig, während der ganzen Schraubenbewegung das Instrument vor dem Auge zu halten, sondern man sehe nur von Zeit zu Zeit auf das Object, und achte darauf, ob die Blase schon im Spiegel erscheint.

Demungeachtet würde es, wenn man von einem Standpunkte aus mehrere Visuren macht, für die Hand zu ermüdend sein, das Instrument zu halten, und dadurch eine Unsicherheit in die Beobachtungen kommen, daher ich jedenfalls die Anwendung eines leichten Stockstatives empfehlen würde, wie ich dasselbe gewöhnlich benütze, welches (Taf. VI. Fig. 8.) aus einem etwa 1 Zoll im Durchmesser haltenden und 2 Fuss 8 Zoll langen Stocke aus hartem Holze besteht, der im Inneren durchbohrt und unten anstatt eines Beschlages mit einem kurzen Erdbohrer versehen ist. In die innere Höhlung von etwa 2 Linien Durchmesser passt ein etwas dünnerer runder Stab von Eisen, welcher herausgezogen und in jeder beliebigen Höhe mittelst einer Schraube festgestellt werden kann. Das obere Ende passt genau in jenen hohlen Cylinder des Kniees. Beim Nichtgebrauche wird der Eisenstab ganz eingeschoben, ein Knopf von Horn oben am Stock aufgeschraubt, und derselbe kann auf Fussreisen recht gut als Reisestock gelten und besonders bei Bergbesteigungen mit Nutzen gebraucht werden.

Noch erübriget mir, Einiges über die Rectification des Instrumentes zu bemerken, denn die Winkel, wenn sie auch nicht mit jener seltenen Schärfe, wie von den Stampferschen Nivellirinstrumenten, nemlich bis auf eine Secunde gemessen werden, müssen doch bis zu der oben bemerkten Grenze vollkommen sicher sein, was nur durch eine sorgfältige Prüfung des Instrumentes erreicht wird. Ich erlaube mir hier nur die diesem Instrumente eigenthümlichen Momente dieser Rectification zu erwähnen und übergebe die anderen als selbstverständlich. Jene sind:

a) Die richtige Stellung des Spiegels und des Fadens. Es ist zwar eine sehr scharfe Stellung der Ebene des Spiegels *mn.* gegen die optische Achse unter 45 Grad nicht nothwendig, wie aus der Theorie ersichtlich; aber es ist andererseits doch eine Abweichung, die etwa 1 Grad oder mehr betragen würde, nicht zu wünschen, da diess die Centrirung des Spielpunktes der Libelle erschweren würde. Man stelle sich daher auf

ziemlich ebenem Boden mit dem Instrumente in freier Hand auf, nehme sowohl die Boussole, als auch die Wand $efcd$ weg, ziehe die Libelle heraus und gebe dem Limbus eine horizontale Lage. Nun stelle man eine Stange in der Richtung der durch den jetzt vertikalen Faden bestimmten optischen Achse vertikal auf und lasse eine zweite seitwärts so stellen, dass ihr Bild vom Spiegel in die Richtung der ersten Stange genau reflektirt wird, so müssen beide Richtungen im Standpunkte einen rechten Winkel bilden. Auf dieselbe Art construirt man auf der anderen Seite ebenfalls einen rechten Winkel, so ist es jetzt nach bekannten Gesetzen der Geometrie sehr leicht, die Richtigkeit dieser Winkel zu prüfen. Eine Correction des Spiegels geschieht mit Hilfe der Mutter ii. Selbstverständlich muss vorher der Faden mit Hilfe des Objectives, welches sich etwas herausschrauben lässt, in die Bildebene gebracht sein.

b) Die Centrirung des Spielpunktes der Libelle. Nun setze man die Libelle ein, verbinde sie mit der Alhidade, gebe dem Limbus eine nahe vertikale Lage, und sehe, ob das im Spiegel reflectirte Bild des im Spielpunkte der Libelle senkrecht auf ihre Längsrichtung gezogenen Striches $h'h'$ mit dem Horizontalfaden hh' coincidirt. Die Berichtigung geschieht, indem man die Schräubchen $l''l''$ etwas lüftet und die Libelle ein wenig in der Fassung vorwärts oder rückwärts schiebt. — Sodann hebe und senke man die Alhidade allmälig bis an ihre oberste und unterste Gränze. Bildet dabei jener Strich mit dem Faden fortwährend eine gerade Linie, so geht die Umdrehungsaxe der Libelle zugleich durch den Spielpunkt, wo nicht, so helfe man dadurch, dass man in die Fassung oben oder unten Papierstreifen einlegt, wodurch dieser Punkt entsprechend gehoben oder gesenkt wird.

c) Die vertikale Stellung des Limbus. Eine der beiden vorhin in a) gebrauchten Stangen wird mit Hilfe eines Senkels vollkommen vertikal gestellt. Das Stockstativ wird in den Boden gebohrt, und zwar ebenfalls so viel als möglich vertikal mit Hilfe des Senkels, und das Instrument auf den herausgezogenen eisernen Stab gesetzt. Nun bewege man das Instrument langsam so auf- und abwärts, dass die vertikale Kante des Spiegels fortwährend die Stange tangirt, wobei man sieht, ob die Blase im Spiegel beim Vorüberziehen von dem reflectirten Strich $v'v'$ halbirt wird. Wo nicht, so hilft man durch eine kleine Drehung der Röhre in ihrer Fassung. — Nachdem a), b), c) richtig befunden, wird die Platte $efcd$ fest aufgeschraubt.

d) Die Bestimmung der horizontalen Lage der Visur. Es muss nun jene Stellung der Alhidade, bei welcher die

Visur genau horizontal ist, scharf bestimmt werden, wozu es mehrere Wege gibt. Der einfachste, schnellste und genaueste ist, wenn man auf ziemlich ebenem Boden sich mit einem guten Nivellirinstrumente aufstellt, die Libelle desselben zum Einspielen bringt und in einer Entfernung von etwa 20 Klaftern die Mitte der Zieltafel an einer Nivellirlatte zur Coincidenz bringt mit dem Horizontalfaden des Nivellirinstrumentes. Sodann bohrt man das Stockstativ neben dem Nivellirinstrument fest in den Boden, setzt das Instrument auf den eisernen Stab, welchen man so weit herauszieht, dass die Mitte des Oculares genau in derselben Höhe ist, wie jene des nebenstehenden Nivellirinstrumentes, pointirt mit dem Horizontalfaden des Instrumentes die Mitte der Zieltafel und hebt oder senkt die Alhidade so lange, zuerst mit der Hand, sodann mit der Schraube, bis die Blase im Spiegel von $h'h'$ halbirt wird. Nun wird der Winkel genau und mit Hilfe der Schraube N abgelesen und notirt. Diese Operation mehremale wiederholt, gibt die Stellung der Alhidade (im Mittel) bei horizontaler Visur. — Auf der Reise kann man sich nach einer allenfalls vorgekommenen gewaltsamen Erschütterung des Instrumentes von der unverrückten Stellung der Libelle überzeugen, wenn man sich am Rande einer grösseren ruhigen Wasserfläche aufstellt und am gegenüberliegenden Ufer einen Stab oder Stange halten lässt, auf welche man sich in derselben Höhe über dem Niveau des Wassers eine Marke gemacht hat, als in welcher sich die Mitte des Oculares über demselben befindet. — Zur See am Schiffe wird die horizontale Visur hergestellt durch die Begrenzung des Meeres am Horizont, indem man die Kimmtiefe oder den Unterschied zwischen dem scheinbaren und wahren Horizont berücksichtiget. — Oder endlich, und zwar sehr genau, indem man jene Methode benützt, welche gewöhnlich bei der Rectification von Nivellirinstrumenten, deren Fernrohr nicht umlegbar ist, angewendet wird, wie dieselbe in den meisten Lehrbüchern, besonders klar und deutlich aber in Stampfer's Anleitung zum Nivelliren zu finden, und wobei bekanntlich weder eine Wasserfläche, noch ein anderes Nivellirinstrument nothwendig ist. Bei dem eben beschriebenen Instrument ist diese Rectification jedoch mit folgender Modification vorzunehmen: Man wähle einen möglichst nahe horizontalen Boden, befestige die Zieltafel auf der Latte in gleicher Höhe mit dem Oculare vom Boden und bringe dann beim Pointiren auf die Mitte der Zieltafel die Libelle genau zum Einspielen, wobei der Stand der Mikrometerschraube notirt wird. Beim Verwechseln der Stellungen muss nun dieser Stand der Libelle provisorisch als parallel mit der optischen Achse bei horizontaler Lage derselben angenommen und die Zieltafel auf ihrem zweiten Standpunkte so

gestellt werden, dass ihre Mitte vom Horizontalfaden getroffen wird. Der Fehler x wird dann aus der bekannten Formel

$$x = \frac{l + l'}{2} - \frac{J + J'}{2} - f$$

gefunden, wo l, l' die Lattenhöhen, J, J' die Instrumentenhöhen und f den Unterschied zwischen dem wahren und scheinbaren Horizont bedeuten. Da jedoch hier $J = l$ gemacht wurde und mit Hilfe des Stockstatives auch sehr leicht und genau $J = J'$ gemacht werden kann, so übergeht obiger Ausdruck in folgenden einfacheren:

$$x = \frac{J + l'}{2} - J - f = \frac{l' - J}{2} - f.$$

Auf diese Art dürfte ein Instrument hergestellt sein, welches dem Bedürfnisse der reisenden Geographen, Civil- und Militär-Ingenieure, der Geologen, der Marineoffiziere u. s. w. genügen würde, ohne sie durch schweren Transport, langwierige Aufstellung, Abhängigkeit vom Wetter, namentlich von starken Winden auf hohen Bergen in ihren speciellen Zwecken zu hindern. Das Instrument kann in einer Rocktasche getragen werden. Ich habe erst ein solches Instrument der grösseren Art ausführen lassen und mich desselben bei einigen im eben verflossenen Herbste ausgeführten Messungen in den Sudeten und in den Karpathen bedient. Dass dasselbe auch bei vorläufigen Recognoscirungen von nicht zu grosser Schärfe als Nivellirinstrument, sowie als Distanzmesser gebraucht werden kann, wenn man noch eine Nivellirlatte hinzufügt oder auch nur eine gerade Stange mit zwei sichtbaren Marken auf derselben in bekannter Entfernung von einander, ist kaum nothwendig, zu erwähnen.

Noch erübriget mir, über die Genauigkeit der Höhenangaben mit diesem Instrumente Etwas zu sagen. Man hat Anfangs geglaubt, die Angabe des Höhenwinkels so scharf als möglich machen zu müssen, um desto grössere Distanzen wählen und mehr Objecte von einem Standpunkte übersehen und messen zu können. Meine Erfahrungen haben mich aber überzeugt, dass man in unbekannter Gegend, und eine solche muss doch in der Regel vorausgesetzt werden, selbst mit Hilfe unserer vortrefflichen Generalstabskarten, bei Objecten, welche weiter als 1 bis 1½ österreichische Meile in gerader Linie vom Standpunkte entfernt sind, sehr häufig über ihre Lage und Namen auf der Karte in Zweifel geräth, wenn es nicht besonders auffallende und speciell bezeichnete Punkte, z. B. charakteristische, weit sichtbare Berg-

kuppen u. s. w. sind. Und in der That! kann man nicht zufrieden sein, wenn man von einem einzigen Standpunkte eine Fläche von 3 bis 4 Quadratmeilen bequem und sicher in den meisten ihrer Höhenverhältnisse bestimmen kann? Daher habe ich in späterer Zeit nur selten und ausnahmsweise bei Anvisirung von Objecten jene Distanzen überschritten. Und aus demselben Grunde habe ich es für genügend gehalten, dass man mit den grösseren Instrumenten die Höhenwinkel bis auf 20 Secunden, mit den kleineren, für noch kürzere Distanzen und vorzüglich für Mappirungsoffiziere bestimmten, nur bis auf eine Minute, jedoch mit vollkommener Sicherheit ablesen kann. Diese beiden äussersten Fehlergrenzen geben uns auch die daraus entspringenden Fehler in den gemessenen Höhen, welche, da sie eine Function des Winkels und der Distanz sind, auch von beiden abhängen. In nachstehender Tabelle habe ich diese grössten möglichen Fehler in den Höhenbestimmungen zusammengestellt, und zwar für Distanzen von 200 bis 6000 Wiener Klafter und für einen Winkel von 20 Secunden und von 1 Minute. Die Fehler sind ebenfalls in Klaftern und Decimaltheilen derselben angegeben.

	Distanz	W. K. 200	500	1000	2000	3000	4000	5000	6000
Fehler:	für die grösseren Instrum.	W. K. 0.019	0·048	0 097	0·194	0·291	0·388	0·485	0.582
	für die kleineren Instrum.	W. K. 0.058	0·145	0·291	0·582	0·873	1·164	1·455	1·746

XXVIII.

De serie infinita $\sigma_n = \overset{p=\infty}{\underset{p=1}{S}} p^n x^p$.

Auctore

Dr. *Christiano Fr. Lindman,*

Lect. Strengnesensi.

Tantum abest, ut haec series nova sit, ut summa ejus jampridem ab Eytelwein *) sit inventa, neque certo scio, an quisquam alius summam illam ante eum dederit. Utcumque haec res fuerit, tamen Eytelwein convergentiam prorsus praeteriit. Quum vero seriei illius convergentia exiguis finibus contineatur, summam ejus aliter atque Eytelwein neque convergentia omissa reperire conabor, si prius demonstravero insequens

Lemma. Quum series

$$\sigma_r = \overset{p=\infty}{\underset{p=1}{S}} p^r x^p \quad (r = \text{num. integro vel nihilo})$$

convergens ponitur, invenire, quo pacto series

$$\frac{d\sigma_r}{dx} = \overset{p=\infty}{\underset{p=1}{S}} p^{r+1} x^{p-1}$$

sit convergens.

Quia omnes termini seriei $\frac{d\sigma_r}{dx}$ habent dignitates ipsius x ejusque exponentes eo fiunt majores, quo magis terminus, de quo agitur, a principio seriei distat, de hac serie valet theorema, quod Ill^us Cauchy dedit **). Quotus $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tunc est

---

*) Grundlehren der höheren Analysis. Berlin 1824. Tom. II. pag. 631.

**) Cours d'Analyse. Paris 1821. pag. 152.

$=\frac{(p+1)^{r+1}}{p^{r+1}}=(1+\frac{1}{p})^{r+1}$ et unitatem aequat, si est $p=\infty$. Series igitur $\frac{d\sigma_r}{dx}$ certo est convergens, posita $1>x>-1$, si modo series σ_r id non impedit. Posito $r=0$, evadit

$$\sigma_0 = x + x^2 + x^3 + \text{etc.},$$

quae series est progressio geometrica. Series vero σ_0, ut constat, non est convergens, nisi valor numericus ipsius x est unitate minor: itaque convergit series $\frac{d\sigma_0}{dx}$, si est $1>x>-1$. Facile intelligitur, seriem $\sigma_1 = x\frac{d\sigma_0}{dx}$ esse atque ideo eadem lege convergentem, id quod eodem modo in seriem σ_r licet extendere *).

Jam seriem propositam

$$\sigma_n = \overset{p=\infty}{\underset{p=1}{S}} p^n x^p \quad (n = \text{num. int. vel nihilo, } 1>x>-1)$$

adgrediamur. Primum liquet, seriem

$$\sigma_0 = \overset{p=\infty}{\underset{p=1}{S}} x^p = \frac{x}{1-x}$$

esse. Differentiatione reperitur

$$\frac{d\sigma_0}{dx} = \overset{p=\infty}{\underset{p=1}{S}} p x^{p-1},$$

atque ideo

$$x\frac{d\sigma_0}{dx} = \overset{p=\infty}{\underset{p=1}{S}} p x^p = \sigma_1 = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Si denuo differentiamus posteaque per x multiplicamus, gradatim invenimus

$$\sigma_2 = x\frac{d\sigma_1}{dx} = \overset{p=\infty}{\underset{p=1}{S}} p^2 x^p = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1.2x^2}{(1-x)^3},$$

$$\sigma_3 = x\frac{d\sigma_2}{dx} = \overset{p=\infty}{\underset{p=1}{S}} p^3 x^p = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{6x^2}{(1-x)^3} + \frac{1.2.3x^3}{(1-x)^4},$$

$$\sigma_4 = x\frac{d\sigma_3}{dx} = \overset{p=\infty}{\underset{p=1}{S}} p^4 x^p = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{14x^2}{(1-x)^3} + \frac{36x^3}{(1-x)^4} + \frac{1.2.3.4x^4}{(1-x)^5}.$$

*) Cfr. Cauchy l. c. pag. 155.

Patet, summas σ_5, σ_6 cett. eadem ratione reperiri posse.

Si fractiones ad eundem denominatorem reducuntur, prodeunt:

$$\sigma_2 = \frac{x + x^2}{(1-x)^3},$$

$$\sigma_3 = \frac{x + 4x^2 + x^3}{(1-x)^4},$$

$$\sigma_4 = \frac{x + 11x^2 + 11x^3 + x^4}{(1-x)^5}, \text{ cett.,}$$

quos valores Eytelwein (l. c.) invenit. Coëfficientes eae sunt, quas l. c. pag. 629. attulit*).

Jam si revertimur ad priores summarum valores, per inductionem colligitur, esse

$$\sigma_n \left(= x\frac{d\sigma_{n-1}}{dx}\right) = \overset{k=n}{\underset{k=1}{S}} \frac{A_k^{(n)} x^k}{(1-x)^{k+1}}, \tag{1}$$

ubi forma coëfficientis $A_k^{(n)}$ definienda est. De hac coëfficiente tantum novimus, esse $A_1^{(n)} = 1$, $A_n^{(n)} = \Gamma(n+1)$. Substituto in (1) $n+1$ pro n, invenitur

$$\sigma_{n+1} = \overset{k=n+1}{\underset{k=1}{S}} \frac{A_k^{(n+1)} x^k}{(1-x)^{k+1}}. \tag{2}$$

Quia semper est $\sigma_r = x\dfrac{d\sigma_{r-1}}{dx}$ (r = num. int.), differentiatio formulae (1) summam σ_{n+1} suppeditare debet. Differentiatione et multiplicatione per x facta, eruitur

$$\sigma_{n+1} = \overset{k=n}{\underset{k=1}{S}} \frac{kA_k^{(n)} x^k}{(1-x)^{k+1}} + \overset{k=n}{\underset{k=1}{S}} \frac{(k+1)A_k^{(n)} x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}}. \tag{3}$$

Itaque oportet, ut valores inventi (2) et (3) inter se congruant et relatio coëfficientium $A_k^{(n)}$, quum diversi valores numeris integris n et k dantur, comparatione coëfficientium ejusdem dignitatis ipsius x reperiatur. Terminis separatim scriptis invenitur:

*) Cfr. Malmsten et Björling in Actis Societ. Scient. Upsal. Vol. XII. Vide quoque Tom. VI. pag. 41. hujus Archivi, ubi dissertatio Cel. Malmsten legitur.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A_1^{(n+1)}x}{(1-x)^2} \\ + \frac{A_2^{(n+1)}x^2}{(1-x)^3} \\ + \frac{A_3^{(n+1)}x^3}{(1-x)^4} \\ + \dots \\ + \frac{A_n^{(n+1)}x^n}{(1-x)^{n+1}} \\ + \frac{A_{n+1}^{(n+1)}x^{n+1}}{(1-x)^{n+2}} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \frac{A_1^{(n)}x}{(1-x)^2} \\ + \frac{2A_2^{(n)}x^2}{(1-x)^3} + \frac{2A_1^{(n)}x^2}{(1-x)^3} \\ + \frac{3A_3^{(n)}x^3}{(1-x)^4} + \frac{3A_2^{(n)}x^3}{(1-x)^4} \\ + \dots\dots\dots \\ + \frac{nA_n^{(n)}x^n}{(1-x)^{n+1}} + \frac{nA_{n-1}^{(n)}x^n}{(1-x)^{n+1}} \\ \qquad\qquad + \frac{(n+1)A_n^{(n)}x^{n+1}}{(1-x)^{n+2}}. \end{array}\right.$$

Inde redundant relationes

$$A_2^{(n+1)} = 2A_2^{(n)} + 2A_1^{(n)},$$
$$A_3^{(n+1)} = 3A_3^{(n)} + 3A_2^{(n)},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

et relatio universalis

$$A_k^{(n+1)} = kA_k^{(n)} + kA_{k-1}^{(n)}, \qquad (4)$$

quae quoque formula terminum primum et ultimum complectitur, quoniam est $A_m^{(n)} = 0$, quum est $m = 0$ vel $m > n$.

Beneficio formulae (4) coëfficientem $A_k^{(n+1)}$, cognitis $A_k^{(n)}$ et $A_{k-1}^{(n)}$, invenire licet; restat, ut videamus, num formula reperiri possit, quae sola et per se coëfficientem quamcunque suppeditet. Quia omnes coëfficientes sunt numeri integri et numerus k factor dextri membri formulae (4), necesse est, sit quoque k factor sinistri membri. Posito igitur

$$A_k^{(n+1)} = kB_k^{(n+1)},$$

evadit

$$A_k^{(n)} = kB_k^{(n)}, \quad A_{k-1}^{(n)} = (k-1)B_{k-1}^{(n)}.$$

Quibus in (4) substitutis et divisione per k facta, prodit

$$B_k^{(n+1)} = kB_k^{(n)} + (k-1)B_{k-1}^{(n)}. \qquad (5)$$

Quum formulam (5) comparamus cum formula (ε) *), quam dedit

*) Cfr. Grunert, Archiv d. Math. u. Physik Tom. III. p. 46. form. (5).

Cel^us^ Malmsten pag. XXVIII. operis sui „Theoremata nova cett." inscripti (Upsaliae 1842), et recordamur, numerum $n = r + 1$ (l. c.) esse, facile colligitur

$$B_k^{(n)} = k^{n-1} - (k-1)_1 (k-1)^{n-1} + (k-1)_2 (k-2)^{n-1} \\ - (k-1)_3 (k-3)^{n-1} + \text{etc.},$$

$$A_k^{(n)} = k \{ k^{n-1} - (k-1)_1 (k-1)^{n-1} + (k-1)_2 (k-2)^{n-1} \\ - (k-1)_3 (k-3)^{n-1} + \text{etc.} \}. \qquad (6)$$

Coëfficientes $A_k^{(n)}$ eaedem sunt, quas attulit Eytelwein (l. c. pag. 607), ita tamen, ut sit

$$^kD_{n-k} = A_k^n.$$

Inter coëfficientes igitur utriusque generis similis intercedit relatio atque inter numeros figuratos et coëfficientes binomiales.

XXIX.

Problema.

Datis tribus punctis, in eodem plano tale punctum invenire, ut summa distantiarum ejus a datis sit minimum.

Auctore

D^re^. *Christiano Fr. Lindman,*

Lect. Strengnaesensi.

Thomas Simpson in libro „the doctrine and application of Fluxions" (Lond. 1750) inscripto hoc problema proposuit. Cel^us^ Schlömilch idem, sed generalius acceptum in Calculo differentiali suo (pag. 158.) pro exemplo protulit; neuter vero quaestionem

exhausit. Uterque nulla alia puncta spectasse videtur, nisi ea, quae inter se conjuncta fiunt vertices trianguli, cujus omnes anguli sint $< \frac{2\pi}{3}$.

Tria puncta in eodem semper sunt plano. Aut in eadem recta sita sunt, aut conficitur triangulum a rectis, quae puncta data conjungunt. Si illud evenit, facillime perspicitur, ipsum punctum medium esse id, quod erat inveniendum. Si datis punctis conjungendis oritur triangulum, fieri potest, ut aut omnes anguli sint $< \frac{2\pi}{3}$, aut unus sit $\overset{=}{>} \frac{2\pi}{3}$. Punctum quaesitum extra triangulum numquam potest jacere. Nam si est P (Taf. VII. Fig. 1.) punctum quodcunque extra $\triangle ABC$, summa $PA + PB + PC$ semper est $> DA + DB + DC$.

Jam $\triangle ABC$ (Taf. VII. Fig. 2.) tale faciamus, ut sit nullus angulus $\overset{=}{>} \frac{2\pi}{3}$, et sit P punctum quaesitum. Lateribus et angulis solito modo notatis, quum ponitur $BP = x$, $AP = x_1$, $CP = x_2$, $\angle CBP = y$, summa distantiarum $= u$, invenitur

$$u = x + x_1 + x_2,$$

ubi est

$$x_1 = \sqrt{c^2 + x^2 - 2cx \operatorname{Cos}(B-y)},$$

$$x_2 = \sqrt{a^2 + x^2 - 2ax \operatorname{Cos} y}.$$

Differentiando prodit

$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{c \operatorname{Cos}(B-y)}{x_1} - \frac{a \operatorname{Cos} y - x}{x_2},$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{cx \operatorname{Sin}(B-y)}{x_1} + \frac{ax \operatorname{Sin} y}{x_2}.$$

Si u poterit minimi proprietate gaudere (maximum manifesto non exsistit), necesse est, sit

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0$$

vel

$$1 - \frac{c \operatorname{Cos}(B-y)}{x_1} - \frac{a \operatorname{Cos} y}{x_2} = 0, \quad -\frac{cx \operatorname{Sin}(B-y)}{x_1} + \frac{ax \operatorname{Sin} y}{x_2} = 0.$$

Primum patet, huic aequationi positione $x = 0$ satisfieri. Tum aequatio prima mutatur in

$$\operatorname{Cos}(B-y)+\operatorname{Cos} y=1.$$

Itaque angulus B in duas partes ita dividi debet, ut summa Cosinuum fiat $=1$. Summa illa generaliter $=z$ posita, invenitur

$$\frac{dz}{dy}=\operatorname{Sin}(B-y)-\operatorname{Sin} y, \quad \frac{d^2z}{dy^2}=-\operatorname{Cos}(B-y)-\operatorname{Cos} y.$$

Posito $\frac{dz}{dy}=0$, prodit $\operatorname{Sin}(B-y)=\operatorname{Sin} y$ vel $y=\frac{1}{2}B$. Qui quoniam valor $\frac{d^2z}{dy^2}$ negativam reddit, maximo quantitatis z valori respondet. Valor ille maximus est $2\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B$, qui tamen unitati non est aequalis, nisi est $\frac{1}{2}B=\frac{\pi}{3}$ vel $B=\frac{2\pi}{3}$. Nunc vero positum est, nullum angulum esse $\underset{=}{>}\frac{2\pi}{3}$; sequitur, ut non sit $x=0$. Itaque x et y reperiendae sunt ex aequationibus

$$1-\frac{c\operatorname{Cos}(B-y)-x}{x_1}=\frac{a\operatorname{Cos} y}{x_2}, \tag{1}$$

$$\frac{c\operatorname{Sin}(B-y)}{x_1}=\frac{a\operatorname{Sin} y}{x_2}. \tag{2}$$

Quadrando et addendo aequatio invenitur

$$1=\frac{2(c\operatorname{Cos}(B-y)-x)}{x_1}$$

vel

$$\sqrt{c^2+x^2-2cx\operatorname{Cos}(B-y)}=2(c\operatorname{Cos}(B-y)-x). \tag{3}$$

Utroque membro quadrando prodit

$$c^2+x^2-2cx\operatorname{Cos}(B-y)=4c^2\operatorname{Cos}^2(B-y)-8cx\operatorname{Cos}(B-y)+4x^2$$

vel, quia est $c^2=c^2\operatorname{Sin}^2(B-y)+c^2\operatorname{Cos}^2(B-y)$,

$$3c^2\operatorname{Cos}^2(B-y)-6cx\operatorname{Cos}(B-y)+3x^2=c^2\operatorname{Sin}^2(B-y),$$

unde habebimus

$$c\operatorname{Cos}(B-y)-x=\frac{c\operatorname{Sin}(B-y)}{\sqrt{3}}. \tag{4}$$

Duplex quidem est signum dextri membri; sed aequatio (3) docet, quantitatem $c\operatorname{Cos}(B-y)-x$ positivam esse oportere. Quum vero punctum quaesitum extra triangulum jacere non possit, necesse

est, sit $B > y$ atque ideo $\mathrm{Sin}(B-y) > 0$. Dextrum igitur membrum aliud signum ac + habere non potest. Aequationes (1) et (2) hoc quoque modo scribi possunt:

$$1 - \frac{a\,\mathrm{Cos}\,y - x}{x_2} = \frac{c\,\mathrm{Cos}\,(B-y) - x}{x_1},$$

$$\frac{a\,\mathrm{Sin}\,y}{x_2} = \frac{c\,\mathrm{Sin}\,(B-y)}{x_1},$$

quae aequationes eodem atque antea modo suppeditant

$$a\,\mathrm{Cos}\,y - x = \frac{a\,\mathrm{Sin}\,y}{\sqrt{3}}. \tag{5}$$

Si aequatio (5) ab aequatione (4) subtrahitur, provenit aequatio

$$c\,\mathrm{Cos}\,(B-y) - a\,\mathrm{Cos}\,y = \frac{c\,\mathrm{Sin}\,(B-y) - a\,\mathrm{Sin}\,y}{\sqrt{3}},$$

unde invenitur

$$\mathrm{tg}\,(y - \tfrac{1}{2}B) = \frac{a-c}{a+c}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \tfrac{1}{2}B\right),$$

$$\mathrm{tg}\,y = \frac{a\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{3} - c\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{3} - B\right)}{a\,\mathrm{Cos}\,\frac{\pi}{3} + c\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{3} - B\right)}.$$

Quum vero sit

$$\mathrm{Sin}\,y = \frac{a\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{3} - c\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{3} - B\right)}{N\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{3}}, \quad \mathrm{Cos}\,y = \frac{a\,\mathrm{Cos}\,\frac{\pi}{3} + c\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{3} - B\right)}{N\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{3}},$$

evadit

$$x = \frac{ac\,\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)}{N\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{3}},$$

si est

$$N = \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)}$$

$$= \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{3} + B\right)}.$$

Jam facile perspicitur, esse $\angle BPC = \angle APB = \angle APC = \frac{2\pi}{3}$ *), quae res **Simpsonium** ad elegantissimam constructionem duxit. Postea invenitur

$$x_1 = \frac{c\left(c \operatorname{Sin}\frac{\pi}{3} - a \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{3} - B\right)\right)}{N \operatorname{Sin}\frac{\pi}{3}},$$

$$x_2 = \frac{a\left(a \operatorname{Sin}\frac{\pi}{3} - c \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{3} - B\right)\right)}{N \operatorname{Sin}\frac{\pi}{3}};$$

atque ideo

$$u = x + x_1 + x_2 = N.$$

Triangulo igitur aequilatero ABD super AB descripto punctoque D cum C conjuncto, linea CD est $= u$, quae quoque linea per punctum quaesitum transit. Quoniam enim est

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(BDC - BCD) &= \frac{a-c}{a+c} \operatorname{Cot}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} + B\right) \\ &= \frac{a-c}{a+c} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \tfrac{1}{2}B\right) \\ &= \operatorname{tg}\left(y - \tfrac{1}{2}B\right) \end{aligned}$$

vel $\tfrac{1}{2}(BDC - BCD) = y - \tfrac{1}{2}B$ et $\tfrac{1}{2}(BDC + BCD) = \frac{\pi}{3} - \tfrac{1}{2}B$, necesse est, sit $\angle BCD = \frac{\pi}{3} - y = \angle BCP$. Manifesto nihil impedit, quominus alius angulus, ut C, eodem modo atque B tractetur. Descriptis igitur triangulis aequilateris ABD, ACE punctisque D et E cum C et B resp. conjunctis, punctum P reperitur. Iterum differentiando demonstratur, valores nuper inventos quantitatum x, x_1, x_2 minimo respondere.

Postremo faciamus unum angulum $(A) \geqq \frac{2\pi}{3}$ (Taf. VII. Fig. 4.). Puncto quocunque P intra triangulum sumto, demonstrari potest, esse

$$AP + BP + CP > AB + AC.$$

---

*) Super BC (Taf. VII. Fig. 3.) describatur tale segmentum circuli, ut in eo angulum $= \frac{2\pi}{3}$ possit contineri. Arcu BQC in duas partes aequales BC et CQ diviso et puncto Q cum A conjuncto, reperitur punctum quaesitum P.

Nam si posuerimus $\angle BAP=\varphi$, $\angle CAP=\psi$, $\angle ABP=t$, $\angle ACP=v$, habebimus

$$AP.\mathrm{Cos}\,\varphi+BP.\mathrm{Cos}\,t=AB,\quad AP.\mathrm{Cos}\,\psi+CP.\mathrm{Cos}\,v=AC$$

atque ideo

$$AP.(\mathrm{Cos}\,\varphi+\mathrm{Cos}\,\psi)+BP.\mathrm{Cos}\,t+CP.\mathrm{Cos}\,v=AB+AC.$$

Facile apparet, esse

$$BP>BP.\mathrm{Cos}\,t,\quad CP>CP.\mathrm{Cos}\,v,\quad AP\geqq AP.(\mathrm{Cos}\,\varphi+\mathrm{Cos}\,\psi).$$

Maximus enim valor quantitatis $\mathrm{Cos}\,\varphi+\mathrm{Cos}\,\psi$ est $2\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}A$, ut ante demonstratum est *). Sequitur, ut sit $AP+BP+CP>AB+AC$, id quod etiam evenit, si P in AB aut AC sumtum est. Ipsum igitur A est punctum quaesitum, quum angulus A est $\geqq\frac{2\pi}{3}$.

XXX.

Die sphärische Trigonometrie gegründet auf eine Figur in der Ebene.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lebensversicherungs-Calculator der k. k. p. Azienda Assicuratrice zu Triest.

---

1) Es sei O (Taf. VII. Fig. 5.) der Scheitel einer dreiseitigen körperlichen Ecke und AOB eine in der Papierebene liegende

*) Quoniam vero $A\geqq\frac{2\pi}{3}$, est $2\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}A\leqq 1$.

Seitenfläche derselben, welche durch die Kanten OA und OB begrenzt wird. Man denke sich auf der aufstehenden Kante (welche in der Figur nicht sichtbar ist) von O aus ein Stück $OC=1$ abgeschnitten und durch C eine Senkrechte auf die Ebene des Winkels AOB gefällt; der Fusspunkt dieser Senkrechten sei O'. Zieht man $O'A \perp OA$, $O'B \perp OB$, so entstehen, A und B mit C verbunden gedacht, vier rechtwinkelige Dreiecke: Erstens $\Delta O'AC$ und $\Delta O'BC$, deren Winkel bei A und B bekanntlich die an den Kanten OA und OB liegenden Flächenwinkel sind — und zweitens ΔAOC und ΔBOC, deren Winkel bei O die den Flächenwinkeln B und A gegenüberliegenden Kantenwinkel sind, welche wir mit b und a bezeichnen wollen. Legt man die beiden ersten Dreiecke durch Drehung um die Katheten $O'A$ und $O'B$ in die Ebene AOB um, so erhält man $\Delta O'AC_1$ und $\Delta O'BC_2$, worin $\angle O'AC_1=A$, $\angle O'BC_2=B$ und $C_1O'=C_2O'$ ist. Legt man ebenso die beiden anderen Dreiecke in die Papierebene um, so erhält man ΔC_3OA und ΔC_4OB, worin $\angle C_3OA=b$, $\angle C_4OB=a$, $OC_3=OC_4=OC=1$, $AC_3=AC_1$ und $BC_4=BC_2$ ist, so dass also ein Kreis, dessen Mittelpunkt in A und dessen Halbmesser AC_3 ist, durch C_1, und ein Kreis, dessen Mittelpunkt in B und dessen Halbmesser BC_4 ist, durch C_2 geht. Dieses ist in Kürze die Entstehung der aus der Stereometrie bekannten Figur, welche unseren Ableitungen zur Grundlage dient und welche Herr Professor Grunert zuerst für die Zwecke der sphärischen Trigonometrie verwendet hat. (S. Archiv Thl. XXV. S. 225.)

2) Man beschreibe von O als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $OC_3=OC_4=1$ die Kreislinie C_3pqC_4, so bilden die zwischen den Schenkeln der Kantenwinkel a, b, c enthaltenen Bogen die Seiten a, b, c des dem gegebenen Trieder entsprechenden sphärischen Dreieckes, und es ist $AC_3=AC_1=\operatorname{Sin} b$, $BC_4=BC_2=\operatorname{Sin} a$, mithin, da

$$C_1O'=AC_1.\operatorname{Sin} A=\operatorname{Sin} b.\operatorname{Sin} A,$$

$$C_2O'=BC_2.\operatorname{Sin} B=\operatorname{Sin} a.\operatorname{Sin} B$$

und $C_1O'=C_2O'$ ist,

$$\operatorname{Sin} b.\operatorname{Sin} A=\operatorname{Sin} a.\operatorname{Sin} B,$$

woraus allgemein folgt:

$$(1)\qquad \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin} a}=\frac{\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Sin} b}=\frac{\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Sin} c}.$$

Zieht man $Ar \perp OB$ und $O's \parallel OB$, so ist $O's=Br=OB-Or$, da aber

$O's = AO' . \mathrm{Sin}\, c = AC_1 . \mathrm{Cos}\, A . \mathrm{Sin}\, c = \mathrm{Sin}\, b . \mathrm{Sin}\, c . \mathrm{Cos}\, A,$

$OB = \mathrm{Cos}\, a,$

$Or = AO . \mathrm{Cos}\, c = \mathrm{Cos}\, b . \mathrm{Cos}\, c;$

so erhält man durch Substitution in die erste Gleichung:

$$\mathrm{Sin}\, b . \mathrm{Sin}\, c . \mathrm{Cos}\, A = \mathrm{Cos}\, a - \mathrm{Cos}\, b . \mathrm{Cos}\, c$$

oder

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{Cos}\, A = \frac{\mathrm{Cos}\, a - \mathrm{Cos}\, b . \mathrm{Cos}\, c}{\mathrm{Sin}\, b . \mathrm{Sin}\, c}.$$

Es ist ferner

$$O'B = rs = Ar - As;$$

da aber

$O'B = BC_2 . \mathrm{Cos}\, B = \mathrm{Sin}\, a . \mathrm{Cos}\, B,$

$Ar = AO . \mathrm{Sin}\, c = \mathrm{Cos}\, b . \mathrm{Sin}\, c,$

$As = AO' . \mathrm{Cos}\, c = AC_1 . \mathrm{Cos}\, A . \mathrm{Cos}\, c = \mathrm{Sin}\, b . \mathrm{Cos}\, c . \mathrm{Cos}\, A$

ist, so ergibt sich durch Substitution dieser Werthe in die erste Gleichung die Formel

$$\text{(III)} \qquad \mathrm{Sin}\, a . \mathrm{Cos}\, B = \mathrm{Cos}\, b . \mathrm{Sin}\, c - \mathrm{Sin}\, b . \mathrm{Cos}\, c . \mathrm{Cos}\, A.$$

Wird diese Gleichung durch $\mathrm{Sin}\, a$ dividirt und bedenkt man, dass nach (I)

$$\frac{\mathrm{Sin}\, c}{\mathrm{Sin}\, a} = \frac{\mathrm{Sin}\, C}{\mathrm{Sin}\, A}, \quad \frac{\mathrm{Sin}\, b}{\mathrm{Sin}\, a} = \frac{\mathrm{Sin}\, B}{\mathrm{Sin}\, A}$$

ist, so folgt:

$$\mathrm{Cos}\, B = \mathrm{Cos}\, b \cdot \frac{\mathrm{Sin}\, C}{\mathrm{Sin}\, A} - \frac{\mathrm{Sin}\, B}{\mathrm{Sin}\, A} . \mathrm{Cos}\, c . \mathrm{Cos}\, A,$$

und wenn man mit $\mathrm{Sin}\, A$ die Gleichung multiplicirt und $\mathrm{Cos}\, b . \mathrm{Sin}\, C$ daraus bestimmt:

$$\text{(IV)} \qquad \mathrm{Cos}\, b . \mathrm{Sin}\, C = \mathrm{Sin}\, A . \mathrm{Cos}\, B + \mathrm{Cos}\, A . \mathrm{Sin}\, B . \mathrm{Cos}\, c;$$

werden hierin die sich auf einander beziehenden Grössen b, c und B, C mit einander vertauscht, so erhält man auch:

$$\mathrm{Cos}\, c . \mathrm{Sin}\, B = \mathrm{Sin}\, A . \mathrm{Cos}\, C + \mathrm{Cos}\, A . \mathrm{Sin}\, C . \mathrm{Cos}\, b,$$

und wenn die Gleichung (IV) mit $\mathrm{Cos}\, A$ multiplicirt und zu dieser addirt wird, so erhält man:

$$\text{Cos}\,c\,.\,\text{Sin}\,B = \text{Sin}\,A\,.\,(\text{Cos}\,C + \text{Cos}\,A\,.\,\text{Cos}\,B) + \text{Sin}\,B\,.\,\text{Cos}^2 A\,.\,\text{Cos}\,c$$

oder

$$\text{Cos}\,c\,.\,\text{Sin}\,B\,.\,\text{Sin}^2 A = \text{Sin}\,A\,.\,(\text{Cos}\,C + \text{Cos}\,A\,.\,\text{Cos}\,B),$$

$$\text{Cos}\,c\,.\,\text{Sin}\,B\,.\,\text{Sin}\,A = \text{Cos}\,C + \text{Cos}\,A\,.\,\text{Cos}\,B;$$

mithin

$$\text{(V)} \qquad \text{Cos}\,c = \frac{\text{Cos}\,C + \text{Cos}\,A\,.\,\text{Cos}\,B}{\text{Sin}\,A\,.\,\text{Sin}\,B}.$$

Nach (II) hat man auch

$$\text{Cos}\,C = \frac{\text{Cos}\,c - \text{Cos}\,a\,.\,\text{Cos}\,b}{\text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,b},$$

und aus diesen beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\text{Cos}\,C = \text{Sin}\,A\,.\,\text{Sin}\,B\,.\,\text{cos}\,c - \text{Cos}\,A\,.\,\text{Cos}\,B,$$

$$\text{Cos}\,c = \text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,b\,.\,\text{Cos}\,C + \text{Cos}\,a\,.\,\text{Cos}\,b;$$

multiplicirt man die erste Gleichung mit $\text{Cos}\,c$ und die zweite mit $\text{Cos}\,C$, so sind die Producte einander gleich, und man hat:

$$\text{Sin}\,A\,.\,\text{Sin}\,B\,.\,\text{Cos}^2 c - \text{Cos}\,A\,.\,\text{Cos}\,B\,.\,\text{Cos}\,c$$
$$= \text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,b\,.\,\text{Cos}^2 C + \text{Cos}\,a\,.\,\text{Cos}\,b\,.\,\text{Cos}\,C$$

oder

$$\text{Sin}\,A\,.\,\text{Sin}\,B - \text{Sin}\,A\,.\,\text{Sin}\,B\,.\,\text{Sin}^2 c - \text{Cos}\,A\,.\,\text{Cos}\,B\,.\,\text{Cos}\,c$$
$$= \text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,b - \text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,b\,.\,\text{Sin}^2 C + \text{Cos}\,a\,.\,\text{Cos}\,b\,.\,\text{Cos}\,C;$$

da aber nach (I):

$$\text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,C = \text{Sin}\,A\,.\,\text{Sin}\,c,$$

$$\text{Sin}\,b\,.\,\text{Sin}\,C = \text{Sin}\,B\,.\,\text{Sin}\,c;$$

so ist

$$\text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,b\,.\,\text{Sin}^2 C = \text{Sin}\,A\,.\,\text{Sin}\,B\,.\,\text{Sin}\,c,$$

mithin wird

$$\text{(VI)} \qquad \text{Sin}\,A\,.\,\text{Sin}\,B - \text{Cos}\,A\,.\,\text{Cos}\,B\,.\,\text{Cos}\,c$$
$$= \text{Sin}\,a\,.\,\text{Sin}\,b + \text{Cos}\,a\,.\,\text{Cos}\,b\,.\,\text{Cos}\,C,$$

eine Relation zwischen den drei Winkeln und den drei Seiten eines sphärischen Dreieckes, welche Cagnoli zuerst aufgefunden hat.

3) Verlängert man die Geraden C_3O' und C_4O' bis zu ihren Durchschnitten q und p mit der Kreislinie C_3pqC_4, so ist offenbar $AC_3 = Aq$ und $BC_4 = Bp$, also geht die Kreislinie C_3C_1 gehörig verlängert durch q und jene C_4C_2 durch p. Construirt man nun das Viereck pC_3C_4q und verbindet O mit p und q, so ersieht man leicht aus der Figur, dass

$$\angle C_3OC_4 = a+b+c, \qquad C_3C_4 = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c),$$

$$\angle C_3Op = b+c-a, \qquad C_3p = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a),$$

$$\angle C_4Oq = a+c-b, \qquad C_4q = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b),$$

$$\angle pOq = a+b-c = 2z, \quad pq = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c) = 2\,\mathrm{Sin}\,z,$$

$$\angle C_3pO' = \angle C_4qO' = 180^0 - \tfrac{1}{2}(a+b+c),$$

$$\mathrm{Sin}\,C_3pO' = \mathrm{Sin}\,C_4qO' = \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{C_3C_4}{2}.$$

Ferner ist

$$C_3O' = AC_3 + AO' = \mathrm{Sin}\,b + \mathrm{Sin}\,b.\mathrm{Cos}\,A = \mathrm{Sin}\,b.(1+\mathrm{Cos}\,A) = 2\,\mathrm{Sin}\,b.\mathrm{Cos}^2\frac{A}{2},$$

$$Oq = C_3q - C_3O' = 2\,\mathrm{Sin}\,b - 2\,\mathrm{Sin}\,b.\mathrm{Cos}^2\frac{A}{2} = 2\,\mathrm{Sin}\,b.(1-\mathrm{Cos}^2\frac{A}{2})$$

$$= 2\,\mathrm{Sin}\,b.\mathrm{Sin}^2\frac{A}{2};$$

mithin

$$(1) \qquad \mathrm{Cos}^2\frac{A}{2} = \frac{C_3O'}{2\,\mathrm{Sin}\,b}, \quad \mathrm{Sin}^2\frac{A}{2} = \frac{O'q}{2\,\mathrm{Sin}\,b};$$

um C_3O' und $O'q$ durch die Bestandtheile des sphärischen Dreieckes auszudrücken, hat man

$$\text{im } \Delta\, C_3pO': \frac{C_3O'}{C_3p} = \frac{\mathrm{Sin}\,C_3pO'}{\mathrm{Sin}\,c} = \frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)}{\mathrm{Sin}\,c} = \frac{C_3O'}{2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)},$$

$$\text{im } \Delta\, C_4qO': \frac{O'q}{C_4q} = \frac{\mathrm{Sin}\,z}{\mathrm{Sin}\,c} = \frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\mathrm{Sin}\,c} = \frac{O'q}{2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)};$$

also

$$C_3O' = \frac{2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c).\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\mathrm{Sin}\,c},$$

$$O'q = \frac{2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b).\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\mathrm{Sin}\,c}.$$

Werden diese Werthe in die Gleichungen (1) substituirt, so erhält man nach Ausziehung der Quadratwurzel die Formeln:

$$\text{(VII)} \qquad \operatorname{Cos}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Sin}b.\operatorname{Sin}c}},$$

$$\text{(VIII)} \qquad \operatorname{Sin}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}b.\operatorname{Sin}c}}.$$

Ebenso ist nach der Figur:

$$C_4O' = C_4B + BO' = \operatorname{Sin}a + \operatorname{Sin}a.\operatorname{Cos}B = \operatorname{Sin}a.(1+\operatorname{Cos}B)$$

$$= 2\operatorname{Sin}a.\operatorname{Cos}^2\frac{B}{2},$$

$$O'p = C_4p - C_4O' = 2\operatorname{Sin}a - 2\operatorname{Sin}a.\operatorname{Cos}^2\frac{B}{2} = 2\operatorname{Sin}a(1-\operatorname{Cos}^2\frac{B}{2})$$

$$= 2\operatorname{Sin}a.\operatorname{Sin}^2\frac{B}{2};$$

mithin

$$(2) \qquad \operatorname{Cos}^2\frac{B}{2} = \frac{C_4O'}{2\operatorname{Sin}a}, \quad \operatorname{Sin}^2\frac{B}{2} = \frac{O'p}{2\operatorname{Sin}a};$$

um C_4O' und $O'p$ durch die Bestandtheile des sphärischen Dreieckes auszudrücken, hat man

$$\text{im } \Delta\, C_4qO': \frac{C_4O'}{C_4q} = \frac{\operatorname{Sin}C_3qO'}{\operatorname{Sin}c} = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Sin}c} = \frac{C_4O'}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)},$$

$$\text{im } \Delta\, C_3pO': \frac{O'p}{C_3p} = \frac{\operatorname{Sin}z}{\operatorname{Sin}c} = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}c} = \frac{O'q}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)};$$

folglich

$$C_4O' = \frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin}c},$$

$$O'q = \frac{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}c}.$$

Werden diese Werthe in (2) substituirt, so erhält man, wenn beiderseits die Quadratwurzel ausgezogen wird; die Gleichungen:

$$\operatorname{Cos}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin}a.\operatorname{Sin}c}},$$

$$\operatorname{Sin}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}a.\operatorname{Sin}c}}$$

Das in den Formeln (VII) und (VIII) ausgesprochene Gesetz der Abhängigkeit eines Winkels A von den drei Seiten a, b, c gestattet die beiden letzten Formeln auch unmittelbar aufzuschreiben. Wendet man dieses Gesetz an zur Bestimmung des dritten Winkels C, so zeigt sich:

$$(3)\qquad \text{Cos}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\text{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\text{Sin}\,a.\text{Sin}\,b}},$$

$$(4)\qquad \text{Sin}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\text{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)\,\text{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{Sin}\,a.\text{Sin}\,b}},$$

von welchen zwei Gleichungen wir im Nachfolgenden einen nützlichen Gebrauch machen werden.

4) Nach dem Obigen ist:

$$\text{Cos}^2\frac{A}{2}=\frac{C_3O'}{2\,\text{Sin}\,b}=\frac{C_3O'}{C_3q},\quad \text{Sin}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\frac{\overline{C_3C_4}^2}{4},$$

$$\text{Sin}^2\frac{A}{2}=\frac{O'q}{2\,\text{Sin}\,b}=\frac{O'q}{C_3q},\quad \text{Sin}^2\tfrac{1}{2}(a+b-c)=\frac{\overline{pq}^2}{4},$$

$$\text{Cos}^2\frac{B}{2}=\frac{C_4O'}{2\,\text{Sin}\,a}=\frac{C_4O'}{C_4p},\quad \text{Sin}^2\tfrac{1}{2}(a+c-b)=\frac{\overline{C_4q}^2}{4},$$

$$\text{Sin}^2\frac{B}{2}=\frac{O'p}{2\,\text{Sin}\,a}=\frac{O'p}{C_4p},\quad \text{Sin}^2\tfrac{1}{2}(b+c-a)=\frac{\overline{C_3p}^2}{4};$$

woraus man mit Leichtigkeit folgende vier Gleichungen erhält:

$$(5)\qquad \left[\frac{\text{Cos}\frac{A}{2}.\text{Cos}\frac{B}{2}}{\text{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}\right]^2=\frac{C_3O'}{C_3q}\cdot\frac{C_4O'}{C_4p}\cdot\frac{4}{\overline{C_3C_4}^2},$$

$$(6)\qquad \left[\frac{\text{Sin}\frac{A}{2}.\text{Sin}\frac{B}{2}}{\text{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}\right]^2=\frac{O'q}{C_3q}\cdot\frac{O'p}{C_4p}\cdot\frac{4}{\overline{pq}^2},$$

$$(7)\qquad \left[\frac{\text{Sin}\frac{A}{2}.\text{Cos}\frac{B}{2}}{\text{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}\right]^2=\frac{O'q}{C_3q}\cdot\frac{C_4O'}{C_4p}\cdot\frac{4}{\overline{C_4q}^2},$$

$$(8)\qquad \left[\frac{\text{Cos}\frac{A}{2}.\text{Sin}\frac{B}{2}}{\text{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}\right]^2=\frac{O'p}{C_3q}\cdot\frac{C_3O'}{C_4p}\cdot\frac{4}{\overline{C_3p}^2}.$$

Wegen $\Delta C_3C_4O' \backsim \Delta pqO'$ gelten die Proportionen:

$$O'p : pq = C_3O' : C_3C_4,$$

$$O'p : O'q = C_3O' : C_4O';$$

mithin

$$\frac{Op}{pq} = \frac{C_3O'}{C_3C_4}$$

oder

$$\frac{\overline{O'p}^2 . (C_3O' . O'q)}{\overline{pq}^2} = \frac{\overline{C_3O'}^2 . (C_4O' . O'q)}{\overline{C_3C_4}^2};$$

da aber nach der zweiten Proportion:

$$O'p : C_4O' = C_3O' . O'q,$$

so wird durch Abkürzung mit diesen gleichen Factoren:

$$\frac{O'p . O'q}{\overline{pq}^2} = \frac{C_3O' . C_4O'}{\overline{C_3C_4}^2},$$

und wenn man diese Gleichung mit 4 multiplicirt und durch $C_3q . C_4p$ dividirt, so zeigt sich:

$$\frac{O'p . O'q}{C_3q . C_4p} \cdot \frac{4}{\overline{pq}^2} = \frac{C_3O' . C_4O'}{C_3q . C_4p} \cdot \frac{4}{\overline{C_3C_4}^2},$$

also sind die Ausdrücke (5) und (6) einander gleich.

Wegen $\Delta\, C_3O'p \sim \Delta\, C_4O'q$ hat man die Proportion:

$$C_3p : C_4q = C_3O' : C_4O',$$

folglich

$$(9) \qquad C_4q = C_3p . \frac{C_4O'}{C_3O'},$$

und im $\Delta\, O'pC_3$:

$$C_3O' : C_3p = \text{Sin}\, O'pC_3 : \text{Sin}\, c = \frac{C_3C_4}{2} : \text{Sin}\, c,$$

also

$$C_3p = 2 . C_3O' . \frac{\text{Sin}\, c}{C_3C_4}$$

oder

$$(10) \qquad \overline{C_3p}^2 = 4 . \overline{C_3O'}^2 . \frac{\text{Sin}^2 c}{\overline{C_3C_4}^2};$$

werden die Gleichungen (9) und (10) mit einander multiplicirt und wird das Product durch die gleichen Factoren abgekürzt, so erhält man:

$$C_3p\,.\,C_4q=4\,.\,C_3O'\,.\,C_4O'\,.\,\frac{\operatorname{Sin}^2c}{C_3C_4^2}$$

oder

$$\frac{C_3p\,.\,C_4p}{C_3q\,.\,C_4p}=4\,.\,\frac{C_3O'\,.\,C_4O'}{C_3q\,.\,C_4p}\,.\,\frac{\operatorname{Sin}^2c}{C_3C_4^2}.$$

Nun ist aber

$$\frac{C_3p\,.\,C_4q}{C_3q\,.\,C_4p}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin}a\operatorname{Sin}b}=\operatorname{Sin}^2\frac{C}{2},$$

mithin

$$\frac{C_3O'\,.\,C_4O'}{C_3q\,.\,C_4p}\,.\,\frac{4}{C_3C_4^2}=\frac{\operatorname{Sin}^2\frac{C}{2}}{\operatorname{Sin}^2c};$$

der erste Theil dieser Gleichung ist gleich dem zweiten Theil in (5) und es ist daher:

$$\text{(A)}\qquad \frac{\operatorname{Cos}\frac{A}{2}\,.\operatorname{Cos}\frac{B}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{A}{2}\,.\operatorname{Sin}\frac{B}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{C}{2}}{\operatorname{Sin}c}.$$

Wegen $\Delta\, C_3O'p \sim \Delta\, C_4O'q$ hat man die Proportionen:

$$O'p:C_3p=O'q:C_4q,$$
$$O'p:C_3O'=O'q:C_4O';$$

folglich

$$\frac{O'p}{C_3p}=\frac{O'q}{C_4q}$$

oder

$$\frac{\overline{O'p}^2.(C_3O'\,.\,C_4O')}{C_3p^2}=\frac{\overline{O'q}^2.(C_3O'\,.\,C_4O')}{C_4q^2};$$

da aber nach der zweiten Proportion:

$$O'p\,.\,C_4O'=O'q\,.\,C_3O',$$

so wird durch Abkürzung mit diesen gleichen Factoren:

$$\frac{O'p\,.\,C_3O'}{C_3p^2}=\frac{O'q\,.\,C_4O'}{C_4q^2},$$

und wenn man diese Gleichung mit 4 multiplicirt und durch $C_3q.C_4p$ dividirt, so zeigt sich:

$$\frac{O'p.C_3O'}{C_3q.C_4p}.\frac{4}{\overline{C_3p^2}}=\frac{O'q.C_4O'}{C_3q.C_4p}.\frac{4}{\overline{C_4q^2}},$$

also sind die Ausdrücke (7) und (8) einander gleich.

Wegen $\Delta\, C_3C_4O' \backsim \Delta\, pqO'$ gilt die Proportion:

$$C_4O':C_3C_4=Oq':pq,$$

mithin

$$(11)\qquad C_3C_4=C_4O'.\frac{pq}{O'q},$$

und im $\Delta\, O'pC_3$:

$$O'q:C_4q=\mathrm{Sin}\,z:\mathrm{Sin}\,c=\frac{pq}{2}:\mathrm{Sin}\,c,$$

also

$$pq=2.O'q.\frac{\mathrm{Sin}\,c}{C_4q}$$

oder

$$(12)\qquad \overline{pq^2}=4.\overline{O'q^2}.\frac{\mathrm{Sin}^2c}{\overline{C_4q^2}};$$

werden die Gleichungen (11) und (12) mit einander multiplicirt und wird das Product durch die gleichen Factoren abgekürzt, so erhält man:

$$C_3C_4.pq=4.O'q.C_4O'.\frac{\mathrm{Sin}^2c}{\overline{C_4q^2}},$$

oder

$$\frac{C_3C_4.pq}{C_3q.C_4p}=4.\frac{O'q.C_4O'}{C_3q.C_4p}.\frac{\mathrm{Sin}^2c}{\overline{C_4q^2}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{C_3C_4.pq}{C_3q.C_4p}=\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(a+b-c)}{\mathrm{Sin}\,a.\mathrm{Sin}\,b}=\mathrm{Cos}^2\frac{C}{2},$$

mithin

$$\frac{O'q.C_4O'}{C_3q.C_4p}.\frac{4}{\overline{C_4q^2}}=\frac{\mathrm{Cos}^2\frac{C}{2}}{\mathrm{Sin}^2c};$$

der erste Theil dieser Gleichung ist gleich dem zweiten Theil in (7), und es ist daher:

$$\text{(B)} \qquad \frac{\operatorname{Sin}\frac{A}{2}.\operatorname{Cos}\frac{B}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}=\frac{\operatorname{Cos}\frac{A}{2}.\operatorname{Sin}\frac{B}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}=\frac{\operatorname{Cos}\frac{C}{2}}{\operatorname{Sin}c}.$$

Die Gleichungen (A) und (B) geben nun folgende:

$$\text{(a)} \qquad \frac{\operatorname{Cos}\frac{A}{2}.\operatorname{Cos}\frac{B}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Sin}c},$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{\operatorname{Sin}\frac{A}{2}.\operatorname{Sin}\frac{B}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin}c},$$

$$\text{(c)} \qquad \frac{\operatorname{Sin}\frac{A}{2}.\operatorname{Cos}\frac{B}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin}c},$$

$$\text{(d)} \qquad \frac{\operatorname{Cos}\frac{A}{2}.\operatorname{Sin}\frac{B}{2}}{\operatorname{Cos}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Sin}c}.$$

Werden die Gleichungen (a) und (b) einmal addirt, einmal subtrahirt, und macht man dasselbe Manöver mit den Gleichungen (c) und (d) unter gleichzeitiger Anwendung der bekannten goniometrischen Formeln:

$$\operatorname{Cos}(x\pm y)=\operatorname{Cos}x.\operatorname{Cos}y\mp\operatorname{Sin}x.\operatorname{Sin}y,$$

$$\operatorname{Sin}(x\pm y)=\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}y\pm\operatorname{Cos}x.\operatorname{Sin}y,$$

$$\operatorname{Sin}x\pm\operatorname{Sin}y=2\operatorname{Sin}\frac{x\pm y}{2}.\operatorname{Cos}\frac{x\mp y}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Sin}2x=2\operatorname{Sin}x.\operatorname{Cos}x;$$

so erhält man die Gauss'schen Gleichungen:

$$\text{(IX)} \quad \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}, \qquad \text{(XI)} \quad \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c},$$

$$\text{(X)} \quad \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c}, \qquad \text{(XII)} \quad \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c}.$$

5) Aus (IX) und (X) folgt:

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C}.\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c,$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}C}.\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c,$$

oder, wenn man quadrirt und addirt:

$$1=\frac{\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}.\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}c+\frac{\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}.\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c,$$

folglich:

$$\frac{\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}-\frac{\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}.\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c=1,$$

$$\frac{\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}+\frac{\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}.\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}c=1;$$

also:

$$\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c=\frac{\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}{\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)},$$

$$\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}c=-\frac{\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}{\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)-\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)};$$

und folglich, wie sogleich erhellet:

$$(13)\qquad \operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c=\frac{\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}{\operatorname{Sin}A.\operatorname{Sin}B},$$

$$(14)\qquad \operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}c=-\frac{\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}{\operatorname{Sin}A.\operatorname{Sin}B}.$$

Es ist aber

$$\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)-\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}C=\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)-\operatorname{Cos}^2(90^0-\tfrac{1}{2}C)$$

$$=\{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A-B)+\operatorname{Cos}(90^0-\tfrac{1}{2}C)\}\{\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A-B)-\operatorname{Cos}(90^0-\tfrac{1}{2}C)\}$$

$$=\quad 2\operatorname{Cos}\{45^0-\tfrac{1}{4}(B+C-A)\}\operatorname{Cos}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+C-B)\}$$

$$\times 2\operatorname{Sin}\{45^0-\tfrac{1}{4}(B+C-A)\}\operatorname{Sin}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+C-B)\}$$

$$=\operatorname{Sin}\{90^0-\tfrac{1}{2}(B+C-A)\}\operatorname{Sin}\{90^0-\tfrac{1}{2}(A+C-B)\}$$

$$=\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A).\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B)$$

und

$$\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C=\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)-\mathrm{Cos}^2(90^0-\tfrac{1}{2}C)$$

$$=\{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B)+\mathrm{Cos}(90^0-\tfrac{1}{2}C)\}\{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B)-\mathrm{Cos}(90^0-\tfrac{1}{2}C)\}$$

$$=\ 2\mathrm{Cos}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B+C)\}\mathrm{Cos}\{45^0+\tfrac{1}{4}(A+B-C)\}$$

$$\times 2\,\mathrm{Sin}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B+C)\}\,\mathrm{Sin}\{45^0+\tfrac{1}{4}(A+B-C)\}$$

$$=\mathrm{Sin}\{90^0-\tfrac{1}{2}(A+B+C)\}\,\mathrm{Sin}\{90^0+\tfrac{1}{2}(A+B-C)\}$$

$$=\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C);$$

also, wenn man diese Werthe in die Gleichungen (13) und (14) substituirt und beiderseits die Quadratwurzel auszieht,

$$\text{(XIII)}\quad \mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(B+C-A).\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\mathrm{Sin}A.\mathrm{Sin}B}},$$

$$\text{(XIV)}\quad \mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}c=\sqrt{-\frac{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B+C).\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\mathrm{Sin}A.\mathrm{Sin}B}}.$$

Diese beiden Formeln können auch aus der Gleichung (V) auf bekannte Weise entwickelt werden; da jedoch diese von Herrn Prof. Grunert (im Archiv Thl. XXVI. S. 442.) gegebene interessante Ableitung sich an die beziehungsreichen Gauss'schen Gleichungen anschliesst, so habe ich mir erlaubt, dieselbe hier zu benützen.

Dividirt man die Gleichung (IX) durch die Gleichung (X), ebenso (XII) durch (XI), (XI) durch (X) und (XIII) durch (IX), so erhält man bekanntlich die Neper'schen Analogien:

$$\text{(XV)}\quad \frac{\mathrm{Tg}\tfrac{1}{2}(a+b)}{\mathrm{Tg}\tfrac{1}{2}c}=\frac{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(A+B)},\qquad \text{(XVI)}\quad \frac{\mathrm{Tg}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\mathrm{Tg}\tfrac{1}{2}c}=\frac{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(A+B)},$$

$$\text{(XVII)}\quad \frac{\mathrm{Tg}\tfrac{1}{2}(A+B)}{\mathrm{Ctg}\tfrac{1}{2}C}=\frac{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\mathrm{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b)},\qquad \text{(XVIII)}\quad \frac{\mathrm{Tg}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\mathrm{Ctg}\tfrac{1}{2}C}=\frac{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\mathrm{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b)}.$$

Nachdem im ersten Artikel die Entstehung der in einer Ebene verzeichneten Figur, auf welche die sphärische Trigonometrie gegründet werden kann, in Kürze erläutert wurde, benützte ich dieselbe im zweiten Artikel zur Ableitung der sechs Haupt-Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes, im dritten Artikel zur Ableitung der Formeln für $\mathrm{Cos}\dfrac{A}{2}$,

$\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$ und $\sin\frac{B}{2}$, welcher sich im vierten Artikel jene der Gauss'schen Gleichungen anschliesst, um aus ihnen $\cos\frac{c}{2}$ und $\sin\frac{c}{2}$ durch die drei Winkel ausgedrückt und die Neper-schen Analogien zu erhalten, womit also die sphärische Trigonometrie vollständig begründet ist.

XXXI.

Ueber die nach der dritten Potenz fortschreitenden Reihen.

Von

Herrn Dr. *O. E. Simon*,

ordentlichem Lehrer am Joachimsthalschen Gymnasium zu Berlin.

Durch die Beschäftigung mit den Exponentialreihen, welche von dem reihenden Element die dritte Potenz enthalten, wurde ich auf die nachfolgenden Betrachtungen geführt. Sie zeigen, dass die vorliegenden Functionen Eigenschaften haben, welche denen der trigonometrischen Functionen sehr ähnlich sind; endlich führen sie auf einige Integrale, die man wenigstens in dieser Form nicht leicht auf anderem Wege erhalten würde. — Erst nach Abschluss der Arbeit kamen mir die Untersuchungen Olivier's im II. Bde. des Crelle'schen Journals zu Gesicht, welche sehr

ähnliche Functionen betreffen; jedoch wird Niemand den Unterschied in dem Ausgangspunkte der Betrachtung, in der Behandlungsweise und in den Resultaten verkennen, der zwischen jener und der vorliegenden Arbeit stattfindet.

Die dritten Wurzeln aus -1 sind bekanntlich die reelle -1 und die beiden complexen

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{2};$$

wenn man nun die beiden letzten mit besondern Buchstaben bezeichnet, etwa j, j', so sieht man leicht, dass $j'=-j^2$ ist, auch findet man auf der Stelle folgende Gleichungen:

$$j=-\frac{1}{j^2}, \quad j+j^2=i\sqrt{3}, \quad j-j^2=1,$$
$$1+j^2=j, \quad 1+j-j^2=2, \quad 1-j+j^2=0.$$

Multiplicirt man mit diesen dritten Wurzeln, -1, j, $-j^2$, den Exponenten von e^x, so nehmen die nach Potenzen von x fortschreitenden Reihen folgende Formen an:

$$e^{-x}=1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^9}{9!}+\ldots-\left(\frac{x}{1}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}-\ldots\right)$$
$$+\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\right), \qquad (1)$$

$$e^{xj}=1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^9}{9!}+\ldots+j\left(\frac{x}{1}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}-\ldots\right)$$
$$+j^2\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\right), \qquad (2)$$

$$e^{-xj^2}=1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^9}{9!}+\ldots-j^2\left(\frac{x}{1}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}-\ldots\right)$$
$$-j\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\right). \qquad (3)$$

Man bezeichne die in jedem dieser Ausdrücke gesondert vorkommenden Reihen, deren Exponenten x^3 sind, mit $\mathfrak{A}(x)$, $\mathfrak{B}(x)$, $\mathfrak{C}(x)$, so dass

$$\mathfrak{A}(x)=1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^9}{9!}+\ldots;$$
$$\mathfrak{B}(x)=\quad\frac{x}{1}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}-\ldots,$$
$$\mathfrak{C}(x)=\quad\frac{x^2}{2!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots$$

und (1), (2), (3) in folgender Art geschrieben werden können:

$$e^{-x} = \mathfrak{A}(x) - \mathfrak{B}(x) + \mathfrak{C}(x), \quad (4)$$

$$e^{xj} = \mathfrak{A}(x) + j\mathfrak{B}(x) + j^2\mathfrak{C}(x), \quad (5)$$

$$e^{-xj^2} = \mathfrak{A}(x) - j^2\mathfrak{B}(x) - j\mathfrak{C}(x). \quad (6)$$

Um nun neben $\mathfrak{A}(x)$ auch $\mathfrak{B}(x)$ und $\mathfrak{C}(x)$ in den Exponentialgrössen auszudrücken, addire man die letzten Gleichungen, nachdem man (4) und (6) mit $-j$ und j^2, oder mit j^2 und $-j$ multiplicirt hat. Mit Rücksicht auf die oben für j aufgestellten Gleichungen erhält man:

$$\mathfrak{A}(x) = \frac{e^{xj} + e^{-xj^2} + e^{-x}}{3},$$

$$\mathfrak{B}(x) = \frac{e^{xj} + j^2 e^{-xj^2} - je^{-x}}{3j},$$

$$\mathfrak{C}(x) = \frac{e^{xj} - je^{-xj^2} + j^2 e^{-x}}{3j^2}.$$

Es ergibt sich unmittelbar, dass $\mathfrak{A}(0) = 1$, $\mathfrak{B}(0) = \mathfrak{C}(0) = 0$ ist; dass ferner $\mathfrak{A}(x)$ für positive Werthe von x unzählig viele Male von positiven zu negativen Werthen übergeht, dagegen für negative x nach der positiven Seite zu in's Unendliche wächst; $\mathfrak{B}(x)$ und $\mathfrak{C}(x)$ sich für positive x ähnlich wie $\mathfrak{A}(x)$ verhalten, dagegen für negative x $\mathfrak{B}(x)$ nach der negativen, $\mathfrak{C}(x)$ aber wie $\mathfrak{A}(x)$ nach der positiven Seite in's Unendliche geht. Der erste Werth von x, für welchen $\mathfrak{A}(x)$ verschwindet, ist $x_0 = 1{,}6109$, während $\mathfrak{B}(x_0) = 1{,}2214$, $\mathfrak{C}(x_0) = 2{,}0417$, $\mathfrak{A}(-x_0) = 2{,}4936$, $\mathfrak{B}(-x_0) = -4{,}1684$, $\mathfrak{C}(-x_0) = 1{,}4918$. Der erste positive Werth von x aber, für welchen $\mathfrak{A}(x)$ wiederum gleich 1 wird, ist $x_1 = 5{,}3204$, wogegen $\mathfrak{B}(x_1)$ einen negativen, $\mathfrak{C}(x_1)$ einen von $+1$ verschiedenen positiven Werth hat.

In Betreff der Formeln (5) und (6) ist zu bemerken, dass ihre Beziehung zu einander die conjugirter imaginärer Grössen ist, so dass ihr Product nur reell ist. Zwei Ausdrücke sind demnach einander conjugirt, wenn in ihnen die Factoren von j und j^2 vertauscht sind, und dieselben in dem einen die entgegengesetzten Vorzeichen haben, als im andern. In der That erhält man durch Multiplication von (5) und (6), unter Beachtung der Gleichung $j - j^2 = 1$, wenn man $\mathfrak{A}$ für $\mathfrak{A}(x)$ u. s. w. setzt:

$$e^{x} = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Als Product dieser Gleichung mit (4) ergibt sich die bemerkenswerthe allgemeine Formel:

$$1 = \mathfrak{A}^3(x) - B^3(x) + \mathfrak{C}^3(x) + 3\mathfrak{A}(x)\mathfrak{B}(x)\mathfrak{C}(x), \qquad (7)$$

eine Gleichung, welche in Bezug auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ dieselbe Bedeutung hat, wie für die trigonometrischen Functionen $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Indem man ferner (4) mit (6), (4) mit (5) verbindet und die Gleichungen $-1-j^2 = -j$, $-1+j = j^2$ berücksichtigt, resultiren die Formeln:

$$e^{-xj} = \mathfrak{A}^2 + j^2\mathfrak{B}^2 - j\mathfrak{C}^2 - j\mathfrak{A}\mathfrak{B} - j^2\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C},$$

$$e^{xj^2} = \mathfrak{A}^2 - j\mathfrak{B}^2 + j^2\mathfrak{C}^2 + j^2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + j\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C},$$

welche mit Hinzuziehung der für e^x gefundenen die Werthe unserer Functionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ für negative x bestimmen, nämlich:

$$\mathfrak{A}(-x) = \mathfrak{A}^2(x) + \mathfrak{B}(x)\mathfrak{C}(x), \qquad (8)$$

$$\mathfrak{B}(-x) = -\mathfrak{C}^2(x) - \mathfrak{A}(x)\mathfrak{B}(x), \qquad (9)$$

$$\mathfrak{C}(-x) = \mathfrak{B}^2(x) - \mathfrak{A}(x)\mathfrak{C}(x). \qquad (10)$$

Nachdem so einige Verhältnisse der Functionen, welche denen der trigonometrischen Functionen entsprechen, erörtert worden, wollen wir auch die Ausdrücke von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ geben, welche die Function einer Summe durch die Functionen von den einzelnen Summanden bestimmen. Setzt man nämlich in (4), (5), (6) für $x : x+y$, verbindet dann die Gleichungen in derselben Weise wie oben die unveränderten (4), (5), (6), so dass $\mathfrak{A}(x+y)$ etc. gefunden wird als die Summe von Exponential-Ausdrücken; zerlegt man letztere in Factoren, so dass jeder Exponent nur x oder y enthält, und substituirt dann für diese Factoren ihre Werthe nach (4), (5), (6), so ergeben sich die Formeln:

$$\mathfrak{A}(x+y) = \mathfrak{A}(x)\mathfrak{A}(y) - \mathfrak{B}(x)\mathfrak{C}(y) - \mathfrak{C}(x)\mathfrak{B}(y),$$

$$\mathfrak{B}(x+y) = \mathfrak{B}(x)\mathfrak{A}(y) - \mathfrak{C}(x)\mathfrak{C}(y) + \mathfrak{A}(x)\mathfrak{B}(y),$$

$$\mathfrak{C}(x+y) = \mathfrak{C}(x)\mathfrak{A}(y) + \mathfrak{A}(x)\mathfrak{C}(y) + \mathfrak{B}(x)\mathfrak{B}(y);$$

sowie unter Hinzuziehung von (8), (9), (10):

$$\mathfrak{A}(x-y) = \mathfrak{A}(x)\mathfrak{A}^2(y) - \mathfrak{B}(x)\mathfrak{B}^2(y) + \mathfrak{C}(x)\mathfrak{C}^2(y) + \mathfrak{A}(x)\mathfrak{B}(y)\mathfrak{C}(y) + \mathfrak{B}(x)\mathfrak{A}(y)\mathfrak{C}(y) + \mathfrak{C}(x)\mathfrak{A}(y)\mathfrak{B}(y),$$

$$\mathfrak{B}(x-y) = \mathfrak{B}(x)\mathfrak{A}^2(y) - \mathfrak{C}(x)\mathfrak{B}^2(y) - \mathfrak{A}(x)\mathfrak{C}^2(y) + \mathfrak{B}(x)\mathfrak{B}(y)\mathfrak{C}(y) + \mathfrak{C}(x)\mathfrak{A}(y)\mathfrak{C}(y) - \mathfrak{A}(x)\mathfrak{A}(y)\mathfrak{B}(y),$$

$$\mathfrak{C}(x-y) = \mathfrak{C}(x)\mathfrak{A}^2(y) + \mathfrak{A}(x)\mathfrak{B}^2(y) - \mathfrak{B}(x)\mathfrak{C}^2(y) + \mathfrak{C}(x)\mathfrak{B}(y)\mathfrak{C}(y)$$
$$-\mathfrak{A}(x)\mathfrak{A}(y)\mathfrak{C}(y) - \mathfrak{B}(x)\mathfrak{A}(y)\mathfrak{B}(y).$$

Die Symmetrie in der Zusammensetzung dieser Ausdrücke sowohl für $x+y$, als auch für $x-y$ ist nicht zu verkennen. — Setzt man zunächst in diese Formeln für y jenes $x_0 = 1{,}6109$ ein, wofür $\mathfrak{A}(x_0) = 0$, so gehen diese Formeln in folgende über:

$$\mathfrak{A}(x+x_0) = -2{,}0417\mathfrak{B}(x) - 1{,}2214\mathfrak{C}(x),$$
$$\mathfrak{B}(x+x_0) = -2{,}0417\mathfrak{C}(x) + 1{,}2214\mathfrak{A}(x),$$
$$\mathfrak{C}(x+x_0) = +2{,}0417\mathfrak{A}(x) + 1{,}2214\mathfrak{B}(x);$$

$$\mathfrak{A}(x-x_0) = 2{,}4936\mathfrak{A}(x) - 1{,}4918\mathfrak{B}(x) + 4{,}1684\mathfrak{C}(x),$$
$$\mathfrak{B}(x-x_0) = 2{,}4936\mathfrak{B}(x) - 1{,}4918\mathfrak{C}(x) + 4{,}1684\mathfrak{A}(x),$$
$$\mathfrak{C}(x-x_0) = 2{,}4936\mathfrak{C}(x) + 1{,}4918\mathfrak{A}(x) - 4{,}1684\mathfrak{B}(x),$$

aus denen sich die folgenden Werthe mit Hülfe der vorhergehenden und umgekehrt berechnen lassen. — Substituirt man aber in die hierzu angewendeten Formeln $y=x$ und $y=2x$, so erhält man, ausser den schon bekannten $\mathfrak{A}(0)=1$, $\mathfrak{B}(0)=\mathfrak{C}(0)=0$, noch

$$\mathfrak{A}(2x) = \mathfrak{A}^2(x) - 2\mathfrak{B}(x)\mathfrak{C}(x),$$
$$\mathfrak{B}(2x) = -\mathfrak{C}^2(x) + 2\mathfrak{A}(x)\mathfrak{B}(x),$$
$$\mathfrak{C}(2x) = \mathfrak{B}^2(x) + 2\mathfrak{A}(x)\mathfrak{C}(x),$$

und mit Berücksichtigung dieser Formeln:

$$\mathfrak{A}(3x) = 3\mathfrak{A}^3(x) - 3\mathfrak{B}^3(x) + 3\mathfrak{C}^3(x) - 2,$$
$$\mathfrak{B}(3x) = 3\mathfrak{A}^2(x)\mathfrak{B}(x) - 3\mathfrak{B}^2(x)\mathfrak{C}(x) - 3\mathfrak{C}^2(x)\mathfrak{A}(x),$$
$$\mathfrak{C}(3x) = 3\mathfrak{A}^2(x)\mathfrak{C}(x) + 3\mathfrak{B}^2(x)\mathfrak{A}(x) - 3\mathfrak{C}^2(x)\mathfrak{B}(x).$$

Endlich ergeben sich aus den Gleichungen (4), (5), (6) für ganze positive Werthe von n die Gleichungen:

$$[\mathfrak{A}(x) - \mathfrak{B}(x) + \mathfrak{C}(x)]^n = \mathfrak{A}(nx) - \mathfrak{B}(nx) + \mathfrak{C}(nx),$$
$$[\mathfrak{A}(x) + j\mathfrak{B}(x) + j^2\mathfrak{C}(x)]^n = \mathfrak{A}(nx) + j\mathfrak{B}(nx) + j^2\mathfrak{C}(nx),$$
$$[\mathfrak{A}(x) - j^2\mathfrak{B}(x) - j\mathfrak{C}(x)]^n = \mathfrak{A}(nx) - j^2\mathfrak{B}(nx) - j\mathfrak{C}(nx),$$

aus denen sich die Functionen von Vielfachen der Variabeln nach den Potenzen der Functionen von den einfachen Variabeln ent-

wickeln lassen. Diese Entwickelungen sind jedoch sehr complicirt, indem sie je nach den Resten von n für den Divisor 6 verschieden sind. — Um nach den obigen Gleichungen $\mathfrak{A}(x)$ in den Functionen von $2x$, oder $\mathfrak{A}\left(\frac{x}{2}\right)$ in denen von x auszudrücken, hat man eine Gleichung vierten Grades nach $\mathfrak{A}(x)$ oder $\mathfrak{A}\left(\frac{x}{2}\right)$ aufzulösen, in welcher die Coefficienten der Potenzen dieser Grössen complicirte Ausdrücke aus den Functionen der doppelten Argumente sind.

Substituirt man in die Exponentialausdrücke für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ xj und xj^2 für x, so erhält man:

$$\mathfrak{A}(xj)=\mathfrak{A}(-x),\quad \mathfrak{B}(xj)=-j\mathfrak{B}(-x),\quad \mathfrak{C}(xj)=j^2\mathfrak{C}(-x),$$
$$\mathfrak{A}(xj^2)=\mathfrak{A}(x),\quad \mathfrak{B}(xj^2)=j^2\mathfrak{B}(x),\quad \mathfrak{C}(xj^2)=-j\mathfrak{C}(x).$$

Endlich verdienen noch folgende Formeln ihrer Symmetrie und Einfachheit wegen Bemerkung:

$$\mathfrak{A}(x+yj)=\mathfrak{A}(x)\mathfrak{A}^2(y)-j^2\mathfrak{B}(x)\mathfrak{B}^2(y)-j\mathfrak{C}(x)\mathfrak{C}^2(y)+\mathfrak{A}(x)\mathfrak{B}(y)\mathfrak{C}(y)$$
$$+j^2\mathfrak{B}(x)\mathfrak{A}(y)\mathfrak{C}(y)-j\mathfrak{C}(x)\mathfrak{A}(y)\mathfrak{B}(y),$$

$$\mathfrak{B}(x+yj)=\mathfrak{B}(x)\mathfrak{A}^2(y)-j^2\mathfrak{C}(x)\mathfrak{B}^2(y)+j\mathfrak{A}(x)\mathfrak{C}^2(y)+\mathfrak{B}(x)\mathfrak{B}(y)\mathfrak{C}(y)$$
$$+j^2\mathfrak{C}(x)\mathfrak{A}(y)\mathfrak{C}(y)+j\mathfrak{A}(x)\mathfrak{A}(y)\mathfrak{B}(y),$$

$$\mathfrak{C}(x+yj)=\mathfrak{C}(x)\mathfrak{A}^2(y)+j^2\mathfrak{A}(x)\mathfrak{B}^2(y)+j\mathfrak{B}(x)\mathfrak{C}^2(y)+\mathfrak{C}(x)\mathfrak{B}(y)\mathfrak{C}(y)$$
$$-j^2\mathfrak{A}(x)\mathfrak{A}(y)\mathfrak{C}(y)+j\mathfrak{B}(x)\mathfrak{A}(y)\mathfrak{B}(y),$$

$$\mathfrak{A}(x+yj^2)=\mathfrak{A}(x)\,\mathfrak{A}(y)+j\mathfrak{B}(x)\,\mathfrak{C}(y)-j^2\mathfrak{C}(x)\,\mathfrak{B}(y),$$
$$\mathfrak{B}(x+yj^2)=\mathfrak{B}(x)\,\mathfrak{A}(y)+j\mathfrak{C}(x)\,\mathfrak{C}(y)+j^2\mathfrak{A}(x)\,\mathfrak{B}(y),$$
$$\mathfrak{C}(x+yj^2)=\mathfrak{C}(x)\,\mathfrak{A}(y)-j\mathfrak{A}(x)\,\mathfrak{C}(y)+j^2\mathfrak{B}(x)\,\mathfrak{B}(y).$$

Das Verhalten unserer Functionen in Bezug auf die Differentiation und Integration wird durch folgende, leicht zu verificirende Fundamentalgleichungen bestimmt:

$$\frac{d\mathfrak{A}(x)}{dx}=-\mathfrak{C}(x),\quad \frac{d\mathfrak{B}(x)}{dx}=\mathfrak{A}(x),\quad \frac{d\mathfrak{C}(x)}{dx}=\mathfrak{B}(x);$$

$$\frac{d^2\mathfrak{A}(x)}{dx^2}=-\mathfrak{B}(x),\quad \frac{d^2\mathfrak{B}(x)}{dx^2}=-\mathfrak{C}(x),\quad \frac{d^2\mathfrak{C}(x)}{dx^2}=\mathfrak{A}(x);$$

$$\frac{d^3\mathfrak{A}(x)}{dx^3}=-\mathfrak{A}(x),\quad \frac{d^3\mathfrak{B}(x)}{dx^3}=-\mathfrak{B}(x),\quad \frac{d^3\mathfrak{C}(x)}{dx^3}=-\mathfrak{C}(x).$$

Daher genügen unsere Functionen der allgemeinen Differentialgleichung

$$\frac{d^3y}{dx^3}+y=0.$$

Setzt man nun den Quotienten zweier Functionen gleich einer neuen Function, wie

$$\frac{\mathfrak{B}(x)}{\mathfrak{A}(x)}=\mathfrak{M}(x),\quad \frac{\mathfrak{C}(x)}{\mathfrak{A}(x)}=\mathfrak{N}(x),$$

so ist

$$\frac{d\mathfrak{M}(x)}{dx}=\frac{\mathfrak{A}^2(x)+\mathfrak{B}(x)\,\mathfrak{C}(x)}{\mathfrak{A}^2(x)}=1+\frac{\mathfrak{B}(x)\,\mathfrak{C}(x)}{\mathfrak{A}^2(x)}=\frac{\mathfrak{A}(-x)}{\mathfrak{A}^2(x)},$$

$$\frac{d\mathfrak{N}(x)}{dx}=\frac{\mathfrak{A}(x)\mathfrak{B}(x)+\mathfrak{C}^2(x)}{\mathfrak{A}^2(x)}=-\frac{\mathfrak{B}(-x)}{\mathfrak{A}^2(x)}.$$

Hieraus erhält man:

$$\int_0^x\frac{\mathfrak{A}(-x)}{\mathfrak{A}^2(x)}\,dx=\mathfrak{M}(x),\quad \int_0^x\frac{\mathfrak{B}(x)\,\mathfrak{C}(x)}{\mathfrak{A}^2(x)}\,dx=\mathfrak{M}(x)-x,$$

$$\int_0^x -\frac{\mathfrak{B}(-x)}{\mathfrak{A}^2(x)}\,dx=\mathfrak{N}(x),$$

und indem man für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die entsprechenden Reihen setzt:

$$\int_0^x\frac{1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\dots}{\left(1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^9}{9!}+\dots\right)^2}\,dx=\frac{\frac{x}{1}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}-\dots}{1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^9}{9!}-\dots}, \quad (11)$$

(12)

$$\int_0^x\frac{\left(\frac{x}{1}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}-\dots\right)\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}-\dots\right)}{\left(1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^9}{9!}+\dots\right)^2}\,dx=\frac{\frac{3x^4}{4!}-\frac{6x^7}{7!}+\frac{9x^{10}}{10!}-\dots}{1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^9}{9!}+\dots},$$

$$\int_0^x \frac{\frac{x}{1}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots}{\left(1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^9}{9!}+\cdots\right)^2}dx=\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots}{1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots}. \quad (13)$$

Wenn man ausgeht von den Gleichungen

$$\frac{d\frac{\mathfrak{A}(x)}{\mathfrak{B}(x)}}{dx}=-\frac{\mathfrak{A}(-x)}{\mathfrak{B}^2(x)},\quad \frac{d\frac{\mathfrak{A}(x)}{\mathfrak{C}(x)}}{dx}=-1-\frac{\mathfrak{A}(x)\mathfrak{B}(x)}{\mathfrak{C}^2(x)}=\frac{\mathfrak{B}(-x)}{\mathfrak{C}^2(x)},$$

$$\frac{d\frac{\mathfrak{B}(x)}{\mathfrak{C}(x)}}{dx}=-\frac{\mathfrak{C}(-x)}{\mathfrak{C}^2(x)},\quad \frac{d\frac{\mathfrak{C}(x)}{\mathfrak{B}(x)}}{dx}=1-\frac{\mathfrak{A}(x)\mathfrak{C}(x)}{\mathfrak{B}^2(x)}=\frac{\mathfrak{C}(-x)}{\mathfrak{B}^2(x)},$$

so erhält man die folgenden Integrale:

$$\int^x \frac{1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots}{\left(\frac{x}{1}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}-\cdots\right)^2}dx=-\frac{1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots}{\frac{x}{1}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots}+c, \quad (14)$$

$$\int^x \frac{\frac{x}{1}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots}{\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots\right)^2}dx=-\frac{1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots}{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots}+c, \quad (15)$$

$$\int^x \frac{\left(1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots\right)\left(\frac{x}{1}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}-\cdots\right)}{\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots\right)^2}dx$$

$$=-\frac{1+\frac{2x^3}{3!}-\frac{5x^6}{6!}+\frac{8x^9}{9!}-\cdots}{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots}+c, \quad (16)$$

$$\int^x \frac{\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots}{\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots\right)^2}dx=-\frac{\frac{x}{1}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}-\cdots}{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots}+c, \quad (17)$$

$$\int_0^x \frac{\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots}{\left(\frac{x}{1}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}-\cdots\right)^2}dx=\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots}{\frac{x}{1}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}-\cdots}, \quad (18)$$

$$\int_0^x \frac{\left(1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots\right)\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\right)}{\left(\frac{x}{1}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}-\ldots\right)^2}dx$$

$$=\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{4x^5}{5!}+\frac{7x^8}{8!}-\ldots}{\frac{x}{1}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}-\ldots}. \qquad (19)$$

Endlich würde man noch das Integral einer eigenthümlich gebildeten Function erhalten, wenn man aus der oben aufgestellten Gleichung für $\mathfrak{A}(x+x_0)$ $\mathfrak{B}(x)$ bestimmte, diesen Werth in (7) substituirte, und die dann sämmtliche Potenzen von $\mathfrak{C}(x)$ bis zur dritten incl. enthaltende Gleichung in Bezug auf $\mathfrak{C}(x)$ auflöste. Der so gefundene Werth von $\mathfrak{C}(x)$ würde zwei Kubikwurzeln aus irrationalen Functionen von $\mathfrak{A}(x)$ und $\mathfrak{A}(x+x_0)$ enthalten, und wenn man diesen Werth nach x integrirte, würde man wiederum $-\mathfrak{A}(x)$ erhalten.

Bezeichnet man die in $\mathfrak{A}(x+x_0)$ vorkommenden Zahlen so, dass

$$2{,}0417=\frac{1}{\alpha}, \quad 1{,}2214=\frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{also } \beta<1,$$

ferner folgende von x nur $\mathfrak{A}(x)$ und $\mathfrak{A}(x+x_0)$ enthaltende Ausdrücke

$$\alpha\mathfrak{A}(x)\mathfrak{A}(x+x_0)\,[1-\beta^3]+\beta[\beta\mathfrak{A}^2(x)-\alpha^2\mathfrak{A}^2(x+x_0)]$$
mit P,

$$\alpha\mathfrak{A}(x+x_0)\,[\alpha^2\mathfrak{A}^2(x+x_0)-3\beta\mathfrak{A}^2(x)]\,[1-\beta^3]+(\beta^3+1)^2\,[\mathfrak{A}^3(x)-1]$$
$$+6\alpha^2\beta^2\mathfrak{A}(x)\,\mathfrak{A}^2(x+x_0)$$
mit $2Q$,

so ist

$$\int_0^x \left(\sqrt[3]{-Q+\sqrt{Q^2+P^3}}+\sqrt[3]{-Q-\sqrt{Q^2+P^3}}\right)dx$$
$$=\alpha\beta^3[\mathfrak{B}(x+x_0)-\mathfrak{B}(x_0)]-\beta\mathfrak{B}(x)-(\beta^3+1)\,[\mathfrak{A}(x)-1].$$

Anmerkung des Herausgebers. Ich mache vorläufig aufmerksam auf eine im nächsten Hefte unter dem Titel: Entwickelung der vorzüglichsten Eigenschaften einiger mit den goniometrischen zunächst verwandten Functionen erscheinende ausführliche Abhandlung des Herrn Professor Knar in Gratz, und halte mich für verpflichtet, zu bemerken, dass diese und vorstehende Abhandlung gleichzeitig in meinen Händen gewesen sind. Zugleich verweise ich auf die Abhandlung des Herrn Hellwig im Archiv. Thl. XXI. S. 43. Nr. V.

XXXII.

Ueber die Flächen, deren Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte gleiche, aber entgegengesetzte Werthe haben.

Von

Herrn Dr. *O. E. Simon*,

ordentlichem Lehrer am Joachimsthalschen Gymnasium zu Berlin.

Es ist bekannt, dass der Nenner des Quotienten, welcher den Hauptkrümmungsradius einer Fläche ausdrückt, durch eine quadratische Gleichung aus den partiellen Differentialquotienten der einen Coordinate nach den beiden andern bestimmt wird. Setzt man in dieser Gleichung den Coefficienten der ersten Potenz des Nenners gleich Null, so werden die beiden Werthe des Nenners, also auch des Hauptkrümmungsradius, gleich, aber entgegengesetzt sein. Die Flächen, welche diese Eigenschaft haben, müssen also z als eine solche Function von x, y bestimmen, dass der partiellen Differentialgleichung genügt wird:

$$(1)\quad \left(\frac{\partial z^2}{\partial x^2}+1\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z^2}{\partial y^2}+1\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

Aus den Elementen der Variationsrechnung ergibt sich aber auch, dass diejenigen Flächen, welche dieser Gleichung genügen, die kleinste Oberfläche von allen denen haben, welche durch einen gegebenen Umfang gehen. Demnach werden sich beide genannte Eigenschaften bei den zu discutirenden Flächen finden.

Die Gleichung (1) lässt sich nach den bisher bekannten Methoden im Allgemeinen nicht so integriren, dass z eine reelle Function von x, y würde: man muss daher specielle Annahmen

machen, unter denen (1) integrabel wird. Die zunächst sich darbietende Annahme ist die:

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

woraus ersichtlich, dass die Ebene $z + c = ax + by$ der Gleichung (1) genügt. Sie hat offenbar den kleinsten Flächeninhalt von allen Flächen, die durch eine ebene Curve gehen, und man kann die unendlich langen Krümmungsradien stets in entgegengesetzter Lage denken.

Zu einer andern speciellen Annahme hat Catalan in einer Notiz (l'Institut. 4. Août 1855) Veranlassung gegeben; das dort mitgetheilte Resultat soll hier abgeleitet und discutirt werden.

Wird z so durch x, y ausgedrückt, dass diese Variabeln von einander getrennt sind, also durch die Gleichung

$$\text{(3)} \qquad z = X + Y,$$

wo X, Y Functionen nur von x respective y sind, so sind auch $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ nur Functionen von x resp. y, und der zweite Differentialquotient $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ verschwindet. Alsdann nimmt (1) die Form an:

$$\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\frac{\partial z^2}{\partial x^2} + 1} + \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\frac{\partial z^2}{\partial y^2} + 1} = 0.$$

Hiervon ist das nach x genommene Integral:

$$\operatorname{arctang}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \alpha x = 0,$$

wo α eine in Bezug auf x constante Grösse bezeichnet. Ebenso ist das nach y genommene Integral:

$$\operatorname{arctang}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \beta y = 0,$$

wo β nach der Differentialgleichung nothwendig gleich $-\alpha$ ist. Da also

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\operatorname{tang} \alpha x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tang} \alpha y$$

und

$$\int dz = z = \int \frac{\partial z}{\partial x} dx + \int \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

so folgt, dass

$$z = \frac{1}{\alpha} \log\cos \alpha x - \frac{1}{\alpha} \log\cos \alpha y,$$

und wenn man $\alpha = 1$ setzt:

$$z = \log \frac{\cos x}{\cos y}.$$

Zur Discussion dieser Gleichung diene Folgendes. Zieht man in der (xy)-Ebene durch den Anfangspunkt der Coordinaten zwei Linien $x = \pm y$, und mit diesen unzählig viele Parallelen, so dass je zwei Linien einer Schaar die Entfernung $\pi\sqrt{2}$ haben; theilt man ferner dieselbe Ebene in Quadrate, deren Seiten durch die Gleichungen

$$x = \pm \frac{2n+1}{2}\pi, \quad y = \pm \frac{2m+1}{2}\pi$$

gegeben sind (m, n beliebige ganze positive Zahlen incl. 0); so besteht die ganze Fläche aus unendlich vielen Wiederholungen eines einzigen Flächentheils, die sich im Raume über allen den Quadraten befinden, welche zwei von jenen parallelen Linien zu Diagonalen haben. Um diesen einen Flächentheil zu veranschaulichen, stelle man sich den Raum vor, welcher durch die vier Ebenen $x = \pm \frac{\pi}{2}$, $y = \pm \frac{\pi}{2}$ eingeschlossen ist. Denkt man sich in der (yz)-Ebene eine Curve verzeichnet:

$$z = -\log\cos y,$$

welche die y-Axe im Anfangspunkt tangirt, nach der Seite der positiven z in's Unendliche geht und die Linien $x = 0$, $y = \pm \frac{\pi}{2}$ zu Asymptoten hat; ebenso in der (xz)-Ebene eine Curve

$$z = \log\cos x,$$

welche die x-Axe im Anfangspunkt tangirt und nach der Seite der negativen z in's Unendliche geht, so dass $y = 0$, $x = \pm \frac{\pi}{2}$ ihre Asymptoten sind; bewegt man nun die letztere Curve parallel mit sich, so dass ihr Scheitelpunkt stets auf der ersten Curve sich befindet, — so entsteht jener gesuchte Flächentheil. Die

Geraden $x=\pm\frac{\pi}{2}$, $y=\pm\frac{\pi}{2}$ gehören zu demselben, sowie zu den angränzenden vier Theilen, welche man in derselben Weise erhält, wenn man in der vorhergehenden Construction den Durchschnittspunkt der Quadrat-Diagonalen für den Anfangspunkt setzt. Die (xy)-Ebene wird alsdann von der Fläche in jenen beiden Schaaren paralleler Linien geschnitten.

Von den Cylinder- und Kegelflächen genügt keine andere, als die schon aus (2) erhaltene Ebene den Bedingungen; dagegen findet man eine gerade Conoiden-Fläche auf folgende Weise. Die allgemeine Gleichung einer solchen Fläche ist

(4) $$z=\varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

wo φ eine noch unbekannte Function bedeutet, und setzt man

$$\frac{x}{y}=\lambda,$$

so erhält man als Bedingungsgleichung nach (1):

$$(x^2+y^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}+2xy\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=0,$$

welche übergeht in

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}+\frac{2\lambda}{\lambda^2+1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=0,$$

deren erstes Integral, wenn A eine willkürliche Constante,

$$\partial\varphi=A\frac{\partial\lambda}{\lambda^2+1},$$

so dass, wenn man z für φ und $\frac{x}{y}$ für λ setzt,

$$z=A\operatorname{arctang}\frac{x}{y},$$

d. h. die Gleichung der Schraubenfläche resultirt; und in der That sind deren Hauptkrümmungsradien $\pm\frac{x^2+y^2+A^2}{A}$.

Endlich wollen wir untersuchen, ob eine der Rotationsflächen, deren Gleichung ist:

(5) $$z=\varphi(x^2+y^2),$$

unserer Bedingungsgleichung (I) genügt; setzt man $x^2+y^2=\lambda$, so nimmt (1) die Form an:

$$\lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}+2\lambda\frac{\partial\varphi^3}{\partial\lambda^3}+\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=0.$$

Substituirt man $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ für $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$, so vereinfacht sich diese Differentialgleichung in die lineare:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}=4+2\frac{\psi}{\lambda},$$

welche vermittelst der Substitution $\psi=st$, $d\psi=sdt+tds$ integrirt wird. Man erhält dadurch als erstes Integral:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}}=\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\frac{1}{2\sqrt{a^2\lambda^2-\lambda}},$$

wo a^2 eine Constante bezeichnet. Daraus ergibt sich, unter der Annahme, dass φ oder z verschwindet, wenn λ oder $x^2+y^2=1:a^2$ ist:

$$e^{2az}=2a^2\lambda+2a\sqrt{a^2\lambda^2-\lambda}-1=(a\sqrt{\lambda}+\sqrt{a^2\lambda-1})^2$$

oder

$$\sqrt{\lambda}=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{e^{az}+e^{-az}}{2a},$$

d. h. die Gleichung der aus der Rotation einer Kettenlinie um die z-Axe entstandenen Fläche: ein Resultat, das auf anderem Wege schon in den Lehrbüchern der Differentialrechnung hergeleitet wird und dort Gegenstand einer hinreichenden Erörterung geworden ist.

XXXVIII.

Zur Lehre vom Dreieck.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lebensversicherungs - Calculator der k. k. p. Azienda Assicuratrice zu Triest.

Sind a, b, c die drei Seiten, ist Δ der Flächenraum des Dreieckes ABC (Taf. VII. Fig. 6.) und ϱ der Halbmesser des demselben eingeschriebenen Kreises, so besteht folgende, aus der Elementar-Geometrie bekannte Gleichung:

$$(1) \qquad \Delta = \tfrac{1}{2}(a+b+c).\varrho.$$

Eine ähnliche Relation findet statt zwischen den drei Seiten, dem Flächenraum eines Dreieckes und dem Radius eines äussern Berührungskreises desselben, und diese wollen wir zunächst bestimmen.

Ist O_1 der Mittelpunkt des dem Winkel A gegenüberliegenden äussern Berührungskreises, so ziehe man die Geraden O_1A, O_1B, O_1C und fälle auf die nöthigenfalls verlängerten Seiten BC, AB und AC die Senkrechten AF, AG und AH. Alsdann ist, wenn wir den Radius des äussern Berührungskreises mit ϱ_1 bezeichnen:

$$O_1F = O_1G = O_1H = \varrho_1$$

und

$$\text{ar}.ABC = \text{ar}.AHO_1G - \text{ar}.CHO_1GB.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}\text{ar}.AHO_1G &= \text{ar}.AGO_1 + \text{ar}.AHO_1 = \tfrac{1}{2}AG.O_1G + \tfrac{1}{2}AH.O_1H \\ &= \tfrac{1}{2}\varrho_1.(AG + AH) = \tfrac{1}{2}\varrho_1.(AB + BG + AC + CH)\end{aligned}$$

oder, weil $BG = BF$, $CH = CF$ und $BF + CF = BC = a$ ist,

$$\text{ar}.AHO_1G = \tfrac{1}{2}\varrho_1.(a+b+c).$$

Weil $\Delta BGO_1 \cong \Delta BFO_1$ und $\Delta CHO_1 \cong \Delta CFO_1$, so ist

$$\begin{aligned}\text{ar}.CHO_1GB &= 2.\text{ar}.O_1BG + 2.\text{ar}.O_1CH\\ &= BG.O_1G + CH.O_1H\\ &= BF.\varrho_1 + CF.\varrho_1\\ &= \varrho_1.(BF+CF) = \varrho_1.a,\end{aligned}$$

mithin

$$\text{ar}.ABC = \tfrac{1}{2}\varrho_1.(a+b+c) - \varrho_1.a = \tfrac{1}{2}\varrho_1.(b+c-a)$$

oder

$$(2) \qquad \Delta = \tfrac{1}{2}(b+c-a).\varrho_1.$$

Ebenso ist

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(a+c-b).\varrho_2,$$

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(a+b-c).\varrho_3,$$

wenn ϱ_2 und ϱ_3 die Radien der, den Winkeln B und C gegenüberliegenden äussern Berührungskreise sind. Wenn die Gleichungen (1), (2) und die beiden letzten mit einander multiplicirt werden, so wird man finden, weil

$$(3) \qquad \Delta^2 = \tfrac{1}{16}.(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

ist:

$$\Delta = \sqrt{\varrho.\varrho_1.\varrho_2.\varrho_3}.$$

Nach dem Obigen ist auch:

$$a+b+c = \frac{2\Delta}{\varrho},$$

$$b+c-a = \frac{2\Delta}{\varrho_1},$$

$$a+c-b = \frac{2\Delta}{\varrho_2},$$

$$a+b-c = \frac{2\Delta}{\varrho_3};$$

werden die drei letzten Gleichungen addirt, so erhält man:

$$a+b+c = 2\Delta.\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}\right) = \frac{2\Delta}{\varrho},$$

mithin

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}.$$

Setzt man die beiden Relationen (1) und (2) als bekannt voraus, so fällt es nicht schwer, die Entfernung des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises von jenem eines der Berührungskreise des Dreieckes durch die Radien ausgedrückt auf trigonometrischem Wege zu erhalten, ein Problem, welches Herr Rump in Thl. XXVII. des Archivs S. 33. auf eine neue, sehr sinnreiche Weise rein geometrisch gelöst hat.

Es sei O der Mittelpunkt des, dem Dreieck ABC umschriebenen und o jener des eingeschriebenen Kreises, alsdann ist die Verbindungslinie $OA=r$ der Radius des ersten und die auf AB von o aus gefällte Senkrechte $oE=\varrho$ der Radius des zweiten Kreises. Construirt man das Dreieck AOo, in welchem $Oo=d$ der gesuchte Abstand ist, so ist bekanntlich:

$$\overline{Oo}^2=\overline{AO}^2+\overline{Ao}^2-2.AO.Ao.\mathrm{Cos}\,\overline{oAO}.$$

Man sieht leicht aus der Figur, dass $\angle AOB=2C$, $\angle OAB=\angle OBA$; mithin ist $2.\angle OAB=2\mathrm{R}-2C$ oder $\angle OAB=\mathrm{R}-C$; ferner ist $\angle oAB=\frac{1}{2}A$, also

$$\angle oAO=\angle oAB-\angle OAB=\tfrac{1}{2}A-(\mathrm{R}-C)=\tfrac{1}{2}(A+2C)-\mathrm{R}$$
$$=\tfrac{1}{2}(A+C)+\tfrac{1}{2}C-\mathrm{R}=\tfrac{1}{2}(2\mathrm{R}-B)+\tfrac{1}{2}C-\mathrm{R}=\tfrac{1}{2}(C-B)$$

und

$$Ao=\frac{\varrho}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}A}.$$

Werden diese Werthe in obige Gleichung substituirt, so geht sie über in:

$$d^2=r^2+\frac{\varrho^2}{\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}A}-2r.\frac{\varrho}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}A}.\mathrm{Cos}\,\frac{B-C}{2}$$
$$=r^2-2\varrho.[r.\frac{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(B-C)}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}A}-\frac{\varrho}{2\,\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}A}],$$

$$d^2=r^2-2\varrho.R, \tag{4}$$

wenn man den in der Klammer enthaltenen Ausdruck kurz mit R bezeichnet. Zieht man CD senkrecht auf AB, so ist nach einem bekannten Lehrsatze der Elementar-Geometrie:

$$ab=2r.CD$$

oder

$$abc = 2r.\varrho.CD = 4r.\Delta,$$

mithin

$$(5) \qquad r = \frac{abc}{4\Delta};$$

ferner ist nach den Lehren der ebenen Trigonometrie:

$$\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A} = \frac{b+c}{a},$$

mithin wird

$$r.\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}A} = \frac{bc}{4\Delta}.(b+c).$$

Weil

$$\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}A = \frac{1}{4bc}.(a+c-b)(a+b-c),$$

so wird mit Rücksicht auf (1):

$$\frac{\varrho}{2\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}A} = \frac{(a+b+c).\varrho}{2(a+b+c).\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}A} = \frac{4bc.\Delta}{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)}$$

$$= \frac{4bc(b+c-a).\Delta}{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)},$$

oder nach (3):

$$\frac{\varrho}{2\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}A} = \frac{4bc(b+c-a).\Delta}{16\Delta^2} = \frac{bc}{4\Delta}.(b+c-a).$$

Hiernach wird also

$$R = \frac{bc}{4\Delta}.(b+c) - \frac{bc}{4\Delta}.(b+c-a) = \frac{abc}{4\Delta} = r, \quad \text{[nach (5)]}$$

und die Gleichung (4) geht über in:

$$(6) \qquad d^2 = r^2 - 2r.\varrho.$$

Um die ähnliche Relation für die Distanz des Punktes O von dem Mittelpunkte O_1 eines äussern Berührungskreises abzuleiten, ziehen wir $OO_1 = d_1$ und haben für das Dreieck OBO_1 die Gleichung

$$\overline{OO_1}^2 = d_1^2 = r^2 + \overline{O_1B}^2 - 2r.O_1B.\operatorname{Cos}\overline{OBO_1}.$$

Es ist leicht ersichtlich, dass $\angle BO_1G = \frac{1}{2}B$, also ist

$$O_1B = \frac{\varrho_1}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}B};$$

$$\angle OBO_1 = \angle OBC + \angle CBO_1;$$

$$\angle OBC = B - \angle ABO = B - \angle OAB = B - (\mathrm{R} - C)$$
$$= B + C - \mathrm{R} = \mathrm{R} - A;$$

$$\angle CBO_1 = \mathrm{R} - \tfrac{1}{2}B;$$

mithin wird

$$\angle OBO_1 = 2\mathrm{R} - (A + \tfrac{1}{2}B) = A + B + C - (A + \tfrac{1}{2}B)$$
$$= \tfrac{1}{2}B + C = \tfrac{1}{2}(B + 2C) = \tfrac{1}{2}(2\mathrm{R} - A + C) = \mathrm{R} - \tfrac{1}{2}(A - C).$$

Obige Gleichung verwandelt sich nunmehr in folgende:

$$d_1^2 = r^2 + \frac{\varrho_1^2}{\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}B} - 2r \cdot \frac{\varrho_1}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}B} \cdot \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(A - C)$$

$$= r^2 + 2\varrho_1 \cdot \left[\frac{\varrho_1}{2\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}B} - r \cdot \frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(A - C)}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}B}\right].$$

$$d_1^2 = r^2 + 2\varrho_1 \cdot R_1, \tag{7}$$

wenn wir den in der Klammer enthaltenen Ausdruck der Kürze halber mit R_1 bezeichnen.

Weil

$$\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}B = \frac{1}{4ac} \cdot (a + b + c)(a + c - b),$$

so erhält man mit Rücksicht auf (2):

$$\frac{\varrho_1^2}{2\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}B} = \frac{\frac{1}{2}(b + c - a) \cdot \varrho_1}{(b + c - a) . \mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}B} = \frac{\varDelta}{\frac{1}{4ac} . (a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)}$$

$$= \frac{4ac(a + b - c) . \varDelta}{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)},$$

mithin nach (3):

$$\frac{\varrho_1}{2\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}B} = \frac{4ac . (a + b - c) . \varDelta}{16\varDelta^2} = \frac{ac}{4\varDelta} \cdot (a + b - c).$$

Ferner ist aus der ebenen Trigonometrie bekannt, dass

$$\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(A - C)}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}B} = \frac{a - c}{b}, \text{ also, da } r = \frac{abc}{4\varDelta}:$$

$$r \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(A - C)}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}B} = \frac{ac}{4\varDelta} \cdot (a - c);$$

werden diese Werthe in dem mit R_1 bezeichneten Ausdruck substituirt, so erhält man:

$$R_1 = \frac{ac}{4\Delta}\cdot(a+b-c) - \frac{ac}{4\Delta}\cdot(a-c) = \frac{abc}{4\Delta} = r$$

und die Gleichung (7) geht über in

$$(8) \qquad d_1^2 = r^2 + 2r\cdot\varrho_1.$$

XXXIV.

Ein neuer Lehrsatz der Geometrie und dessen Anwendung bei der Transversalenlehre.

Von

Herrn Professor *F. H. Rump*
am Gymnasium zu Cösfeld.

---

§. 1. **Lehrsatz.** Zieht man bei einem Dreiecke ABC (Taf. VII. Fig. 1.) von einem Eckpunkte A aus eine Transversale, die entweder die gegenüberliegende Seite selbst (Taf. VII. Fig. 1.a.), oder deren Verlängerung (Taf. VII. Fig. 1.b.) in einem Punkte D trifft, und beschreibt über diese Transversale als Sehne zwei Kreise (O) und (P), von denen der eine durch den zweiten Eckpunkt B, der andere durch den dritten Eckpunkt C des Dreiecks ABC geht: so verhalten sich die Seiten AB und AC wie die Radien dieser Kreise, d. h. $AB:AC = OA:PA$.

Beweis. Zieht man die Centrale OP, so halbirt diese die gemeinschaftliche Sehne AD, und folglich ist in Taf. VII. Fig. 1.a. $AOP = ABC$ und $APO = ACB$, mithin $\Delta ABC \sim \Delta AOP$ und folglich $AB:AC = AO:AP$. — In Taf. VII. Fig. 1. b. ist aber $AOE = ABD$, also auch $AOP = ABC$; und da ferner $APO = ACB$, so ist wiederum $\Delta ABC \sim \Delta AOP$, und folglich $AB:AC = AO:AP$.

Anmerkung. Der Kürze wegen und um die Figuren einfacher zu erhalten, soll in der Folge der Radius des durch drei bestimmte Punkte z. B. A, B, C gelegten Kreises durch $R(ABC)$ bezeichnet werden.

§. 2. Zusatz. Legt man zwischen die Schenkel eines Winkels ABC (Taf. VII. Fig. 2.) zwei gerade, von den Schenkeln des Winkels begränzte Linien DE und FG, so verhalten sich diese wie die Radien der um $\Delta\, DEB$ und $\Delta\, FGB$ gelegten Kreise. Denn zieht man DG, so ist

$$\left.\begin{array}{l} DE:DG = R(DEB):R(DGB) \\ DG:FG = R(DGB):R(FGB) \end{array}\right\} (\S.\ 1.);$$

und folglich

$$DE:FG = R(DEB):R(FGB).$$

§. 3. Zusatz. Legt man zwischen die Schenkel zweier Scheitelwinkel ABC und KBL (Taf. VII. Fig. 2.) zwei gerade Linien DE und HI, so verhalten sich diese Linien wie die Radien der um $\Delta\, DEB$ und $\Delta\, HIB$ gelegten Kreise. Denn zieht man DH, so ist

$$DE:DH = R(DEB):R(DHB),$$

$$DH:HG = R(DHB):R(HIB);$$

folglich auch

$$DE:HG = R(DEB):R(HIB).$$

§. 4. Zusatz. Zieht man zwischen die Schenkel zweier Nebenwinkel ABC und ABK (Taf. VII. Fig. 2.) zwei gerade Linien FG und DH, so verhalten sich diese wie die Radien der um ΔFGB und $\Delta\, DHB$ gelegten Kreise. Denn zieht man DG, so ergiebt sich wie vorher:

$$FG:DH = R(FGB):R(DHB).$$

§. 5. Zusatz. Zieht man aus einem Punkte O (Taf. VII. Fig. 3.) vier, eine gerade Linie in den Punkten A, B, C, D durchschneidende, gerade Linien, so verhalten sich die Producte je zweier dieser Linien wie die Radien der um die zusammengehörenden Linien beschriebenen Kreise, d. h.

$$\text{I.}\quad OA \times OB : OD \times OC = R(OAB):R(ODC),$$

$$\text{II.}\quad OA \times OC : OD \times OB = R(OAC):R(ODB),$$

$$\text{III.}\quad OA \times OD : OB \times OC = R(OAD):R(OBC).$$

Denn es ist für die unter I. aufgestellte Proportion:

$$\left.\begin{array}{l} OA:OD = R(OAB):R(ODB) \\ OB:OC = R(ODB):R(ODC) \end{array}\right\} (\S.\ 1.);$$

folglich auch

$$OA \times OB : OD \times OC = R(OAB) : R(ODC).$$

In gleicher Weise ergiebt sich die Richtigkeit der unter II. und III. aufgestellten Proportionen.

Anmerkung. Vermittelst des obigen Lehrsatzes sollen zunächst (§. 6. — § 12.) einige sich leicht ergebende Eigenschaften des Dreiecks unter der Form von Zusätzen nachgewiesen werden.

§. 6. Zusatz. Theilt in einem Dreiecke ABC (Taf. VII. Fig. 4.) die Transversale AD den Winkel BAC in zwei gleiche Theile, so verhält sich $AB:AC = BD:CD$. Denn sind O und P die Mittelpunkte der um $\triangle ABD$ und $\triangle ACD$ gelegten Kreise, so ist, wenn man die Radien OB, OD und PD, PC zieht, der Winkel $BOD = 2BAD = 2DAC = DPC$. Folglich sind auch die beiden gleichschenkligen Dreiecke BOD und DPC ähnlich. Nun ist

$$AB:AC = OB:PD \text{ (§. 1.) } = BD:DC.$$

§. 7. Zusatz. Umgekehrt, schneidet die Transversale AD (Taf. VII. Fig. 4.) die Seite BC des Dreieckes ABC so, dass sich $AB:AC = BD:DC$ verhält, so ist auch $BAD = DAC$. Denn sind O und P die Mittelpunkte der um $\triangle ABD$ und $\triangle ACD$ gelegten Kreise, so ist $AB:AC = OD:PC$ (§. 1.); und folglich auch $BD:DC = OD:PC = OB:PD$. Da nun hiernach $\triangle OBD \sim \triangle PDC$, so ist auch der Winkel $BOD = DPC$. Also sind auch die diesen Centriwinkeln zugehörigen Peripheriewinkel BAD und DAC gleich.

§. 8. Zusatz. Es theile die Transversale AD (Taf. VIII. Fig. 5.) den Aussenwinkel FAB des Dreiecks ABC in zwei gleiche Theile. Sind nun O und P die Mittelpunkte der um $\triangle ABD$ und $\triangle ACD$ gelegten Kreise, so ist, wenn man die Radien OB, OD und PC, PA, PD zieht, der Winkel $BOD = 2BAD = 2DAF = 2ADC + 2ACD = CPA + APD = CPD$. Folglich ist auch $\triangle BOD \sim \triangle CPD$. Nun ist

$$AB:AC = OB:PC = BD:CD.$$

§. 9. Zusatz. Umgekehrt, schneidet bei einem Dreiecke ABC (Taf. VIII. Fig. 5.) die Transversale AD die Verlängerung der Seite BC so, dass sich $AB:AC = DB:DC$ verhält, so theilt die Transversale AD den Aussenwinkel FAB in zwei gleiche Theile. Denn sind O und P die Mittelpunkte der um $\triangle ABD$

und $\triangle ACD$ gelegten Kreise, so verhält sich auch $AB:AC = OB:PC = OD:PD = BD:CD$; folglich ist $\triangle BOD \backsim \triangle CPD$ und daher auch der Winkel $BOD = CPD$. Nun ist aber $BOD = 2BAD$ und $CPD = 2CDA + 2DCA = 2FAD$; also $BAD = FAD$.

§. 10. Zusatz. Es theile die Transversale AD (Taf. VIII. Fig. 6.) die Seite BC des Dreiecks ABC in zwei gleiche Theile. Sind nun O und P die Mittelpunkte der um $\triangle ABD$ und $\triangle ACD$ gelegten Kreise, so ist auch, wenn man $OG \perp BD$ und $PH \perp CD$ fället, $GD = HC$. Nun verhält sich

$$AB:AC = OD:PC = \frac{OD}{GD} : \frac{PC}{HC} = \frac{HC}{PC} : \frac{GD}{OD}.$$

Fället man nun $DI \perp AC$ und $DK \perp AB$, so ist, da der Winkel $HPC = IAD$, auch $\triangle HPC \backsim \triangle IAD$ und ebenso $\triangle GOD \backsim KAD$. Also ist auch

$$\frac{HC}{PC} = \frac{DI}{AD} \quad \text{und} \quad \frac{GD}{OD} = \frac{DK}{AD}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die vorher gefundene Proportion, so erhält man nach Wegwerfung der beiden gleichen Nenner:

$$AB:AC = DI:DK\,^{*}).$$

§. 11. Zusatz. Umgekehrt, ist in einem Dreiecke ABC (Taf. VIII. Fig. 6.) die Transversale AD so gezogen, dass, wenn man aus D auf die Seiten AB und AC die Senkrechten DK und DI fället, sich die genannten Seiten wie umgekehrt diese Senkrechten verhalten: so ist auch die Seite BC im Punkte D in zwei gleiche Theile getheilt. Denn nachdem die nämliche Construction wie im §. 10. vollzogen ist, hat man zunächst $AB:AC = OD:PC$; und also gemäss der Voraussetzung:

$$OD:PC = DI:DK = \frac{DI}{AD} : \frac{DK}{AD} = \frac{AD}{DK} : \frac{AD}{DI} = \frac{OD}{GD} : \frac{PC}{HC};$$

und demzufolge ist $GD = HC$, also auch $BD = DC$.

§. 12. Zusatz. Es sei in dem Dreiecke ABC (Taf. VII. Fig. 4.) die Höhe AE gezogen. Nun ist zunächst

$$AB:AC = R(ABC):R(AEC).$$

Da nun AEC ein rechter Winkel ist, so liegt der Mittelpunkt

---

*) oder trigonometrisch: $AB:AC = \sin DAC : \sin DAB$.

des um $\triangle AEC$ beschriebenen Kreises in AC, und folglich ist $R(AEC) = \frac{1}{2}AC$, und demnach

$$AB : AE = R(ABC) : \tfrac{1}{2}AC,$$

also auch

$$\tfrac{1}{2}AB \times AC = AE \times R(ABC),$$

d. h. das halbe Rechteck aus zwei Seiten eines Dreiecks ist dem Rechtecke gleich, welches aus der auf die dritte Dreiecksseite gefällten Höhe und dem Radius des dem Dreiecke umschriebenen Kreises construirt wird.

§. 13. Lehrsatz. Zieht man bei einem Dreiecke ABC (Taf. VIII. Fig. 7.) aus einem Eckpunkte A zu der gegenüberliegenden Seite (Taf. VIII. Fig. 7.a.), oder zu der Verlängerung derselben (Taf. VIII. Fig. 7.b.) zwei Transversalen AD und AE so, dass diese mit den Seiten AB und AC gleiche Winkel bilden: so finden folgende Proportionen Statt:

$$\text{I.} \quad AB \times AD : AC \times AE = BD : CE,$$

$$\text{II.} \quad AB \times AE : AC \times AD = BE : CD,$$

$$\text{III.} \quad AB^2 : AC^2 = BD \times BE : CD \times CE,$$

$$\text{IV.} \quad AD^2 : AE^2 = DB \times DC : EB \times EC.$$

Beweis. I. Zieht man aus O und P, den Mittelpunkten der um $\triangle ABD$ und $\triangle ACE$ gelegten Kreise, die Radien OB, OD, sowie PC, PE: so ist zuvörderst $BOD = 2BAD = 2CAE = CPE$, und folglich $\triangle BOD \sim \triangle CPE$. Nun verhält sich

$$AB \times AD : AC \times AE = OB : PC \ (\S.\ 5.),$$
$$= BD : CE.$$

II. Da nach der Annahme $BAD = CAE$, so ist auch $BAE = CAD$, und demnach ergiebt sich ganz wie bei I., wenn man die um $\triangle ABE$ und $\triangle ACD$ gelegten Kreise benutzt, dass

$$AB \times AE : AC \times AD = BE : CD.$$

III. Durch Zusammensetzung der unter I. und II. enthaltenen Proportionen findet man

$$AB^2 : AC^2 = BD \times BE : CD \times CE.$$

IV. Kehrt man in der unter II. aufgestellten Proportion die Verhältnisse um, so ergiebt sich durch Zusammensetzung mit I.

$$AD^2 : AE^2 = DB \times DC : EB \times EC.$$

§. 14. **Zusatz.** Denkt man sich die beiden gleichen Winkel BAD und CAE (Taf. VIII. Fig. 7.a.) bis dahin vergrössert, dass AD mit AE zusammenfällt, so geht die im §. 13. unter I. aufgestellte Proportion in die im §. 6. gefundene über. Es enthält also der im §. 6. aufgestellte Satz nur einen besondern Fall unsers Lehrsatzes. — Unter derselben Bedingung geht auch die im §. 13. unter III. aufgestellte Proportion in die des §. 6. über.

§. 15. **Zusatz.** Denkt man sich die beiden gleichen Winkel BAD und CAE (Taf. VIII. Fig. 7.b.) bis dahin vergrössert, dass AD und AE eine einzige gerade Linie bilden: so werden, wie man leicht sieht, durch diese Linien die beiden an A liegenden Aussenwinkel des Dreiecks ABC halbirt, und wenn das Dreieck nicht als gleichschenklig, sondern etwa $AB < AC$ angenommen wird, so fällt der Punkt E nach der andern Seite des Dreiecks hin mit D zusammen. Unter dieser Voraussetzung aber gehen die im §. 13. unter I. und III. aufgestellten Proportionen in die Proportion des §. 8. über. Folglich enthält der in §. 8. gefundene Satz nur einen speziellen Fall des im §. 13. aufgestellten Lehrsatzes.

§. 16. **Lehrsatz.** Sind bei einem Dreiecke ABC (Taf. VIII. Fig. 7. a. b.) zwei Transversalen AD und AE so gezogen, dass eine der folgenden Proportionen, nämlich:

$$\text{I.} \quad AB \times AD : AC \times AE = BD : CE,$$

$$\text{II.} \quad AB \times AE : AC \times AD = BE : CD,$$

$$\text{III.} \quad AB^2 : AC^2 = BD \times BE : CD \times CE,$$

$$\text{IV.} \quad AD^2 : AE^2 = DB \times DC : EB \times EC$$

Statt findet: so bilden die genannten Transversalen mit den Dreiecksseiten AB und AC gleiche Winkel.

Beweis. I. Es seien O und P die Mittelpunkte der um $\triangle ABD$ und $\triangle ACE$ gelegten Kreise. Da nun

$$AB \times AD : AC \times AE = BD : CE \text{ (Anm.)},$$

und

$$AB \times AD : AC \times AE = OB : PC \text{ (§. 5.)},$$

so ist auch

$$BD:CE = OB:PC = OD:PE.$$

Folglich ist $\triangle OBD \sim \triangle PCE$, und mithin der Winkel $BOD = CPE$. Weil aber $BOD = 2BAD$ und $CPE = 2CAE$, so ist auch $BAD = CAE$.

II. Entsprechend wie bei I. ergiebt sich, dass $BAE = CAD$, und folglich auch $BAD = CAE$ ist.

III. Gesetzt es sei nicht $BAD = CAE$, sondern $BAX = CAE$, so wäre auch

$$AB^2:AC^2 = BX \times BE : CX \times CE \text{ (§. 13.)};$$

da nun nach der Annahme

$$AB^2:AC^2 = BD \times BE : CD \times CE,$$

so wäre auch

$$BX:CX = BD:CD,$$

also auch bei Taf. VIII. Fig. 7.a.

$$(BX + CX):(BD + CD) = BX:BD,$$

d. h.

$$BC:BC = BX:BD;$$

und bei Taf. VIII. Fig. 7.b.

$$(CX - BX):(CD - BD) = BX:BD,$$

d. h.

$$BC:BC = BX:BD,$$

welches in beiden Fällen nur Statt finden kann, wenn der Punkt X in D liegt. Also ist $BAD = CAE$.

IV. Nimmt man $\triangle ADE$ als das ursprüngliche Dreieck, aber AB und AC als die Transversalen an, so ist der Beweis schon unter III. geliefert.

§. 17. Zusatz. Die im §. 7. und §. 9. enthaltenen Sätze sind nur besondere Fälle des vorstehenden Lehrsatzes.

§. 18. Lehrsatz. Zieht man bei einem Dreiecke ABC (Taf. VIII. Fig. 8.) aus dem Scheitel A zu der gegenüberliegenden Seite (Taf. VIII. Fig. 8.a.) oder zu deren Verlängerung (Taf. VIII. Fig. 8.b.) zwei Transversalen AD und AE, welche von dieser Seite selbst oder von deren Verlängerung zwei gleiche Stücke $BD = CE$

abschneiden, und fället man dann aus den Fusspunkten dieser Transversalen auf die beiden andern Dreiecksseiten die Senkrechten DH und EK, so wie EI und DL: so finden folgende Proportionen Statt:

$$\text{I.}\quad AB:AC = EI:DH,$$

$$\text{II.}\quad AB:AC = DL:EK,$$

$$\text{III.}\quad AB^2:AC^2 = EI\times DL:DH\times EK.$$

Beweis. I. Sind O und P die Mittelpunkte der um $\triangle ABD$ und $\triangle ACE$ gelegten Kreise, so ist, wenn man $OF \perp BD$ und $PG \perp EC$ fället, in Folge der Annahme $FB = CG$; und ferner ist, da der Winkel $FOB = HAD$ und $GPC = IAE$, auch $\triangle FOB \sim \triangle HAD$ und $\triangle GPC \sim \triangle IAE$. Nun ist

$$AB\times AD:AC\times AE = OB:PC \quad (§. 5.)$$

$$= \frac{OB}{BF}:\frac{PC}{CG}, \quad \text{(weil } BF = CG\text{;)}$$

$$= \frac{AD}{DH}:\frac{AE}{EI}, \quad \text{(wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke;)}$$

also ist auch

$$AB:AC = \frac{1}{DH}:\frac{1}{EI} = EI:DH.$$

II. Da in Folge der Annahme auch $BE = CD$ sein muss, so ergiebt sich ein dem Vorhergehenden ganz entsprechender Beweis.

III. Durch Zusammensetzung der unter I. und II. aufgestellten Proportionen ergiebt sich unmittelbar:

$$AB^2:AC^2 = EI\times DL:DH\times EK.$$

Anmerkung. Der vorstehende Lehrsatz lässt sich einfacher in folgender Art beweisen. Da $BD = CE$, so ist auch $\triangle ABD = \triangle ACE$, und folglich $AB\times DH = AC\times EI$, und demnach $AB:AC = EI:DH$; und da ebenso $\triangle ABE = \triangle ACD$, so ist auch $AB:AC = DL:EK$, u. s. w. — In dem oben gelieferten Beweise war es aber darum zu thun, die Anwendbarkeit des im §. 1. aufgestellten Lehrsatzes nachzuweisen.

§. 19. **Zusatz.** Der im §. 10. nachgewiesene Satz enthält nur einen besondern Fall des vorstehenden Lehrsatzes.

§. 20. **Lehrsatz.** Umgekehrt, liegen in der Seite BC des

Dreiecks ABC (Taf. VIII. Fig. 8. a.) oder in deren Verlängerung (Taf. VIII. Fig. 8. b.) die beiden Punkte D und E so, dass, wenn DH und EK senkrecht auf AB, desgleichen EI und DL senkrecht auf AC gefällt werden, eine der folgenden Porportionen:

$$\text{I.}\quad AB:AC = EI:DH,$$

$$\text{II.}\quad AB:AC = DL:EK,$$

$$\text{III.}\quad AB^2:AC^2 = EI \times DL:DH \times EK$$

Statt findet: so liegen die Punkte D und E von den Eckpunkten B und C gleich weit entfernt, d. h. es ist $DB = EC$.

Beweis. I. Sind O und P die Mittelpunkte der um $\triangle ABD$ und $\triangle ACE$ beschriebenen Kreise, so ist, wenn man $OF \perp BD$ und $PG \perp CE$ fället, $\triangle OBF \sim \triangle ADH$ und $\triangle PCG \sim \triangle AEI$; also auch

$$OB:BF = AD:DH, \text{ und mithin } OB \times DH = AD \times BF;$$

ebenso

$$PC:CG = AE:EI, \quad \text{„} \quad \text{„} \quad PC \times EI = AE \times CG.$$

Ferner ist

$$AB \times AD:AC \times AE = OB:PC \text{ (§. 5.)}$$

und

$$AC:AB = DH:EI \text{ (Anm.)}$$

also auch, indem man beide Proportionen zusammensetzt und im ersten und zweiten Gliede aufhebt,

$$AD:AE = OB \times DH:PC \times EI$$

$$= AD \times BF:AE \times CG.$$

Hebt man nun im ersten und dritten, desgleichen im zweiten und vierten Gliede gegen einander auf, so ergiebt sich $BF = CG$ und folglich ist auch $BD = CE$.

II. Hier ergiebt sich der Beweis, wie bei I.

III. Gesetzt es sei nicht $DB = EC$, sondern $MB = EC$; dann wäre auch, wenn man $MQ \perp AB$ und $MR \perp AC$ zieht,

$$AB^2:AC^2 = EI \times MR:MQ \times EK \text{ (§. 18.)};$$

und da nach der Annahme

$$AB^2:AC^2 = EI \times DL:DH \times EK,$$

so wäre auch

$$MR:DL=MQ:DH,$$

also ein steigendes Verhältniss einem fallenden gleich, was nicht sein kann.

§. 21. Zusatz. Der im §. 11. enthaltene Satz ist nur ein besonderer Fall des vorhergehenden.

§. 22. Lehrsatz. Zieht man bei einem Dreiecke ABC (Taf. VIII. Fig. 9. a. b. c.) aus den Eckpunkten A und C zwei Transversalen, welche sich in einem Punkte O durchschneiden, so verhält sich

$$AO\times BE:DO\times AE=BC:DC.$$

Beweis. Es ist

$$AO:AE=R(AOC):R(AEC) \quad (§. 1.),$$

$$BE:DO=R(BEC):R(DOC) \quad (§. 2. \text{ oder } §. 3);$$

folglich auch

(I.) $AO\times BE:AE\times DO=R(AOC)\times R(BEC):R(AEC)\times R(DOC).$

Ferner verhält sich

$$\left.\begin{array}{l} AC:DC=R(AOC):R(DOC) \\ BC:AC=R(BEC):R(AEC) \end{array}\right\} (§. 1);$$

folglich

(II.) $BC:DC=R(AOC)\times R(BEC):R(DOC)\times R(AEC).$

Aus (I.) und (II.) ergiebt sich:

$$AO\times BE:DO\times AE=BC:DC.$$

§. 23. Zusatz. (Taf. VIII. Fig. 9.a.) (1.) Halbirt CE die Seite AB, so geht die obige Proportion über in

$$AO:DO=BC:DC.$$

(2.) Halbirt AD die Seite BC, so geht die ursprüngliche Proportion über in

$$AO\times BE:DO\times AE=2:1;$$

also ist

$$AO\times BE=2DO\times AE.$$

(3.) Sind beide Dreiecksseiten durch die Transversalen halbirt, so erhält man

$$AO = 2DO;$$

womit sich der bekannte Satz vom Schwerpunkte des Dreiecks herausstellt.

§. 24. Zusatz. Die im §. 23. unter (3.) nachgewiesene Eigenschaft des Dreiecks kann auch unmittelbar mit Hülfe von §. 1. bis §. 4. bewiesen werden. Ist nämlich (Taf. VIII. Fig. 9. a.) $AE = BE$ und $BD = CD$, so ist

$$AO : AE = R(AOC) : R(AEC),$$

$$BE : DO = R(BEC) : R(DOC);$$

folglich ist auch, indem sich BE gegen AE aufhebt,

(I.) $AO : DO = R(AOC) \times R(BEC) : R(AEC) \times R(DOC).$

Nun ist aber

$$R(AOC) : R(DOC) = AC : DC,$$

$$R(BEC) : R(AEC) = BC : AC;$$

folglich ist auch

(II.) $R(AOC) \times R(BEC) : R(AEC) \times R(DOC) = BC : DC = 2 : 1.$

Aus (I.) und (II.) folgt

$$AO : DO = 2 : 1; \text{ d. h. } AO = 2DO.$$

§. 25. Zusatz. Der im §. 22. aufgestellte Lehrsatz kann auch in folgender Weise ausgedrückt werden: Sind von zwei Punkten A und C (Taf. VIII. Fig. 9. a. b. c.) je zwei Linien AB, AD und CB, CE gezogen, die sich in den Punkten E, O, D, B durchschneiden, so theilen sich diese Linien so, dass sich verhält

$$\text{I.} \quad \frac{AO}{AE} : \frac{DO}{BE} = BC : DC;$$

und

$$\text{II.} \quad \frac{CO}{CD} : \frac{EO}{BD} = BA : EA.$$

§. 26. Zusatz. Durch Zusammensetzung der beiden im vorigen Zusatze enthaltenen Proportionen ergiebt sich nach einer einfachen Reduction und Umformung für das von den vier Linien AB, AD, CB, CE gebildete vollständige Vierseit die Proportion

$$AO \times CO : EO \times DO = BA \times BC : BE \times BD.$$

§. 27. Zusatz. Die im vorhergehenden Zusatze aufgefundene Eigenschaft des vollständigen Vierseits kann auch unabhängig von dem Früheren blos mit Hülfe von §. 1. bis §. 4. nachgewiesen werden. Zieht man nämlich BO (Taf. VIII. Fig. 9. a. b. c.), so ist

$$AO : EO = R(AOB) : R(EOB),$$
$$CA : DO = R(COB) : R(DOB);$$

folglich auch

(I.)

$$AO \times CO : EO \times DO = R(AOB) \times R(COB) : R(EOB) \times R(DOB).$$

Nun ist aber

$$R(AOB) : R(DOB) = BA : BD,$$
$$R(COB) : R(EOB) = BC : BE;$$

folglich ist auch

(II.)

$$R(AOB) \times R(COB) : R(EOB) \times R(DOB) = BA \times BC : BE \times BD.$$

Aus (I.) und (II.) ergiebt sich

$$AO \times CO : EO \times DO = BA \times BC : BE \times BD.$$

§. 28. Lehrsatz. Durchschneidet eine Linie FD (Taf. VIII. Fig. 14. a. b.) die drei Seiten eines Dreieckes ABC (oder deren Verlängerungen), so theilt sie dieselben so, dass das Product aus drei nicht an einander liegenden Abschnitten dem Producte der drei andern Abschnitte gleich ist.

Satz.

$$AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD.$$

Beweis. Es ist

$$\left.\begin{aligned} AF : CD &= R(AFE) : R(CDE), \\ BD : AE &= R(BDF) : R(AFE), \\ CE : BF &= R(CDE) : R(BDF); \end{aligned}\right\} \text{(§. 1—§. 4);}$$

folglich

$$AF \times BD \times CE : AE \times BF \times CD = 1 : 1;$$

d. h.

$$AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD.$$

§. 29. **Lehrsatz.** Zieht man aus den Eckpunkten eines Dreiecks ABC (Taf. VIII. Fig. 11. a. b. c.) durch einen innerhalb oder ausserhalb desselben liegenden Punkt O die drei Transversalen AD, BE, CF, so ist

$$AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD.$$

Beweis.

$$AF : CD = R(AOF) : R(COD),$$
$$BD : AE = R(BOD) : R(AOE),$$
$$CE : BF = R(COE) : R(BOF);$$

folglich ist auch

(I.) $$AF \times BD \times CE : AE \times BF \times CD$$
$$= R(AOF) \times R(BOD) \times R(COE) : R(AOE) \times R(BOF) \times R(COD).$$

Ferner ist

$$R(AOF) : R(BOF) = AO : BO,$$
$$R(BOD) : R(COD) = BO : CO,$$
$$R(COE) : R(AOE) = CO : AO;$$

folglich ist auch

(II.) $$\left.\begin{array}{l} R(AOF) \times R(BOD) \times R(COE) \\ : R(AOE) \times R(BOF) \times R(COD) \end{array}\right\} = 1 : 1.$$

Die Vergleichung von (I.) und (II.) liefert

$$AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD.$$

§. 30. **Lehrsatz.** Verbindet man die Fusspunkte D, E, F der drei Höhen eines Dreieckes ABC (Taf. IX. Fig. 12. a. b.) mit einander, so ist das Product aus diesen drei Verbindungslinien dem Producte aus drei nicht neben einander liegenden Seitenabschnitten gleich.

Satz.

$$EF \times FD \times DE = AF \times BD \times CE.$$

Beweis.

$$EF : AF = R(EFC) : R(AFC),$$
$$FD : BD = R(FDA) ; R(BDA),$$
$$DE : CE = R(DEB) : R(CEB).$$

Da nun BFC und BEC rechte Winkel sind, so liegen die Punkte B, F, E, C in der Peripherie eines Kreises, von welchem BC der Durchmesser ist. Folglich ist

$$R(EFC) = R(CEB) = \tfrac{1}{2}BC.$$

Ebenso ergiebt sich

$$R(FDA) = R(AFC) = \tfrac{1}{2}AC,$$

$$R(DEB) = R(BDA) = \tfrac{1}{2}AB.$$

Substituirt man diese Werthe in obige Proportionen und multiplicirt diese, so ergiebt sich, da die Producte der dritten und vierten Glieder gleich sind:

$$EF \times FD \times DE = AF \times BD \times CE.$$

§. 31. **Lehrsatz.** Zieht man aus den Eckpunkten eines Dreieckes ABC (Taf. VIII. Fig. 11. a. b. c.) durch einen innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks liegenden Punkt O Transversalen, welche die gegenüberliegenden Seiten oder deren Verlängerungen in den Punkten D, E, F treffen: so verhält sich das Product der oberen (d. h. an den Ecken liegenden) Stücke dieser Transversalen zu dem Producte der unteren Stücke, wie das Product der drei Seiten des Dreiecks zu dem Producte dreier Stücke derselben, die nicht an einander liegen.

Satz.

$$AO \times BO \times CO : DO \times EO \times FO = BC \times CA \times AB : AE \times BF \times CD.$$

Beweis.

$$AO : FO = R(AOB) : R(FOB),$$

$$BO : DO = R(BOC) : R(DOC),$$

$$CO : EO = R(COA) : R(EOA);$$

folglich verhält sich auch

$$(1) \qquad AO \times BO \times CO : DO \times EO \times FO$$

$$= R(AOB) \times R(BOC) \times R(COA) : R(DOC) \times R(EOA) \times R(FOB).$$

Nun ist aber

$$R(AOB) : R(EOA) = AB : AE,$$

$$R(BOC) : R(FOB) = BC : BF,$$

$$R(COA) : R(DOC) = CA : CD;$$

folglich auch

(II.)

$$R(AOB)\times R(BOC)\times R(COA):R(DOC)\times R(EOA)\times R(FOB)$$
$$=BC\times CA\times AB:AE\times BF\times CD.$$

Aus (I.) und (II.) ergiebt sich

$$AO\times BO\times CO:DO\times EO\times FO=BC\times CA\times AB:AE\times BF\times CD.$$

§. 32. Lehrsatz. Legt man durch vier von einem Punkte O (Taf. VII. Fig. 3.) ausgehende Strahlen beliebig zwei gerade Linien AD und ad, so bilden die Entfernungen der Durchschnittspunkte A und C von den Durchschnittspunkten B und D, und die Entfernungen der Durchschnittspunkte a und c von den Durchschnittspunkten b und d gleiche Doppelverhältnisse, d. h. es verhält sich

$$\frac{AB}{CB}:\frac{AD}{CD}=\frac{ab}{cb}:\frac{ad}{cd}.$$

Beweis.

$$\left.\begin{aligned}AB:ab&=R(AOB):R(aOb)\\ CB:cb&=R(COB):R(cOb)\end{aligned}\right\}\ (\S.\ 2.);$$

folglich verhält sich auch

$$\frac{AB}{CB}:\frac{ab}{cb}=\frac{R(AOB)}{R(COB)}:\frac{R(aOb)}{R(cOb)}.$$

Nun ist aber

$$\frac{R(AOB)}{R(COB)}=\frac{AO}{CO},\quad\text{und}\quad\frac{R(aOb)}{R(cOb)}=\frac{aO}{cO},\quad\S.\ 1.$$

folglich ist auch

$$\text{(I.)}\qquad\frac{AB}{CB}:\frac{ab}{cb}=\frac{AO}{CO}:\frac{aO}{cO}.$$

Ebenso ergiebt sich

$$\text{(II.)}\qquad\frac{AD}{CD}:\frac{ad}{cd}=\frac{AO}{CO}:\frac{aO}{cO};$$

und demnach ist, indem man zugleich die mittleren Glieder verwechselt,

$$\frac{AB}{CB}:\frac{AD}{CD}=\frac{ab}{cb}:\frac{ad}{cd}.$$

§. 33. Zusatz. Ist AC (Taf. VII. Fig. 3.) in den Punkten B und D harmonisch getheilt, d. h. verhält sich $AB:CB = AD:OD$, so wird auch die Linie ac in den Punkten b und d harmonisch getheilt.

§. 34. Zusatz. Die im §. 32. unter (I.) vorkommende Proportion enthält folgenden Satz:

Legt man durch drei von einem Punkte ausgehende Strahlen OA, OB, OC beliebig zwei gerade Linien AC und ac, so bilden die Entfernungen der Punkte A und C von den Punkten B und O, und die Entfernungen der Punkte a und c von den Punkten b und O gleiche Doppelverhältnisse, d. h. es verhält sich

$$\frac{AB}{CB}:\frac{AO}{CO}=\frac{ab}{cb}:\frac{aO}{cO}.$$

Einen entsprechenden Satz liefert die im §. 32. unter (II.) enthaltene Proportion.

§. 35. Lehrsatz. Es sei bei einem Dreiecke ABC (Taf. IX. Fig. 13.) der Radius des umschriebenen Kreises mit r, der des inneren Berührungskreises mit ϱ, und der Abstand der Mittelpunkte beider Kreise mit d, ferner seien die Radien der äussern Berührungskreise mit ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, und die Abstände ihrer Mittelpunkte vom Mittelpunkte des umschriebenen Kreises entsprechend mit d_1, d_2, d_3 bezeichnet; dann ist

$$\text{I.}\quad d^2 = r^2 - 2r\varrho;$$

$$\text{II.}\quad d_1^2 = r^2 + 2r\varrho_1;$$

u. s. w.

Beweis*) Verbindet man die Punkte E und E_1, wo die den Dreieckswinkel BAC und dessen Nebenwinkel H_2AC halbi-

---

*) Dieser Beweis stimmt mit dem von mir für eben denselben Lehrsatz im 27ten Theile des Archivs S. 35. u. flg. gelieferten in seiner Grundlage ganz überein; eine nähere Vergleichung wird aber zeigen, dass derselbe gerade durch Anwendung unseres Satzes (§. 1—§. 4.) wesentlich vereinfacht ist. — Indem ich in Betreff des zur Auffindung der Mittelpunkte der Berührungskreise benutzten Satzes auf S. 34. des genannten Theiles verweise, bitte ich zugleich zur Ergänzung der auf S. 33 daselbst enthaltenen literarischen Nachweise bemerken zu wollen, dass auch in C. Adams merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks S. 77. ebenfalls ein Beweis für den in Frage stehenden Lehrsatz geliefert ist.

renden Transversalen den umschriebenen Kreis durchschneiden, mit B, und macht $EO=EO_1=EB$, ferner $E_1O_2=E_1O_3=E_1B$; so sind O, O_1, O_2 und O_3 die Mittelpunkte der vier Berührungskreise. Fället man nun $OH \perp AB$ und legt durch O und M, den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, die FG, und führt bei den übrigen Mittelpunkten O_1, O_2, O_3 eine entsprechende Hülfsconstruction aus: so ist

$$\text{I.} \quad OH:EB=R(OHA):R(EBA) \quad (\S.2.),$$

d. h.

$$\varrho:EO=\tfrac{1}{2}AO:r=AO:2r;$$

folglich ist

$$2r\varrho=EO\times AO=GO\times FO=(r+d)\times(r-d)=r^2-d^2;$$

also auch

$$d^2=r^2-2r\varrho.$$

II. Es ist

$$O_1H_1:EB=R(O_1H_1A):R(EBA),$$

d. h.

$$\varrho_1:EO_1=\tfrac{1}{2}AO_1:r=AO_1:2r;$$

folglich

$$2r\varrho_1=EO_1\times AO_1=G_1O_1\times F_1O_1=(d_1+r)\times(d_1-r)=d_1^2-r^2;$$

also auch

$$d_1^2=r^2+2r\varrho_1.$$

III. Es ist

$$O_2H_2:E_1B=R(O_2H_2A):R(E_1BA) \quad (\S.4.),$$

d. h.

$$\varrho_2:E_1O_2=\tfrac{1}{2}AO_2:r=AO_2:2r;$$

folglich

$$2r\varrho_2=E_1O_2\times AO_2=G_2O_2\times F_2O_2=(d_2+r)\times(d_2-r)=d_2^2-r^2;$$

also auch

$$d_2^2=r^2+2r\varrho_2.$$

IV. Der Beweis ergiebt sich ganz wie bei III.

§. 36. Lehrsatz. Sind bei einem Dreiecke ABC (Taf. IX. Fig. 14.) O, O_1, O_2, O_3 die Mittelpunkte des innern und der äus-

sern Berührungskreise, so ist, wenn man die Radien dieser Kreise mit ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, den Radius des dem Dreiecke umschriebenen Kreises aber mit r bezeichnet:

$$\text{I.}\quad 4\varrho^2 r = OA \times OB \times OC;$$

$$\text{II.}\quad 4\varrho_1{}^2 r = O_1A \times O_1B \times O_1C; \text{ u. s. w.}$$

Beweis. Man bestimme auf dieselbe Weise, wie diess im §. 35. geschehen ist, für die vier Berührungskreise die Lage ihrer Mittelpunkte. Fället man dann $OF \perp AB$, $OD \perp BC$, ferner $O_1F_1 \perp AB$, $O_1D_1 \perp BC$, u. s. w., so ist

$$\text{I.}\quad OF : R(OFA) = GB : R(GBA),$$

d. h.

$$\varrho : \tfrac{1}{2}OA = GB : r. \qquad \text{(A.)}$$

Ferner ist

$$OD : R(ODB) = OC : R(OCB).$$

Da nun $GB = GO = GC$ ist, so ist auch $GB = R(OCB)$, und demnach geht die letzte Proportion über in

$$\varrho : \tfrac{1}{2}OB = OC : GB. \qquad \text{(B.)}$$

Durch Zusammensetzung der beiden Proportionen (A.) und (B.) erhält man

$$\varrho^2 : \tfrac{1}{4}OA \times OB = OC : r,$$

und demnach ist

$$4\varrho^2 r = OA \times OB \times OC.$$

II. In entsprechender Weise ergiebt sich

$$O_1F_1 : R(O_1F_1A) = GB : R(GBA), \quad \text{d. h.} \quad \varrho_1 : \tfrac{1}{2}O_1A = GB : r,$$

$$O_1D_1 : R(O_1D_1B) = O_1C : R(O_1CB), \quad \text{d. h.} \quad \varrho_1 : \tfrac{1}{2}O_1B = O_1C : GB.$$

Setzt man abermals beide Proportionen zusammen, so hat man

$$\varrho_1{}^2 : \tfrac{1}{4}O_1A \times O_1B = O_1C : r$$

und demnach

$$4\varrho_1{}^2 r = O_1A \times O_1B \times O_1C.$$

Für die Mittelpunkte der beiden übrigen Berührungskreise ergiebt sich der Satz in entsprechender Weise.

§. 37. **Lehrsatz.** Sind bei einem Dreiecke ABC (Taf. IX. Fig. 14.) O, O_1, O_2, O_3 die Mittelpunkte des innern und der äus-

sern Berührungskreise, so ist, wenn man die Radien dieser Kreise mit ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, den Radius des umschriebenen Kreises aber mit r bezeichnet,

$$\text{I.}\quad 16r^2\varrho = OO_1 \times OO_2 \times OO_3;$$

$$\text{II.}\quad 16r^2\varrho_1 = O_1O \times O_1O_2 \times O_1O_3;$$

$$\text{III.}\quad 16r^2\varrho_2 = O_2O \times O_2O_1 \times O_2O_3;$$

u. s. w.

Beweis. Gemäss des von mir im 27ten Theile des Archivs S. 34. bewiesenen, und auch schon hier im §. 35. und §. 36. angewendeten Satzes ist

$$GB = GO = GO_1, \quad \text{und} \quad G_1B = G_1O_2 = G_1O_3;$$

ebenso in entsprechender Weise

$$HC = HO = HO_2, \quad \text{und} \quad H_1C = H_1O_3 = H_1O_1;$$

und ferner desgleichen

$$IA = IO = IO_3, \quad \text{und} \quad I_1A = I_1O_1 = I_1O_2.$$

Fället man nun aus den Mittelpunkten der Berührungskreise auf die Seiten des Dreiecks ABC die Senkrechten OD, OE, OF, ferner O_1D_1, O_1E_1, O_1F_1, u. s. w., so ist

$$\text{I.}\quad OF:R(OFA) = GB:R(GBA), \text{ d. h. } \varrho:\tfrac{1}{2}OA = \tfrac{1}{2}OO_1:r,$$

$$OD:R(ODB) = HC:R(HCB), \text{ d. h. } \varrho:\tfrac{1}{2}OB = \tfrac{1}{2}OO_2:r,$$

$$OE:R(OEC) = IA:R(IAC), \text{ d. h. } \varrho:\tfrac{1}{2}OC = \tfrac{1}{2}OO_3:r.$$

Hiernach ergiebt sich durch Zusammensetzung

$$\varrho^3:\tfrac{1}{8}\times OA \times OB \times OC = \tfrac{1}{8}\times OO_1 \times OO_2 \times OO_3 : r^3;$$

und da gemäss §. 36. $OA \times OB \times OC = 4\varrho^2 r$, so ist auch

$$\varrho^3:\tfrac{1}{2}\varrho^2 r = \tfrac{1}{8}\times OO_1 \times OO_2 \times OO_3 : r^3,$$

worauf sich nach gehöriger Reduction herausstellt:

$$16r^2\varrho = OO_1 \times OO_2 \times OO_3,$$

$$\text{II.}\quad O_1F_1:R(O_1F_1A) = GB:R(GBA), \text{ d. h. } \varrho_1:\tfrac{1}{2}O_1A = \tfrac{1}{2}O_1O:r;$$

$$O_1D_1:R(O_1D_1B) = H_1C:R(H_1CB), \text{ d. h. } \varrho_1:\tfrac{1}{2}O_1B = \tfrac{1}{2}O_1O_3:r;$$

$$O_1E_1:R(O_1E_1C) = I_1A:R(I_1AC), \text{ d. h. } \varrho_1:\tfrac{1}{2}O_1C = \tfrac{1}{2}O_1O_2:r.$$

Folglich ist auch, indem man zugleich $O_1A \times O_1B \times O_1C = 4\varrho_1^2 r$ setzt (§. 36.),

$$\varrho_1^3 : \tfrac{1}{2}\varrho_1^2 r = \tfrac{1}{8} \times O_1O \times O_1O_2 \times O_1O_3 : r^3,$$

und demnach

$$16r^2\varrho_1 = O_1O \times O_1O_2 \times O_1O_3.$$

III. $O_2F_2 : R(O_2F_2A) = G_1B : R(G_1BA)$, d. h. $\varrho_2 : \tfrac{1}{2}O_2A = \tfrac{1}{2}O_2O_3 : r$;

$O_2D_2 : R(O_2D_2B) = HC : R(HCB)$, d. h. $\varrho_2 : \tfrac{1}{2}O_2B = \tfrac{1}{2}O_2O : r$;

$O_2E_2 : R(O_2E_2C) = I_1A : R(I_1AC)$, d. h. $\varrho_2 : \tfrac{1}{2}O_2C = \tfrac{1}{2}O_2O_1 : r$;

und so weiter, entsprechend wie bei I. oder II.

§. 38. **Lehrsatz.** Sind bei einem Dreiecke ABC (Taf. IX. Fig. 14.) O, O_1, O_2, O_3 die Mittelpunkte des innern und der äussern Berührungskreise, so ist, wenn man die Radien dieser Kreise mit ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, den Radius des umschriebenen Kreises aber mit r bezeichnet,

I.

(1.) $\varrho^3 : OA \times OB \times OC = OA \times OB \times OC : OO_1 \times OO_2 \times OO_3$;

(2.) $\varrho_1^3 : O_1A \times O_1B \times O_1C = O_1A \times O_1B \times O_1C : O_1O \times O_1O_2 \times O_1O_3$;

u. s. w.

II.

(1.) $$r^3 : \tfrac{1}{2}OO_1 \times \tfrac{1}{2}OO_2 \times \tfrac{1}{2}OO_3 = \tfrac{1}{2}OO_1 \times \tfrac{1}{2}OO_2 \times \tfrac{1}{2}OO_3 : OA \times OB \times OC;$$

(2.) $$r^3 : \tfrac{1}{2}O_1O \times \tfrac{1}{2}O_1O_2 \times \tfrac{1}{2}O_1O_3 = \tfrac{1}{2}O_1O \times \tfrac{1}{2}O_1O_2 \times \tfrac{1}{2}O_1O_3 : O_1A \times O_1B \times O_1C;$$

u. s. w.

III.

(1.) $(2\varrho)^3 : OA \times OB \times OC = OO_1 \times OO_2 \times OO_3 : (2r)^3$;

(2.) $(2\varrho_1)^3 : O_1A \times O_1B \times O_1C = O_1O \times O_1O_2 \times O_1O_3 : (2r)^3$;

u. s. w.

Beweis. Bestimmt man in derselben Weise, wie im §. 35., für die Berührungskreise die Lage ihrer Mittelpunkte, so ergiebt sich, dass, da GAG_1 ein rechter Winkel ist, G_1G Durchmesser des umschriebenen Kreises und senkrecht auf BC sein muss;

und diesemnach ist auch $G_1B = GC$. Auf gleiche Weise stellt sich heraus, das $H_1C = H_1A$ und $I_1A = I_1B$ ist. Fället man nun aus den Mittelpunkten der Berührungskreise auf die Seiten des Dreiecks ABC die Senkrechten OD, OE, OF, ferner O_1D_1, O_1E_1, O_1F_1, u. s. w., so ist

$$\text{I. (1.)}\quad OD:OC = R(ODB):R(OAB) = \tfrac{1}{2}OB:GB = OB:OO_1,$$

$$OE:OA = R(OEC):R(OAC) = \tfrac{1}{2}OC:HC = OC:OO_2,$$

$$OF:OB = R(OFA):R(OBA) = \tfrac{1}{2}OA:IA = OA:OO_3;$$

folglich ist auch, indem $OD = OE = OF = \varrho$ ist,

$$\varrho^3 : OA \times OB \times OC = OA \times OB \times OC = OO_1 \times OO_2 \times OO_3.$$

$$\text{(2.)}\quad O_1D_1:O_1C = R(O_1D_1B):R(O_1CB) = \tfrac{1}{2}O_1B:GB = O_1B:O_1O,$$

$$O_1E_1:O_1A = R(O_1E_1C):R(O_1AC) = \tfrac{1}{2}O_1C:H_1C = O_1C:O_1O_2,$$

$$O_1F_1:O_1B = R(O_1F_1A):R(O_1BA) = \tfrac{1}{2}O_1A:I_1A = O_1A:O_1O_3;$$

folglich ist auch

$$\varrho_1{}^3 : O_1A \times O_1B \times O_1C = O_1A \times O_1B \times O_1C : O_1O \times O_1O_2 \times O_1O_3.$$

$$\text{II. (1.)}\quad OA : \left\{ \begin{matrix} OI \\ IA \end{matrix} \right\} = R(OAC):R(IAC) = OH:r,$$

$$OB : \left\{ \begin{matrix} OG \\ GB \end{matrix} \right\} = R(OBA):R(GBA) = OI:r,$$

$$OC : \left\{ \begin{matrix} OH \\ HC \end{matrix} \right\} = R(OCB):R(HCB) = OG:r;$$

folglich ist auch

$$OA \times OB \times OC : OG \times OH \times OI = OG \times OH \times OI : r^3,$$

oder

$$r^3 : \tfrac{1}{2}OO_1 \times \tfrac{1}{2}OO_2 \times \tfrac{1}{2}OO_3 = \tfrac{1}{2}OO_1 \times \tfrac{1}{2}OO_2 \times \tfrac{1}{2}OO_3 : OA \times OB \times OC.$$

$$\text{(2.)}\quad O_1A : \left\{ \begin{matrix} O_1I_1 \\ I_1A_1 \end{matrix} \right\} = R(O_1AC):R(I_1AC) = O_1H_1:r,$$

$$O_1B : \left\{ \begin{matrix} O_1G \\ GB \end{matrix} \right\} = R(O_1BA):R(GBA) = O_1I_1:r,$$

$$O_1C : \left\{ \begin{matrix} O_1H_1 \\ H_1C \end{matrix} \right\} = R(O_1CB):R(H_1CB) = O_1G:r;$$

folglich ist auch

$$O_1A \times O_1B \times O_1C : O_1G \times O_1H_1 \times O_1I_1 = O_1G \times O_1H_1 \times O_1I_1 : r^3,$$

oder

$$r^3 : \tfrac{1}{2}O_1O \times \tfrac{1}{2}O_1O_2 \times \tfrac{1}{2}O_1O_3$$
$$= \tfrac{1}{2}O_1O \times \tfrac{1}{2}O_1O_2 \times \tfrac{1}{2}O_1O_3 : O_1A \times O_1B \times O_1C.$$

III. (1.) Aus den unter I. (1.) aufgeführten Proportionen ergiebt sich, wenn man die ersten und dritten Verhältnisse nimmt,

$$\varrho^3 : OA \times OB \times OC = \tfrac{1}{8} \times OA \times OB \times OC : GB \times HC \times IA,$$

oder, indem man das erste und dritte Glied mit 8 multiplicirt und $(2\varrho)^3$ statt $8\varrho^3$ setzt, und ferner beachtet, dass $GB = \frac{1}{2}OO_1$, $HC = \frac{1}{2}OO_2$, $IA = \frac{1}{2}OO_3$ ist,

$$(2\varrho)^3 : OA \times OB \times OC = OA \times OB \times OC : \tfrac{1}{2}OO_1 \times \tfrac{1}{2}OO_2 \times \tfrac{1}{2}OO_3.$$

Vergleicht man diese Proportion mit der unter II. (1.) gewonnenen, so erhält man nach einer leichten Umänderung

$$(2\varrho)^3 : OA \times OB \times OC = OO_1 \times OO_2 \times OO_3 : (2r)^3.$$

(2.) Hier ergiebt sich der Beweis ganz nach Analogie von III. (1.).

§. 39. Schlussbemerkung. Die vom §. 6. bis §. 38 aufgestellten Sätze werden hinreichen, um die mannigfaltige Anwendbarkeit des im §. 1. enthaltenen Satzes darzuthun; und nur dieses bezweckt die vorliegende Arbeit. Dieserhalb sind auch Sätze der verschiedensten Art zusammengestellt, ohne ihren innern Zusammenhang zu beachten und ohne darauf zu sehen, ob dieselben mehr oder minder bekannte Wahrheiten enthalten; nur die Art der Beweise durfte in Betracht kommen.

XXXV.

Eine Lösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade vermittelst desselben Princips.

Von

Herrn Dr. *B. Sommer*
in Coblenz.

I. Die cubische Gleichung.

Setzt man in der Gleichung

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

$x=x_1+\alpha$, so entsteht

$$x_1^3+a_1x_1^2+b_1x_1+c_1=0$$

und zwar ist $a_1=3\alpha+a$, $b_1=3\alpha^2+2a\alpha+b$, $c_1=\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c$.

Setzt man nun $x_1=\frac{x_2}{\lambda}$, so wird die Gleichung in x_2

$$x_2^3+a_2x_2^2+b_2x_2+c_2=0;$$

hier ist $a_2=a_1\lambda$, $b_2=b_1\lambda^2$, $c_2=c_1\lambda^3$.

Setzt man endlich $x_2=\frac{x_3+1}{x_3-1}$, also $x_3=\frac{x_2+1}{x_2-1}$, so wird

$$x_3^3+a_3x_3^2+b_3x_3+c_3=0,$$

und zwar ist nun

$$a_3=\frac{3+a_2-b_2-3c_2}{1+a_2+b_2+c_2},\quad b_3=\frac{3-a_2-b_2+3c_2}{1+a_2+b_2+c_2},$$
$$c_3=\frac{1-a_2+b_2-c_2}{1+a_2+b_2+c_2}.$$

Die letztere Gleichung in x_3 wird nun eine reine cubische Gleichung werden, wenn a_3 und b_3 verschwindet, d. h. wenn

$$3+a_2-b_2-3c_2=0,$$
$$3-a_2-b_2+3c_2=0$$

ist, d. h. wenn $b_2=3$ und $3c_2=a_2$ ist. Drücken wir nun a_2, b_2, c_2 in a, b, c aus, so wird successive

$$b_1\lambda^2=3 \quad \text{und} \quad 3c_1\lambda^2=a_1,$$

woher

$$\lambda^2=\pm\sqrt{\frac{3}{b_1}} \quad \text{und} \quad a_1b_1=9c_1;$$

die letztere Gleichung enthält kein λ mehr und gibt

$$(3\alpha+a)(3\alpha^2+2a\alpha+b)=9(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c),$$

oder reducirt

$$2(a^2-3b)\alpha=9c-ab.$$

Wir haben daher den Werth α so zu bestimmen, dass

$$\alpha=\frac{9c-ab}{2(a^2-3b)}$$

ist, und den Werth λ so zu wählen, dass

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{3}{b_1}}=\pm\sqrt{\frac{3}{3\alpha^2+2a\alpha+b}}$$
$$=\pm 2(a^2-3b)\sqrt{\frac{1}{3(27c^2-18abc+4a^3c-a^2b^2+4b^3)}}$$

Wählt man daher α und λ in dieser Art, dann wird die Gleichung in x_3 geben, wenn wir nur den einen Werth, den die Cubikwurzel liefert, betrachten:

$$x_3=-\sqrt[3]{\frac{1-a_2+b_2-c_2}{1+a_2+b_2+c_2}},$$

oder, mit Berücksichtigung der Gleichungen $b_2=3$, $3c_2=a_2$:

$$x_3=-\sqrt[3]{\frac{3-a_2}{3+a_2}}=-\sqrt[3]{\frac{3-\lambda(3\alpha+a)}{3+\lambda(2\alpha+a)}},$$

und da

$$x_3=\frac{x_2+1}{x_2-1}=\frac{\lambda x_1+1}{\lambda x_1-1}=\frac{\lambda(x-\alpha)+1}{\lambda(x-\alpha)-1}$$

ist, so findet sich x durch die Gleichung

$$\frac{\lambda(x-\alpha)+1}{\lambda(x-\alpha)-1}=-\sqrt[3]{\frac{3-\lambda(3\alpha+a)}{3+\lambda(3\alpha+a)}}, \qquad \text{(A)}$$

wo α und λ die ermittelten Werthe, nämlich resp.

$$\frac{9c-ab}{2(a^2-3b)} \quad \text{und} \quad \pm 2(a^2-3b)\sqrt{\frac{1}{3(27c^2-18abc+4a^3c-a^2b^2+4b^3)}}$$

haben.

Da die beiden anderen Werthe von x_1 durch Multiplication des erhaltenen mit $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ entstehen, so ergeben sich diese gleichfalls hieraus.

Die Gleichung (A) zeigt unmittelbar, dass es einerlei ist, ob man den positiven Werth von λ einführt oder den negativen. Denn eine Umänderung von λ in $-\lambda$ gibt in (A):

$$\frac{-\lambda(x-\alpha)+1}{-\lambda(x-\alpha)-1}=-\sqrt[3]{\frac{3+\lambda(3\alpha+a)}{3-\lambda(3\alpha+a)}},$$

die identisch mit (A) ist, wie man leicht erkennt, wenn man jede der beiden Seiten von (A) in 1 dividirt.

II. Die biquadratische Gleichung.

Behandelt man in ganz ähnlicher Art die Gleichung

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

indem man successive $x=x_1+\alpha$, $x_1=\frac{x_2}{\lambda}$ und $x_2=\frac{x_3+1}{x_3-1}$ setzt, so wird entsprechend:

$$a_1=4\alpha+a,\quad b_1=6\alpha^2+3a\alpha+b,\quad c_1=4\alpha^3+3a\alpha^2+2b\alpha+c,$$

$$d_1=\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d;$$

$$a_2=a_1\lambda,\quad b_2=b_1\lambda^2,\quad c_2=c_1\lambda^3,\quad d_2=d_1\lambda^4$$

und

$$a_3=\frac{4+2a_2-2c_2-4d_2}{1+a_2+b_2+c_2+d_2};\quad b_3=\frac{6-2b_2+6d_2}{1+a_2+b_2+c_2+d_2};$$

$$c_3=\frac{4-2a_2+2c_2-4d_2}{1+a_2+b_2+c_2+d_2};\quad d_3=\frac{1-a_2+b_2-c_2+d_2}{1+a_2+b_2+c_2+d_2}.$$

Die Gleichung in x_3 wird nun quadratisch werden, wenn a_3 und c_3 verschwinden, d. h. wenn

$$4+2a_2-2c_2-4d_2=0,$$
$$4-2a_2+2c_2-4d_2=0,$$

oder wenn $d_2=1$ und $a_2=c_2$ ist. Dies gibt, in a_1, b_1, c_1, d_1 ausgedrückt: $d_1\lambda^4=1$ und $a_1=c_1\lambda^2$; daher hat man $\lambda=\pm\sqrt{\frac{a_1}{c_1}}$ und $c_1^2=a_1^2d_1$.

Die letztere Gleichung, in a, b, c, d ausgedrückt, führt zur Gleichung

$$(4\alpha^3+3a\alpha^2+2b\alpha+c)^2=(4\alpha+a)^2(\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d),$$

die sich auf die cubische Gleichung

$$(a^3-4ab+8c)\alpha^3+(a^2b+2ac-4b^2+16d)\alpha^2$$
$$+(a^2c+8ad-4bc)\alpha+a^2d-c^2=0$$

reducirt. Aus dieser Gleichung ist nun α zu bestimmen, λ findet man dann aus

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{a_1}{c_1}}=\pm\sqrt{\frac{4\alpha+a}{4\alpha^3+3a\alpha^2+2b\alpha+c}}.$$

Die Gleichung in x_3 wird aber jetzt die Gestalt annehmen:

$$x_3^4+b_3x_3^2+d_3=0,$$

oder, da

$$d_3=\frac{1-a_2+b_2-c_2+d_2}{1+a_2+b_2+c_2+d_2},$$

vermittelst der Gleichungen $1=d_2$ und $c_2=a_2$:

$$d_3=\frac{2-2a_2+b_2}{2+2a_2+b_2};\ \text{und da}\ b_3=\frac{12-2b_2}{2+2a_2+b_2},$$

so ist die Gleichung in x_3:

$$x_3^4+2\cdot\frac{6-b_2}{2+2a_2+b_2}x_3^2+\frac{2-2a_2+b_2}{2+2a_2+b_2}=0,$$

wo man nun für x_3 nur den Werth

$$\frac{\lambda(x-\alpha)+1}{\lambda(x-\alpha)-1}$$

einzusetzen braucht, um aus dem bekannten Werthe für x_1 den von x abzuleiten.

Wir unterlassen die weitere Ausführung.

Es sei noch bemerkt, dass auch hier bei der ersten Lösung der Casus irreducibilis sich nicht in einen reducibilis verwandelt.

XXXVI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Problemata.

Auctore Dre. Christiano Fr. Lindman, Lect. Strengnesensi.

I. Invenire integrale aequationis differentialis

$$p\frac{dx}{x}+r\frac{dy}{y}=\frac{x^m dx}{ay^n}.$$

II. Integrare aequationem differentialem

$$y+(a-x)y'=x-\frac{y}{y'}.$$

III. Per duo puncta data transeunt rectae, quae angulum $=A$ efficiunt; invenire locum, ubi ejusmodi rectae se mutuo secent.

IV. Circulus est datus et per punctum extremum diametri cujusdam ductae sunt rectae; in his invenienda sunt ejusmodi

puncta, ut quadratum partis inter punctum quaesitum et peripheriam sitae sit aequale rectangulo, cujus unum latus sit diameter, alterum vero distantia puncti quaesiti a diametro ad datam diametrum perpendiculari.

V. Invenire φ ex aequatione

$$a^2\{(\mathrm{Cot}\,\varphi-1)^2+(1-\mathrm{tg}\,\varphi)^2\}=b^2,$$

(cfr. Tom. VIII. praec. pag. 335. probl. 5.).

VI. Dato puncto intra angulum rectum, reperire minimam rectam, quae per hoc punctum ducta lateribus anguli recti terminetur.

VII. Invenire valorem quantitatis

$$u=\frac{x\sqrt{2}(2a-\sqrt{a^2+8x^2})}{\sqrt{a^2+8x^2}\sqrt{-a^2-2x^2+a\sqrt{a^2+8x^2}}},$$

si est $x=0$.

Von Herrn **Friedrich Mann**, Professor an der Kantonsschule zu **Frauenfeld** im Kanton Thurgau.

1) Wenn man im Endpunkte B der Geraden AB (Taf. IX. Fig. 15.) eine Senkrechte errichtet, auf derselben vom Punkte B aus ein Stück $BC=\frac{1}{2}AB$ abträgt, um C mit einem Radius gleich CB einen Kreis beschreibt, hierauf A mit C geradlinig verbindet und den Abschnitt AD von A aus auf AB abträgt: so ist bekanntlich AB im Punkte E so getheilt, dass AE als mittlere geometrische Proportionale der Längen BE und AB erscheint. In dieser Figur ist aber auch, wenn man noch die Sehne DB zieht, der Winkel CDB die mittlere arithmetische Proportionale zwischen den Winkeln CBA und CAB.

2) Es soll, gestützt auf den zuletzt erwähnten Satz, die Aufgabe gelöst werden: „Man kennt das grössere Stück einer nach dem äussern und mittlern Verhältnisse getheilten Geraden, es soll das dazu gehörige kleinere Stück gefunden werden."

3) Ein Vieleck mit ungerader Seitenzahl ist regelmässig, wenn sämmtliche Seiten Tangenten eines Kreises und wenn sämmtliche Centriwinkel von übereinstimmender Grösse sind. (Unter Centriwinkel sind hierbei natürlich die Winkel derjenigen

Geraden verstanden, welche vom Mittelpunkte des einbeschriebenen Kreises nach den einzelnen Ecken gehen.)

4) Jedes gleichseitige Vieleck mit ungerader Seitenzahl, welchem ein Kreis einbeschrieben werden kann, ist regelmässig.

XXXVII.

Miscellen.

Ueber eine geometrische Aufgabe.

Von Herrn Friedrich Mann, Professor an der Kantonsschule zu Frauenfeld im Kanton Thurgau.

Aufgabe. Man kennt von einem Dreieck die Länge einer Seite ($=a$), die Summe der beiden anderen Seiten ($=s$) und die Höhe auf die bekannte Seite ($=h$); wie kann dasselbe construirt werden?

Lösung. Trage auf irgend einer Geraden ein Stück $JK=s$ (Taf. IX. Fig. 16.) auf, suche die Mitte O von JK und schneide von O aus auf JK die Stücke $OA=OB=\frac{1}{2}a$ ab. Errichte sodann in O auf JK eine Senkrechte und durchschneide dieselbe im Punkte H von A aus mit einem Radius $=JO$. Hierauf beschreibe man um O mit den Halbmessern OH und OJ Kreise und stelle die Geraden D_1E_1 und D_2E_2 her, welche in der Entfernung h zu JK parallel sind. Die Punkte G_1, G_2, G_3, G_4, in welchen diese Parallelen den kleineren jener Kreise schneiden, verbinde man mit O, setze die Verbindungslinien fort, bis der grosse Kreis in den Punkten F_1, F_2, F_3, F_4 geschnitten wird, und fälle von den zuletzt erwähnten Punkten Senkrechte auf JK. Die Punkte C_1, C_2, C_3, C_4, in welchen diese Senkrechten die Parallelen D_1E_1, D_2E_2 treffen, darf man dann nur mit A und B verbinden, um Dreiecke AC_1B, AC_2B, AC_3B, AC_4B von verlangter Beschaffenheit zu erhalten.

Beweis. Dass jedem der gefundenen Dreiecke die verlangte Seite und die vorgeschriebene Höhe zukommt, geht unmittelbar

aus der Construction hervor. Es ist daher nur noch zu beweisen, dass in Folge der Construction die Summe der anderen Seiten ($AC_1 + BC_1$ z. B.) $= s$ geworden sei.

Jedenfalls ist vermöge der Construction:

$$C_1M : F_1M = G_1O : F_1O,$$

oder auch

$$(C_1M)^2 : (F_1M)^2 = (G_1O)^2 : (F_1O)^2; \tag{1}$$

ferner:

$$(G_1O)^2 = (HO)^2 = \tfrac{1}{4}s^2 - \tfrac{1}{4}a^2; \tag{2}$$

endlich

$$C_1M = h \tag{3}$$

und

$$(F_1O)^2 = \tfrac{1}{4}s^2. \tag{4}$$

Substituiren wir die Werthe aus (2), (3) und (4) in (1), und bezeichnen wir F_1M durch H, so ist: $h^2 : H^2 = (\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}a^2) : \frac{1}{4}s^2$ oder $(H^2 - h^2) : H^2 = a^2 : s^2$, also auch:

$$(H^2 - h^2)s^2 = a^2H^2. \tag{5}$$

H^2 ist offenbar $= JM.MK$. Vermöge der Construction ist aber $JM = JA + b$ (wenn wir nämlich den Abschnitt AM mit b bezeichnen) und $JA = \frac{1}{2}(s-a)$, also $JM = \frac{1}{2}(s-a) + b$. Ebenso: $MK = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}a - b$; also:

$$H^2 = (\tfrac{1}{2}s)^2 - (b - \tfrac{1}{2}a)^2. \tag{6}$$

Substituiren wir den Werth von H^2 aus (6) in (5), so gewinnen wir:

$$(\tfrac{1}{4}s^2 - (b - \tfrac{1}{2}a)^2 - h^2).s^2 = a^2.(\tfrac{1}{4}s^2 - (b - \tfrac{1}{2}a)^2). \tag{7}$$

Bezeichnen wir die Seitenlängen AC_1 und BC_1 beziehungsweise durch x und y, so ist bekannten planimetrischen Sätzen zufolge:

$$h^2 = x^2 - b^2 \text{ und } b = \frac{x^2 + a^2 - y^2}{2a}.$$

Indem man diese Werthe in (7) einsetzt und dann gehörig reducirt, gelangt man zur Gleichung:

$$s^4 - 2s^2(x^2 + y^2) = -(x^2 - y^2)^2.$$

Löst man diese Gleichung nach s^2 auf, so ergibt sich:

$$s^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2, \text{ folglich: } s = x + y.$$

Die Summe der beiden Dreiecksseiten AC_1 und BC_1 hat also in Folge unserer Construction die vorgeschriebene Grösse s in der That erhalten.

So dargestellt, nimmt sich die Sache ziemlich verwickelt und kunststückartig aus, und doch ist der Gedankengang, welcher diese Lösung an die Hand gab, höchst einfach und einleuchtend. Nachdem nämlich die zwei Eckpunkte A und B des Dreiecks der Bedingung $AB = a$ gemäss hergestellt sind, handelt es sich nur noch um Gewinnung des dritten Eckpunktes C. Dieser ist an zwei Bedingungen gebunden:

1) von AB um h entfernt zu sein, und
2) in Beziehung auf die Punkte A und B eine Entfernungssumme $= s$ zu haben.

In Folge der ersten Bedingung muss C einer der zwei Geraden angehören, welche man in der Entfernung h zu AB ziehen kann; in Folge der Bedingung 2) muss C ein Punkt vom Umfang derjenigen Ellipse sein, welche A und B zu Brennpunkten und s zur grossen, mithin $\sqrt{\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}a^2}$ zur halben kleinen Axe hat. Die an C gestellten Forderungen erfüllt somit jeder Punkt, welcher dieser Ellipse und einer jener Parallelen zugleich angehört. Es fragt sich daher nur: wie kann C den aufgestellten Bedingungen gemäss gefunden werden ohne förmliches Construiren einer Ellipse? Die Eigenschaft „C soll ein Punkt der bezeichneten Ellipse sein", lässt sich in verschiedenen Formen geben, z. B. auch in folgender:

Wenn man um O (Mitte von AB) mit einem Halbmesser $= \frac{1}{2}s$ einen Kreis beschreibt, so ist C so gewiss ein Punkt derjenigen Ellipse, welche A und B zu Brennpunkten und s zur grossen Axe hat, als die durch C gehende und auf AB senkrecht stehende Gerade sich zur halben, durch C gehenden und auf AB senkrecht stehenden Kreissehne verhält, wie $\sqrt{\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}a^2}$ zu $\frac{1}{2}s$.

Diese Form der Bedingung 2) ist es, welche, zusammengehalten mit der Bedingung 1), zu obiger Lösungsweise führte.

Aus der Figur ist leicht zu erkennen, dass vier oder zwei (gleichschenkelige) oder kein Dreieck von verlangter Art erscheinen werden, je nachdem h kleiner oder gleich oder grösser als $\sqrt{\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}a^2}$ ist.

Von dem Herausgeber.

Weil, wenn man x als constant betrachtet, allgemein

$$\int \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \partial y = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

also

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial y=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2},$$

und folglich allgemein

$$\int\partial x\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial y=\int\frac{2\partial x}{1+x^2}=2\,\mathrm{Arctang}\,x$$

ist, so ist

$$\int_{-1}^{+1}\partial x\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial y=2(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{4}\pi)=\pi.$$

Weil, wenn man y als constant betrachtet, allgemein

$$\int\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial x=-\frac{x}{x^2+y^2},$$

also

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial x=-\frac{1}{1+y^2}-\frac{1}{1+y^2}=-\frac{2}{1+y^2},$$

und folglich allgemein

$$\int\partial y\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial x=-\int\frac{2\partial y}{1+y^2}=-2\,\mathrm{Arctang}\,y$$

ist, so ist

$$\int_{-1}^{+1}\partial y\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial x=-2(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{4}\pi)=-\pi.$$

Vergleicht man dies mit dem Obigen, so kommt die Gleichung:

$$\int_{-1}^{+1}\partial x\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial y=-\int_{-1}^{+1}\partial y\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial x.$$

Ich glaube nicht, dass man mich missverstehen wird, wenn ich sage, dass dies Unsinn ist, und dass Cournot den Grund desselben im Allgemeinen und Wesentlichen **ganz richtig** darin gefunden hat, „dass die Function $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ zwischen den Gränzen der Veränderlichen, nämlich wenn x und y gleichzeitig Null werden, unendlich wird" (m. s. Archiv. Thl. XXII. S. 414.). Ich gehe nur vielleicht noch weiter, als jener treffliche Mathematiker, indem ich gleich von vorn herein die Integration zwischen den obigen Gränzen für unzulässig erkläre. Analysiren wir z. B. einmal das Integral

$$\int_{-1}^{+1}\partial x\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial y,$$

etwas näher. Man sagt, allgemein ist für ein constantes x

$$\int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial y = \frac{y}{x^2+y^2},$$

folglich

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial y = \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2};$$

und dies ist in der That so lange auch ganz richtig, so lange x nicht verschwindet. Wenn man aber $x=0$ setzt, so ist vorstehendes Integral eigentlich das folgende:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{-y^2}{y^4}\partial y = -\int_{-1}^{+1} \frac{\partial y}{y^2},$$

also nach der obigen Formel:

$$-\int_{-1}^{+1} \frac{\partial y}{y^2}=2,\quad \int_{-1}^{+1} \frac{\partial y}{y^2}=-2.$$

Hieraus sieht man aber schon, dass es ganz unzulässig ist, $x=0$ zu setzen, weil $\frac{1}{y}$ zwischen den Gränzen -1 und $+1$ unendlich wird, also die in der höheren Analysis überall unverbrüchlich fest zu haltende Bedingung der Stetigkeit nicht mehr erfüllt ist. Wenn man nun aber die zweite Integration

$$\int_{-1}^{+1}\partial x\int_{-1}^{+1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\partial y = \int_{-1}^{+1}\frac{2\partial x}{1+x^2}$$

ausführt, so lässt man ja eben x zwischen den Gränzen -1 und $+1$ auch verschwinden, und thut also etwas, was sich gleich von vorn herein als unzulässig erwiesen hat; und kommt dann zuletzt Unsinn heraus, so hat man sich darob gar nicht zu verwundern. Was ich hier gesagt habe, will im Wesentlichen auch Cournot sagen, und ich wenigstens glaube, dass er vollkommen Recht hat. Man entwickele doch $\int\frac{\partial y}{y^2}=\int y^{-2}\partial y$ auch einmal auf gewöhnliche Weise, so kommt

$$\int\frac{\partial y}{y^2}=-\frac{1}{y},\ \text{also}\ \int_{-1}^{+1}\frac{\partial y}{y^2}=0.\ \text{Vorher kam}\ \int_{-1}^{+1}\frac{\partial y}{y^2}=-2.$$

Also nichts als Widersprüche! und wer also das Gesetz der Stetigkeit jemals verletzt, begeht, im Allgemeinen wenigstens, immer Unsinn, hat wenigstens immer Zweifel in die erhaltenen Resultate zu setzen und dieselben einer besonderen Untersuchung zu unterwerfen. Sapienti sat!

G.

XXXVIII.

Entwicklung der vorzüglichsten Eigenschaften einiger mit den goniometrischen zunächst verwandten Functionen.

Von

Herrn Professor *Knar*

in Gratz.

---

§. 1.

Es ist längst als Thatsache anerkannt, dass diejenigen Rechnungsoperationen, welche sich auf dem gewöhnlichen, vom einfacheren zum mehr zusammengesetzten fortschreitenden, Entwicklungsgange der Arithmetik ergeben, für das Bedürfniss der Mathematik in ihrer gegenwärtigen Ausdehnung nicht als genügend betrachtet werden können. Dadurch hat sich von Zeit zu Zeit die Nothwendigkeit herausgestellt, noch andere Functionsformen als selbständig in die Wissenschaft aufzunehmen, deren Unentbehrlichkeit oder wenigstens Nützlichkeit in wirklich vorgekommenen Fällen durch die Erfahrung gelehrt wurde. Hiebei ist es leicht begreiflich, dass man nicht immer gleich anfangs im Stande war, den ganzen Umfang der Anwendbarkeit solcher neuer Functionen zu überschauen, da dieselben bei der speciellen Veranlassung ihrer Einführung nicht sogleich in ihrer einfachsten und allgemeinsten Gestalt auftraten, und man zuweilen auch erst später die Art ihres Zusammenhanges mit anderen bereits vorher bekannten Functionen einsah, um ihnen demgemäss ihren gebührenden systematischen Platz in der Wissenschaft anweisen zu können, der häufig ein ganz anderer ist, als er sich bei der historischen Entwicklung ergeben hat.

Vorzüglich tauglich zur gemeinschaftlichen Ableitung neuer nothwendiger oder doch sehr nützlicher Formen zeigt sich die sogenannte Exponentialreihe für e^x, weil sich aus ihr mehrere der wichtigsten Functionen leicht und ungezwungen bilden und auf solche Art unter einander in Verbindung bringen lassen, deren erstes Erscheinen in der Wissenschaft auf ganz verschiedenen Wegen in der Wirklichkeit erfolgte. Hieher gehört z. B. die Function

$$\frac{x}{e^x-1},$$

aus welcher die Bernoulli'schen Zahlen mit ihren mannigfaltigen Anwendungen bei den goniometrischen Functionen und der Summirung verschiedener Reihen entspringen; hieher kann ferner der Soldner'sche Integrallogarithmus gerechnet werden; eben so die schon von Lambert empfohlenen, dann von Gudermann neuerdings vorgeschlagenen hyperbolischen Functionen, die freilich die allgemeine Anerkennung als selbständige Functionen bisher noch nicht zu erringen vermochten, ungeachtet ihre Nützlichkeit in vielen Fällen nicht geläugnet werden kann; endlich müssen hieher vorzugsweise die goniometrischen Functionen gezählt werden, deren Benennung schon hinlänglich zeigt, zu welchem speciellen Bedarfe sie zuerst aufgefunden und angewendet wurden, deren wirkliche Unentbehrlichkeit in allen Zweigen der Mathematik es jedoch ganz unerlässlich macht, sie nicht bloss als geometrische, sondern als allgemeine analytische Functionsformen zu betrachten und dieser Anschauungsweise gemäss zu behandeln.

Es ist kein Grund vorhanden zu der Vermuthung, mit den eben aufgezählten nach und nach zum Vorschein gekommenen Functionen müsse die Anzahl der aus der Exponentialreihe entspringenden neuen Formen als vollkommen abgeschlossen angesehen werden, vielmehr wird man schwerlich in der Erwartung sich getäuscht finden, dass an dieselben noch manche andere nützliche Form, besonders zum Behufe der Integralrechnung, sich anschliessen dürfte, welche aus der nähmlichen Quelle abgeleitet werden kann und zugleich eine hinlängliche Menge eigenthümlicher ihr zugehörigen Eigenschaften besitzt, um eine abgesonderte Behandlung als selbständige Function nothwendig zu machen. Bereits vor längerer Zeit hat Louis Olivier im 2. Bande von Crelle's Journal f. r. u. a. Mathematik gezeigt, dass die Summen aller ohne Ende fortlaufenden Reihen, die aus dem allgemeinen Gliede

$$\frac{x^{rn+m}}{1.2.3\ldots.(rn+m)}$$

für $r=0, 1, 2, 3,$ u. s. f. entspringen, mögen die Glieder durchgängig mit gleichen oder mit abwechselnden Zeichen genommen werden, bei allen ganzen und additiven Werthen von n und m durch Exponentialgrössen ausgedrückt werden können, und diese Ausdrücke, als selbständige Functionen betrachtet, ähnliche Eigenschaften besitzen, wie die Sinus und Cosinus, die freilich ebenfalls zu denselben gehören. Olivier hat dabei vorzüglich den Fall vor Augen gehabt, wenn n eine Primzahl ist, und als Beispiel insbesondere $n=3$ angenommen. Neuerlich hat Hellwig im 21. Bande von Grunert's Archiv für Mathematik und Physik diesen Gegenstand einer allgemein gehaltenen Betrachtung unterzogen, sich aber als besondere Beispiele ebenfalls auf die beiden Fälle $n=2$ und $n=3$ beschränkt. Allein nicht diese allgemeinen Ableitungen, sondern nur eine genaue Untersuchung der einzelnen Fälle vermag zu zeigen, ob die dabei sich ergebenden Functionen irgend einen wirklichen Nutzen zu gewähren im Stande sind und ob sie zugleich eine so scharf ausgeprägte Eigenthümlichkeit besitzen, um ihre Einführung als selbständige Functionen dadurch zu rechtfertigen. Bei der Vornahme einer solchen Untersuchung drängt sich der Fall $n=4$ zuerst auf, weil offenbar die aus dieser Annahme entstehenden Functionen, besonders wenn die Glieder der Reihen mit abwechselnden Zeichen genommen werden, die nächste Verwandtschaft mit den goniometrischen haben müssen, da sie aus diesen letzteren gerade so entspringend gedacht werden können, wie eben diese aus der Exponentialreihe hervorgehen. Ich habe mir desshalb im Nachstehenden die Aufgabe zur Lösung vorgelegt, die eben angedeutete besondere Art der Functionen genauer zu untersuchen, ihre vorzüglichsten Eigenschaften zu entwickeln und die ungemein grosse Mannigfaltigkeit und Eigenthümlichkeit derselben nachzuweisen. Hiebei soll auf die allgemeinen von Olivier und Hellwig angewendeten Herleitungen weiter keine Rücksicht genommen werden, sondern nur die überall klar hervortretende Analogie mit den goniometrischen Functionen gleichsam als Leitfaden dienen. Vielleicht gelingt es mir auf solche Art die Aufmerksamkeit anderer Mathematikverständigen auf diesen Gegenstand zu lenken, die dann ohne Zweifel im Stande sein werden, durch tieferes Eingehen in manche hier nur kurz berührte oder ganz mit Stillschweigen übergangene Untersuchung noch andere mehr verborgene Eigenschaften dieser Functionen zu entdecken, und dadurch zugleich den Umfang ihrer Anwendbarkeit vielleicht nicht unbeträchtlich zu erweitern.

§. 2.

Betrachten wir die Summen der vier nachstehenden ohne Ende fortlaufenden Reihen, deren Glieder zu einfachen Bildungsgesetzen folgen, um dieselben durch Beifügung der sogenannten allgemeinen Glieder noch mehr hervorheben zu müssen, als selbständige Functionen von x, deren Eigenschaften und Zusammenhang mit anderen bereits bekannten Functionen erst nachgewiesen werden sollen, und bezeichnen dieselben durch φx, χx, ψx, ξx dergestalt, dass

$$\varphi x = 1 - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{12}}{12!} + \frac{x^{16}}{16!} - \ldots,$$

$$\chi x = \frac{x}{1} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{13}}{13!} + \frac{x^{17}}{17!} - \ldots,$$

$$\psi x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} - \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{18}}{18!} - \ldots,$$

$$\xi x = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} - \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{19}}{19!} - \ldots,$$

sein soll. Die Functionszeichen φ, χ, ψ, ξ werden hier niemals in einer anderen, als der eben festgesetzten Bedeutung gebraucht werden, desshalb reichen sie vollkommen hin zur Unterscheidung dieser Functionen sowohl unter einander, als auch von allen anderen, ohne dass es zu diesem Zwecke der Einführung besonderer Namen für dieselben bedarf. Nur in dem Falle, wenn man die vier obigen Functionen zusammengenommen zu bezeichnen wünscht, dürfte es der Kürze und Deutlichkeit des Ausdruckes wegen angemessen erscheinen, sie mit einer eigenen gemeinschaftlichen Benennung zu belegen. Ich schlage hiezu für dieselben den Namen „hypercyclische Functionen" vor, dessen ich mich künftighin stets bedienen werde. Ich muss jedoch ausdrücklich bemerken, dass durch diese Benennung durchaus keine Verbindung jener Functionen mit dem Kreise, sondern nur ihre Verwandtschaft mit den goniometrischen oder cyclischen Functionen angedeutet werden soll.

§. 3.

Einige Eigenschaften der hypercyclischen Functionen ergeben sich aus der Beschaffenheit der Glieder in den Reihen des §. 2. durch so höchst einfache Betrachtungen, dass es ganz überflüssig

sein würde, sie erst umständlich ableiten und begründen zu wollen. Diese Eigenschaften sollen daher hier nur kurz angeführt werden. Sie bestehen in folgenden:

1. Für $x=0$ ist $\varphi 0=1$, $\chi 0=0$, $\psi 0=0$, $\xi 0=0$.

2. Ferner findet man
$\varphi(-x)=\varphi x$, $\chi(-x)=-\chi x$, $\psi(-x)=\psi x$, $\xi(-x)=-\xi x$
und
$\varphi(xi)=\varphi x$, $\chi(xi)=i\chi x$, $\psi(xi)=-\psi x$, $\xi(xi)=-i\xi x$,
wo i das bekannte Zeichen für $\sqrt{-1}$ ist.

3. Die Reihen des §. 2. sind für jeden beliebigen wie immer grossen Werth von x convergent und daher die hypercyclischen Functionen beständig stetig, so dass eine Unterbrechung der Stetigkeit bei ihnen niemals Statt findet. Diess gilt nicht bloss für reelle, sondern auch für beliebige imaginäre oder complexe Werthe von x.

4. Die Convergenz jener Reihen wird nicht aufgehoben, wenn man sämmtliche Glieder anstatt der abwechselnden durchgängig mit einerlei Vorzeichen behaftet sich vorstellt. Es gelten daher hier alle Gesetze, welche für Reihen von solcher Beschaffenheit erwiesen sind.

5. Wird x so angenommen, dass in einer der Reihen des §. 2. irgend ein Glied grösser ist, als das nächstfolgende der nähmlichen Reihe, so muss auch sowohl in dieser als in jeder der drei übrigen Reihen jedes andere Glied, in welchem der Exponent von x grösser ist als in dem zuerst betrachteten, gleichfalls grösser sein, als das zunächst darauf folgende Glied derselben Reihe.

6. Hieraus folgt unmittelbar, dass für jeden Werth von x, für welchen das erste Glied in einer der Reihen des §. 2. grösser ist als das zunächst daraus folgende, auch das dritte grösser als das vierte und so ferner jedes additive Glied der Reihe grösser als das nächste subtractive, und folglich die Summe der ganzen Reihe oder die hypercyclische Function nothwendig additiv sein müsse. Desshalb hat jede hypercyclische Function für hinlänglich kleine x stets einen additiven Werth und bleibt auch ununterbrochen additiv wenigstens so lange, bis das erste Glied der entsprechenden Reihe dem zweiten gleich wird, folglich wenigstens

φx so lange, bis $1 = \frac{x^4}{4!}$ oder $x = \sqrt[4]{24} = 2{,}21336\ldots$,

χx so lange, bis $x = \frac{x^5}{5!}$ oder $x = \sqrt[4]{120} = 3{,}30975\ldots$,

ψx so lange, bis $\frac{x^2}{2} = \frac{x^6}{6!}$ oder $x = \sqrt[4]{360} = 4{,}35588\ldots$,

ξx so lange, bis $\frac{x^3}{3!} = \frac{x^7}{7!}$ oder $x = \sqrt[4]{840} = 5{,}38356\ldots$

wird.

7. Die Reihen des §. 2. convergiren für kleine Werthe von x sehr rasch. Die Abnahme der Glieder beginnt schon bei den ersten derselben, sobald x die eben angegebenen Gränzen nicht übersteigt; für grössere Werthe von x tritt die Abnahme erst bei späteren Gliedern ein und zwar bei desto späteren, je mehr x zunimmt. Jene Reihen sind daher nur dann zur bequemen Berechnung der hypercyclischen Functionen geeignet, wenn x die obigen Gränzen nicht bedeutend übertrifft, für beträchtlich grössere Werthe von x hingegen müssen andere Hilfsmittel aufgesucht werden, um auch in solchen Fällen die Berechnung mit möglichster Bequemlichkeit ausführen zu können.

§. 4.

Die Werthe der hypercyclischen Functionen lassen sich ohne Schwierigkeit durch die Sinus und Cosinus imaginärer Bogen ausdrücken. Bezeichnen wir zu diesem Zwecke durch w einen der 4 imaginären Werthe, welche $\sqrt[4]{-1}$ haben kann, und zwar, um hiebei eine ganz bestimmte Annahme zum Grunde zu legen, setzen wir

$$w = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Bei dieser Bedeutung des Zeichens w, welche in der Folge beständig beibehalten wernen soll, ist

$$w^2 = -i,\quad w^3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} = -wi,\quad w^4 = -1,\quad w^5 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = -w,$$

$$w^6 = i,\qquad w^7 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = wi,\qquad w^{8n} = 1,\quad w^{8n+m} = w^m,$$

wo m und n beliebige ganze Zahlen sein können. Ferner findet man noch

$$\frac{1}{w}=\frac{\sqrt{2}}{1-i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=wi.$$

Substituirt man nun in den bekannten Reihenentwicklungen für $\cos x$ und $\sin x$ sowohl xw als auch xwi anstatt x, so wird man mit gehöriger Berücksichtigung der eben angesetzten Werthe der Potenzen von w erhalten:

$$\cos xw=1+\frac{ix^2}{2}-\frac{x^4}{4!}-\frac{ix^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots+\frac{(i)^n.x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

$$\cos xwi=1-\frac{ix^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots+\frac{(-i)^n.x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

$$\sin xw=w\left[x+\frac{ix^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}-\frac{ix^7}{7!}+\ldots+\frac{(i)^{n-1}.x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right],$$

$$\sin xwi=wi\left[x-\frac{ix^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{ix^7}{7!}+\ldots+\frac{(-i)^{n-1}.x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right].$$

Durch Addition und Subtraction dieser beiden Reihenpaare überzeugt man sich sogleich von der Richtigkeit folgender Ausdrücke:

$$\varphi x=\frac{\cos xw+\cos xwi}{2},$$

$$\chi x=\frac{\sin xw}{2w}+\frac{\sin xwi}{2wi}=\frac{wi\sin xw+w\sin xwi}{2},$$

$$\psi x=\frac{\cos xw-\cos xwi}{2i}=\frac{i\cos xwi-i\cos xw}{2},$$

$$\xi x=\frac{\sin xw}{2wi}+\frac{\sin xwi}{2w}=\frac{w\sin xw+wi\sin xwi}{2}.$$

§. 5.

Den eben gefundenen Werthen kann eine veränderte, zu ferneren Ableitungen ungemein brauchbare Form gegeben werden. Denn es ist

$$xw=\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{xi}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad xwi=\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{xi}{\sqrt{2}},$$

folglich

$$\cos xw = \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{xi}{\sqrt{2}} + \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{xi}{\sqrt{2}},$$

$$\cos xwi = \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{xi}{\sqrt{2}} - \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{xi}{\sqrt{2}},$$

$$\sin xw = \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{xi}{\sqrt{2}} - \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{xi}{\sqrt{2}},$$

$$\sin xwi = \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{xi}{\sqrt{2}} + \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{xi}{\sqrt{2}}.$$

Diese Werthe in §. 4. substituirt geben nach gehöriger Abkürzung:

$$\varphi x = \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{xi}{\sqrt{2}},$$

$$\chi x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{xi}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{xi}{\sqrt{2}},$$

$$\psi x = -i\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{xi}{\sqrt{2}},$$

$$\xi x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{xi}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{xi}{\sqrt{2}}.$$

Wegen eines späterhin davon zu machenden Gebrauches soll hier noch bemerkt werden, dass durch Addition und Subtraction der beiden Ausdrücke für χx und ξx folgende Werthe zum Vorschein kommen:

$$\chi x + \xi x = \sqrt{2}.\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{xi}{\sqrt{2}} \text{ und } \chi x - \xi x = -i\sqrt{2}.\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{xi}{\sqrt{2}}.$$

§. 6.

Zuweilen erweist es sich als nützlich, die hypercyclischen Functionen durch Exponentialausdrücke darzustellen. Diess erreicht man sogleich, wenn nur in den Formeln des §. 4. anstatt der goniometrischen Functionen die gleichgeltenden Exponentialgrössen eingeführt werden. Dadurch findet man:

$$\varphi x = \frac{1}{4}(e^{xw} + e^{-xw} + e^{xwi} + e^{-xwi}),$$

$$\chi x = \frac{wi}{4}(e^{xw} - e^{-xw} - ie^{xwi} + ie^{-xwi}),$$

$$\psi x = \frac{i}{4}(e^{xw} + e^{-xw} - e^{xwi} - e^{-xwi}),$$

$$\xi x = \frac{w}{4}(-e^{xw} + e^{-xw} - ie^{xwi} + ie^{-xwi}).$$

§. 7.

Noch lassen sich die hypercyclischen auch durch die hyperbolischen Functionen ausdrücken. Denn es ist bekanntlich, wenn die letzteren von den gleichnamigen goniometrischen Functionen durch den Gebrauch der grossen Anfangsbuchstaben unterschieden werden,

$$\cos x = \mathrm{Cos}\, xi \quad \text{und} \quad \sin x = -i\,\mathrm{Sin}\, xi,$$

folglich

$$\cos xw = \mathrm{Cos}\, xwi,\ \cos xwi = \mathrm{Cos}\, xw,\ \sin xw = -i\,\mathrm{Sin}\, xwi,$$

$$\sin xwi = i\,\mathrm{Sin}\, xw.$$

Setzt man diese Werthe in §. 4., so erhält man auf der Stelle:

$$\varphi x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{Cos}\, xw + \mathrm{Cos}\, xwi),$$

$$\chi x = -\frac{i\,\mathrm{Sin}\, xwi}{2w} + \frac{\mathrm{Sin}\, xw}{2w} = \frac{wi}{2}(\mathrm{Sin}\, xw - i\,\mathrm{Sin}\, xwi),$$

$$\psi x = \frac{i}{2}(\mathrm{Cos}\, xw - \mathrm{Cos}\, xwi),$$

$$\xi x = -\frac{\mathrm{Sin}\, xwi}{2w} + \frac{i\,\mathrm{Sin}\, xw}{2w} = -\frac{w}{2}(\mathrm{Sin}\, xw + i\,\mathrm{Sin}\, xwi).$$

§. 8.

Die in den vorstehenden Paragraphen angeführten Formeln zeigen, dass die hypercyclischen Functionen weder durch goniometrische noch durch hyperbolische oder Exponentialgrössen in reeller Form sich darstellen lassen, sondern durch jede dieser Arten von Functionen nur in imaginärer Gestalt ausgedrückt werden können, obgleich aus §. 3. bekannt ist, dass die ersteren für jeden beliebigen reellen Werth von x selbst reell sein müssen. Diess berechtigt zu dem Schlusse, dass die hypercyclischen Functionen wirklich eigenthümliche, von allen andern vorgenannten Arten von Functionen wesentlich verschiedene, nur mit ihnen in einem bestimmten leicht erkennbaren Zusammenhange

stehende Zahlformen sind. Es darf jedoch nicht unbemerkt bleiben, dass durch eine Verbindung der goniometrischen mit den hyperbolischen Functionen oder den Exponentialgrössen die hypercyclischen auch in reeller Form dargestellt werden können. Denn führt man in den Werthen des §. 5. anstatt der Sinus und Cosinus der imaginären Bogen die Exponentialausdrücke oder auch die hyperbolischen Functionen ein, so erhält man:

$$\varphi x = \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}}{2} = \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot \mathrm{Cos}\frac{x}{\sqrt{2}},$$

$$\chi x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}-e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{Cos}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{Sin}\frac{x}{\sqrt{2}},$$

$$\psi x = \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}-e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}}{2} = \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{Sin}\frac{x}{\sqrt{2}},$$

$$\xi x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}-e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{Cos}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{Sin}\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Allein diese aus zwei verschiedenartigen Functionen zusammengesetzten Formen dürften jedenfalls schwieriger zu behandeln sein, als die einfachen hypercyclischen Functionen, so dass man schwerlich im allgemeinen versuchen wird, diese letzteren auf die anderen zurückzuführen. Nur in besonderen Fällen kann auch die eben gefundene immerhin bemerkenswerthe Form gleichfalls von Nutzen sein.

§. 9.

Aus den Gleichungen des §. 4. lassen sich umgekehrt die Werthe von $\cos xw$, $\cos xwi$, $\sin xw$, $\sin xwi$, so wie aus den Gleichungen des §. 6. die Werthe der Exponentialgrössen e^{xw}, e^{-xw}, e^{xwi}, e^{-xwi}, endlich aus §. 7. $\mathrm{Cos}\,xw$, $\mathrm{Cos}\,xwi$, $\mathrm{Sin}\,xw$, $\mathrm{Sin}\,xwi$ durch die hypercyclischen Functionen darstellen. Man findet nämlich auf diesem Wege:

$$\cos xw = \varphi x + i\psi x = \mathrm{Cos}\,xwi, \qquad \cos xwi = \varphi x - i\psi x = \mathrm{Cos}\,xw,$$
$$\sin xw = w(\chi x + i\xi x) = -i\mathrm{Sin}\,xwi, \quad \sin xwi = wi(\chi x - i\xi x) = i\mathrm{Sin}\,xw$$
$$e^{xw} \quad = \varphi x - i\psi x + w\chi x - wi\xi x, \quad e^{xwi} \quad = \varphi x + i\psi x + wi\chi x - w\xi x,$$
$$e^{-xw} \quad = \varphi x - i\psi x - w\chi x + wi\xi x, \quad e^{-xwi} \quad = \varphi x + i\psi x - wi\chi x + w\xi x.$$

Substituirt man in diesen Ausdrücken durchgängig x anstatt xw und folglich $\frac{x}{w} = xwi$ anstatt x, so können hiedurch die Werthe von $\cos x$, $\sin x$, $\cos xi$, $\sin xi$, e^x, e^{-x}, e^{xi}, e^{-xi}, $\mathrm{Cos}\,x$, $\mathrm{Sin}\,x$ $\mathrm{Cos}\,xi$, $\mathrm{Sin}\,xi$ mittelst der hypercyclischen Functionen imaginärer Veränderlichen dargestellt werden, wenn man etwa eine solche Umformung zu irgend einem Zwecke brauchbar finden sollte.

§. 10.

Die eben angegebenen Werthe der Exponentialgrössen e^{xw}, e^{-xw}, e^{xwi}, e^{-xwi} führen mittelst einer ganz einfachen Bemerkung zu eben so leichten als wichtigen Folgerungen. Diese Potenzen sind nähmlich so beschaffen, dass aus einer jeden von ihnen die drei übrigen hergeleitet werden können. Desshalb müssen zwischen ihnen, und folglich, wenn man an ihre Stelle die obigen Werthe setzt, auch zwischen den hypercyclischen Functionen nothwendig d r e i G l e i c h u n g e n vorhanden sein, durch deren Auflösung, wenn sie anders in einer allgemein auflösbaren Form sich ergeben, aus einer jeden solchen Function die drei anderen sich finden lassen würden.

Man erhält diese Gleichungen am leichtesten auf folgende Weise. Zuerst multiplicirt man die beiden Werthe von e^{xw} und e^{-xw}, dann auch jene von e^{xwi} und e^{-xwi} zusammen. Dadurch kommen, wegen

$$e^{xw}.e^{-xw} = e^{xw-xw} = e^0 = 1 \quad \text{und} \quad e^{xwi}.e^{-xwi} = e^{xwi-xwi} = e^0 = 1,$$

folgende zwei Gleichungen zum Vorscheine:

$$\begin{aligned} 1 &= (\varphi x - i\psi x)^2 - (w\chi x - wi\xi x)^2 \\ &= \varphi x^2 - \psi x^2 - 2i\varphi x.\psi x + i\chi x^2 - i\xi x^2 + 2\chi x.\xi x, \\ 1 &= (\varphi x + i\psi x)^2 - (wi\chi x - w\xi x)^2 \\ &= \varphi x^2 - \psi x^2 + 2i\varphi x.\psi x - i\chi x^2 + i\xi x^2 + 2\chi x.\xi x, \end{aligned}$$

aus welchen man durch Addition und Subtraction sogleich **z w e i** der gesuchten Gleichungen erhält, nähmlich:

$$\varphi x^2 - \psi x^2 + 2\chi x.\xi x = 1 \quad \text{und} \quad 2\varphi x.\psi x - \chi x^2 + \xi x^2 = 0.$$

Die dritte noch abgängige Gleichung ergibt sich aus der Bemerkung, dass

$$e^{xwi} = (e^{xw})^i$$

ist. Setzt man hierin anstatt e^{xwi} und e^{xw} ihre Werthe, so hat man auf der Stelle die Gleichung:

$$\varphi x + i\psi x + wi\chi x - w\xi x = (\varphi x - i\psi x + w\chi x - wi\xi x)^i.$$

§. 11.

Die beiden ersten so eben gefundenen Gleichungen zwischen den hypercyclischen Functionen haben sich, wie man sieht, nicht bloss in reeller Gestalt ergeben, sondern sie sind auch algebraisch und rational, hingegen die dritte jener Gleichungen ist transcendent und zugleich imaginär. Diese letzte ist nicht allgemein auflösbar. Desshalb kann mit ihrer Hilfe auch die schon vorhin angedeutete Aufgabe, nähmlich aus dem gegebenen Werthe einer hypercyclischen Function die drei übrigen zu berechnen, nicht gelöst werden. Die beiden ersten in §. 10. aufgestellten Gleichungen können daher nur dazu dienen, zwei von jenen Functionen zu bestimmen, wenn die zwei anderen als bekannt angenommen werden. Auch die Auflösung dieser Aufgabe ist nicht ohne Schwierigkeit, weil sie in der Regel auf Gleichungen des vierten Grades führt, deren Wurzeln im allgemeinen wieder nur durch imaginäre Zahlformen dargestellt werden können. Nur in den zwei Fällen, wenn entweder φx und ψx oder χx und ξx als gegeben angenommen werden, lässt sich die Auflösung der beiden obigen durch blosse Gleichungen des zweiten Grades bewerkstelligen. Diese beiden Fälle sind es daher allein, auf welche ich mich hier beschränken will. Betrachtet man zuerst χx und ξx als gegeben, so wird man aus jenen Gleichungen finden:

$$\varphi x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left[\sqrt{((1-2\chi x.\xi x)^2 + (\chi x^2 - \xi x^2)^2)} + 1 - 2\chi x.\xi x\right]},$$

$$\psi x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left[\sqrt{((1-2\chi x.\xi x)^2 + (\chi x^2 - \xi x^2)^2)} - 1 + 2\chi x.\xi x\right]};$$

sobald hingegen φx und ψx als bekannt angenommen werden, erhält man daraus:

$$\chi x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left[\sqrt{((1-\varphi x^2 + \psi x^2)^2 + 4\varphi x^2.\psi x^2)} + 2\varphi x.\psi x\right]},$$

$$\xi x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left[\sqrt{((1-\varphi x^2 + \psi x^2)^2 + 4\varphi x^2.\psi x^2)} - 2\varphi x.\psi x\right]}.$$

Diese Werthe lassen sich noch in andere Formen bringen, welche zwar mehr verwickelt sind, als die vorstehenden, die aber dennoch in manchen Fällen von Nutzen sein können. Solche veränderte Formen findet man dadurch, indem man entweder

$$\varphi x + \psi x = y \qquad \text{und} \qquad \varphi x - \psi x = z$$

oder auch

$$\chi x + \xi x = y \qquad \text{und} \qquad \chi x - \xi x = z$$

setzt; dann aus den Gleichungen des §. 10. die Werthe von y und z bestimmt und aus diesen entweder φx und ψx oder χx und ξx ableitet. Die Resultate dieser Rechnung, die zu einfach ist, um eine umständliche Auseinandersetzung zu erfordern, sind im ersten Falle:

$$\begin{aligned}\varphi x = \; & \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\sqrt{((1-2\chi x.\xi x)^2+(\chi x^2-\xi x^2)^2)}+\chi x^2-\xi x^2\right]} \\ & +\tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\sqrt{((1-2\chi x.\xi x)^2+(\chi x^2-\xi x^2)^2)}-\chi x^2+\xi x^2\right]},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi x = \; & \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\sqrt{((1-2\chi x.\xi x)^2+(\chi x^2-\xi x^2)^2)}+\chi x^2-\xi x^2\right]} \\ & -\tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\sqrt{((1-2\chi x.\xi x)^2+(\chi x^2-\xi x^2)^2)}-\chi x^2+\xi x^2\right]};\end{aligned}$$

und im zweiten Falle:

$$\begin{aligned}\chi x = \; & \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\sqrt{((1-\varphi x^2+\psi x^2)^2+4\varphi x^2.\psi x^2)}+1-\varphi x^2+\psi x^2\right]} \\ & +\tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\sqrt{((1-\varphi x^2+\psi x^2)^2+4\varphi x^2.\psi x^2)}-1+\varphi x^2-\psi x^2\right]},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi x = \; & \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\sqrt{((1-\varphi x^2+\psi x^2)^2+4\varphi x^2.\psi x^2)}+1-\varphi x^2+\psi x^2\right]} \\ & -\tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\sqrt{((1-\varphi x^2+\psi x^2)^2+4\varphi x^2.\psi x^2)}-1+\varphi x^2-\psi x^2\right]}.\end{aligned}$$

§. 12.

Mit Hilfe der eben aufgestellten Formeln kann die dritte in §. 10. gefundene Gleichung dergestalt abgeändert werden, dass sie nicht die sämmtlichen hypercyclischen Functionen enthalte, sondern nur zwei derselben und zwar entweder φx und ψx oder χx und ξx. Es bedarf dazu eigentlich nichts weiter, als in jener Gleichung anstatt der zwei wegzuschaffenden Functionen ihre Werthe aus §. 11. zu substituiren. Allein die auf solche Art unmittelbar sich ergebenden Gleichungen sind überaus complicirt und bedürfen sehr bedeutender Verkürzungen, um auf den einfachsten Ausdruck gebracht zu werden. Zur leichteren Vornahme dieser Verkürzungen setzen wir:

$$1-\varphi x^2+\psi x^2=A \quad \text{und} \quad 2\varphi x.\psi x=B,$$

so ist vermöge §. 11.:

$$\chi x=\frac{\surd 2}{2}\surd(\surd(A^2+B^2)+B) \quad \text{und} \quad \xi x=\frac{\surd 2}{2}\surd(\surd(A^2+B^2)-B),$$

folglich

$$wi\chi x=\frac{(1+i)}{2}\surd(\surd(A^2+B^2)+B)$$

und

$$w\xi x=\frac{(1-i)}{2}\surd(\surd(A^2+B^2)-B),$$

und daher

$$wi\chi x-w\xi x=\frac{(1+i)}{2}\surd(\surd(A^2+B^2)+B)-\frac{(1-i)}{2}\surd(\surd(A^2+B^2)-B).$$

Auf gleiche Weise findet man auch

$$w\chi x-wi\xi x=\frac{(1-i)}{2}\surd(\surd(A^2+B^2)+B)-\frac{(1+i)}{2}\surd(\surd(A^2+B^2)-B).$$

Durch Erhebung zur zweiten Potenz ergibt sich hieraus, wie man leicht sich überzeugen wird,

$$(wi\chi x-w\xi x)^2=-A+Bi \quad \text{und} \quad (w\chi x-wi\xi x)^2=-A-Bi.$$

Mithin ist

$$wi\chi x-w\xi x=\pm i\surd(A-Bi) \quad \text{und} \quad w\chi x-wi\xi x=\pm i\surd(A+Bi).$$

Bei diesem Verfahren bleiben die Vorzeichen auf der rechten Seite unentschieden. Diess kann auch nach der Natur des Gegenstandes nicht anders sein, weil es dabei offenbar auf die Zeichen ankommt, mit welchen die auf der rechten Seite auszuziehenden Wurzeln genommen werden. Um nun hier nichts unbestimmt zu lassen, stellen wir uns vor, dass bei der Entwicklung von $\surd(A-Bi)$ das Vorzeichen des ersten Gliedes mit jenem von $wi\chi x-w\xi x$ übereinstimme. Daraus folgt:

$$wi\chi x-w\xi x=+i\surd(A-Bi)=i\surd(1-\varphi x^2+\psi x^2-2i\varphi x.\psi x).$$

Ferner geht der auf der linken Seite befindliche Ausdruck $wi\chi x-w\xi x$ durch die blosse Veränderung des Zeichens von i in $w\chi x-wi\xi x$ über. Es muss daher die nähmliche Veränderung auch auf der rechten Seite vorgenommen werden, und somit ist

$$w\chi x - wi\xi x = -i\sqrt{(A+Bi)} = -i\sqrt{(1-\varphi x^2+\psi x^2+2i\varphi x.\psi x)}.$$

Werden endlich diese nunmehr auch dem Zeichen nach völlig festgestellten Werthe in der dritten Gleichung des §. 10. substituirt, so nimmt dieselbe folgende Form an:

$$\varphi x + i\psi x + i\sqrt{(1-\varphi x^2+\psi x^2-2i\varphi x.\psi x)}$$
$$= (\varphi x - i\psi x - i\sqrt{(1-\varphi x^2+\psi x^2+2i\varphi x.\psi x)})^i.$$

Ganz auf dieselbe Weise findet man auch:

$$\varphi x + i\psi x = \sqrt{(1-2\chi x.\xi x + i\chi x^2 - i\xi x^2)},$$
$$\varphi x - i\psi x = \sqrt{(1-2\chi x.\xi x - i\chi x^2 + i\xi x^2)};$$

und daher durch Substitution dieser Werthe zwischen den Functionen χx und ξx die Gleichung:

$$wi\chi x - w\xi x + \sqrt{(1-2\chi x.\xi x + i\chi x^2 - i\xi x^2)}$$
$$= (w\chi x - wi\xi x + \sqrt{(1-2\chi x.\xi x - i\chi x^2 + i\xi x^2)})^i.$$

§. 13.

Obgleich sich, wie wir eben gesehen haben, zwischen den Functionen φx und ψx, wie auch zwischen χx und ξx, nur transcendente und zugleich imaginäre Gleichungen aufstellen lassen, unterliegt es doch keiner Schwierigkeit, zwischen den nähmlichen Functionen Differentialgleichungen ausfindig zu machen, die nicht nur reell, sondern deren Differentialquotienten sogar algebraisch sind. Denn differentiirt man die in §. 2. angegebenen Reihen, so wird man sich sogleich überzeugen, dass

$$\frac{d\varphi x}{dx} = -\xi x, \quad \frac{d\chi x}{dx} = \varphi x, \quad \frac{d\psi x}{dx} = \chi x, \quad \frac{d\xi x}{dx} = \psi x$$

sei. Durch Multiplication der ersten und dritten, dann auch der zweiten und vierten dieser Gleichungen erhält man hieraus:

$$\chi x.\frac{d\varphi x}{dx} = -\xi x.\frac{d\psi x}{dx} \quad \text{und} \quad \psi x.\frac{d\chi x}{dx} = \varphi x.\frac{d\xi x}{dx},$$

und wenn man in der ersten von diesen neuen Gleichungen anstatt χx und ξx, in der andern aber anstatt φx und ψx die Werthe aus §. 11. substituirt, kommen die beiden Differentialgleichungen zum Vorscheine:

$$\sqrt{[\sqrt{((1-\varphi x^2+\psi x^2)^2+4\varphi x^2.\psi x^2)}+2\varphi x.\psi x]}d\varphi x$$
$$= -\sqrt{[\sqrt{((1-\varphi x^2+\psi x^2)^2+4\varphi x^2.\psi x^2)}-2\varphi x.\psi x]}d\psi x,$$

und

$$\sqrt{[\sqrt{((1-2\chi x.\xi x)^2+(\chi x^2-\xi x^2)^2)}-1+2\chi x.\xi x]}d\chi x$$
$$=\sqrt{[\sqrt{((1-2\chi x.\xi x)^2+(\chi x^2-\xi x^2)^2)}+1-2\chi x.\xi x]}d\xi x.$$

§. 14.

Diese beiden Differentialgleichungen sind, wie eine leichte Untersuchung zeigt, nicht unmittelbar integrabel. Auch dürfte es schwer sein, bei ihnen die Absonderung der Veränderlichen zu bewirken oder einen integrirenden Factor ausfindig zu machen. Da aber zwischen den hypercyclischen Functionen φx, ψx und χx, ξx sowohl diese Differentialgleichungen als auch gleichzeitig die in §. 12. gefundenen Gleichungen als bestehend erwiesen sind, so müssen diese letzteren allerdings als Integrale der anderen betrachtet werden, nur sind sie, weil sie keine unbestimmten Constanten enthalten, nicht die allgemeinen, sondern nur besondere Integrale, worin die Constanten dergestalt bestimmt sind, dass für $x=0$ zugleich $\varphi x=1$, $\chi x=0$, $\psi x=0$ und $\xi x=0$ wird. Wir sind daher aus dem Vorhergehenden berechtigt zu schliessen, sobald zwischen zwei Veränderlichen y und z eine der beiden Differentialgleichungen

$$\sqrt{[\sqrt{((1-y^2+z^2)^2+4y^2z^2)}+2yz]}dy$$
$$=-\sqrt{[\sqrt{((1-y^2+z^2)^2+4y^2z^2)}-2yz]}dz$$

oder auch

$$\sqrt{[\sqrt{((1-2yz)^2+(y^2-z^2)^2)}-1+2yz]}dy$$
$$=\sqrt{[\sqrt{((1-2yz)^2+(y^2-z^2)^2)}+1-2yz]}dz$$

als bestehend gegeben sein sollte, müssen hiezu beziehungsweise die Gleichungen

$$y+iz+i\sqrt{(1-y^2+z^2-2iyz)}=(y-iz-i\sqrt{(1-y^2+z^2+2iyz)})^i$$

oder

$$wiy-wz+\sqrt{(1-2yz+iy^2-iz^2)}=(wy-wiz+\sqrt{(1-2yz-iy^2+iz^2)})^i$$

als besondere Integrale gehören, unter der Voraussetzung, dass in der ersten gleichzeitig $y=1$ und $z=0$, in der andern hingegen $y=0$ und $z=0$ sei.

Auf den ersten Anblick scheint durch diese Kenntniss eigentlich nichts gewonnen zu sein, da die aufgestellten beiden besonderen Integralgleichungen wegen ihrer transcendenten und imaginären Form eine directe Auflösung nicht zulassen und daher keine

der zwei Veränderlichen aus dem gegebenen Werthe der anderen durch diese Gleichungen unmittelbar berechnet werden kann. Indem wir aber nunmehr wissen, dass das Verhalten der zwei Veränderlichen y und z in dem ersten Gleichungspaare dasselbe sei, wie der beiden hypercyclischen Functionen φx und ψx, in dem anderen hingegen wie χx und ξx, so kann dieser Umstand dazu benützt werden, um wenigstens auf indirectem Wege die Auflösung der obigen Gleichungen zu erhalten. Denn nimmt man die gegebene Veränderliche y oder z als Werth der entsprechenden hypercyclischen Function an, nähmlich in der ersten Differentialgleichung y für φx und z für ψx, in der zweiten Gleichung aber y für χx und z für ξx; so lässt sich daraus, wie diess späterhin ausführlich gezeigt werden wird, zuerst der zugehörige Werth von x und hieraus ferner auch die andere hypercyclische Function als Werth der zweiten Veränderlichen bestimmen, wodurch eben die Auflösung der Gleichung bewerkstelliget erscheint.

§. 15.

Die beiden in §. 13. gefundenen Differentialgleichungen können durch Multiplication mit schicklichen Factoren auf andere zuweilen minder zusammengesetzte Formen gebracht werden. So z. B. erhält man daraus, indem man die erste mit

$$\sqrt{[\sqrt{((1-\varphi x^2+\psi x^2)^2+4\varphi x^2.\psi x^2)}-2\varphi x.\psi x]},$$

die zweite hingegen mit

$$\sqrt{[\sqrt{((1-2\chi x.\xi x)^2+(\chi x^2-\xi x^2)^2)}-1+2\chi x.\xi x]}$$

multiplicirt, die beiden neuen weit einfacheren Differentialgleichungen

$$(1-\varphi x^2+\psi x^2)d\varphi x$$
$$=-[\sqrt{((1-\varphi x^2+\psi x^2)^2+4\varphi x^2.\psi x^2)}-2\varphi x.\psi x]d\psi x$$

und

$$[\sqrt{((1-2\chi x.\xi x)^2+(\chi x^2-\xi x^2)^2)}-1+2\chi x.\xi x]d\chi x=(\chi x^2-\xi x^2)d\xi x.$$

Es ist jedoch sichtbar, dass durch diese Umwandlungen die früher vorhanden gewesene gleichförmige Anordnung der Veränderlichen in beiden Theilen der Gleichungen verloren gegangen ist, ohne dass in Bezug auf leichtere Ausführung der Integration irgend etwas Wesentliches gewonnen wurde. Zugleich darf nicht übersehen werden, dass durch solche Multiplicationen zuweilen particuläre Auflösungen in die Differentialgleichungen gebracht

werden können, welche denselben in ihrer früheren Form nicht zukommen. Das vorstehende Beispiel zeigt diess ganz deutlich, indem den beiden hier zuletzt gefundenen Differentialgleichungen die particulären Auflösungen

$$1-\varphi x^2+\psi x^2=0 \quad \text{und} \quad \chi x^2-\xi x^2=0$$

beziehungsweise Genüge leisten, ohne dass dieselben den Gleichungen des §. 13. entsprechen.

§. 16.

Indem man die in §. 13. aufgestellten Werthe der Differential-quotienten aller hypercyclischen Functionen wiederholt differentiirt, erhält man

$$\frac{d^2\varphi x}{dx^2}=-\frac{d\xi x}{dx}=-\psi x,\quad \frac{d^3\varphi x}{dx^3}=-\frac{d\psi x}{dx}=-\chi x,\quad \frac{d^4\varphi x}{dx^4}=-\frac{d\chi x}{dx}=-\varphi x,$$

$$\frac{d^2\chi x}{dx^2}=\frac{d\varphi x}{dx}=-\xi x,\quad \frac{d^3\chi x}{dx^3}=-\frac{d\xi x}{dx}=-\psi x,\quad \frac{d^4\chi x}{dx^4}=-\frac{d\psi x}{dx}=-\chi x,$$

$$\frac{d^2\psi x}{dx^2}=\frac{d\chi x}{dx}=\varphi x,\quad \frac{d^3\psi x}{dx^3}=\frac{d\varphi x}{dx}=-\xi x,\quad \frac{d^4\psi x}{dx^4}=-\frac{d\xi x}{dx}=-\psi x,$$

$$\frac{d^2\xi x}{dx^2}=\frac{d\psi x}{dx}=\chi x,\quad \frac{d^3\xi x}{dx^3}=\frac{d\chi x}{dx}=\varphi x,\quad \frac{d^4\xi x}{dx^4}=\frac{d\varphi x}{dx}=-\xi x.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass jede der vier hypercyclischen Functionen die Eigenschaft besitzt, dass ihr vierter Differentialquotient wieder der ursprünglichen Function, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen, gleich ist, oder mit anderen Worten, jede von ihnen ist eine Auflösung der linearen Differentialgleichung des vierten Grades

$$\frac{d^4y}{dx^4}=-y \quad \text{oder} \quad d^4y+ydx^4=0.$$

Demnach besteht das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung in:

$$y=C_1.\varphi x+C_2.\chi x+C_3.\psi x+C_4.\xi x,$$

wenn durch C_1, C_2, C_3, C_4 vier willkürliche Constanten bezeichnet werden.

§. 17.

Den vorhergehend angeführten höheren Differentialquotienten der hypercyclischen Functionen liegt die Voraussetzung zum Grunde, dass dabei x als absolut veränderlich und φx, χx, ψx, ξx als davon abhängig betrachtet worden ist. Es könnte jedoch in manchen Fällen erwünscht sein, jene Gleichungen dergestalt abzuändern, dass darin eine der hypercyclischen Functionen als ursprünglich veränderlich und x als Function derselben angesehen werde. Diese Umänderung kann ohne Schwierigkeit entweder mit Hilfe der allgemeinen zu diesem Zwecke in der Differentialrechnung aufgestellten Regeln oder auch dadurch bewerkstelliget werden, indem man einen jeden der im Anfange des §. 13. gefundenen Differentialquotienten noch ferner drei Mal unter der Voraussetzung differentiirt, dass die zuerst differentiirte hypercyclische Function absolut veränderlich sei, und dann in der letzten so erhaltenen Gleichung die aus den früheren Gleichungen hergenommenen Werthe der anderen hypercyclischen Functionen an ihrer Stelle substituirt. Auf jede dieser beiden Arten kommt für die Function φx folgende Differentialgleichung zum Vorschein:

$$(d^4x.dx^2-10d^3x.d^2x.dx+15(d^2x)^3).d\varphi x-\varphi x.dx^7=0.$$

Für die drei anderen hypercyclischen Functionen ergeben sich eben solche Differentialgleichungen, die aus der angeführten durch blosse Vertauschung des Functionszeichens φ mit einem der übrigen χ, ψ oder ξ entstehen.

§. 18.

Da wir in §. 13. gesehen haben, dass die Differentialquotienten der hypercyclischen Functionen selbst wieder solche Functionen sind, so müssen durch Umkehrung jener Formeln auch die Integrale derselben ebenfalls dergleichen Functionen sein, und es ist zugleich einleuchtend, dass sich auf diese Grundintegrale andere mehr zusammengesetzte auf sehr mannigfaltige Weise werden zurückführen lassen. Die Anzahl solcher Integrale ist zu gross oder eigentlich unbeschränkt, als dass versucht oder erwartet werden könnte, eine vollständige Aufzählung derselben hier vorzunehmen, sie würde auch erst später möglich sein, nachdem wir in der Untersuchung der Eigenschaften der hypercyclischen Functionen weiter fortgeschritten sein werden. Desshalb will ich gegenwärtig nur einige der einfachsten hieher gehörigen Integrale als Beispiele anführen und auch in der Folge höchstens durch kurze Andeu-

tungen auf eine Erweiterung dieser Formeln hinweisen. Es ist nähmlich:

$$\int \varphi x dx = \chi x + C,\quad \int \chi x dx = \psi x + C,\quad \int \psi x dx = \xi x + C,$$

$$\int \xi x dx = -\varphi x + C,\quad \int \varphi x^2 dx = \frac{x}{4} + \tfrac{3}{4}\varphi x \,.\, \chi x + \tfrac{1}{4}\psi x \,.\, \xi x + C,$$

$$\int \varphi x \,.\, \chi x dx = \tfrac{1}{2}\chi x^2 + C,\ \int \varphi x \,.\, \psi x dx = \tfrac{1}{8}\xi 2x + C,\ \int \varphi x \,.\, \xi x dx = -\tfrac{1}{2}\varphi x^2 + C,$$

$$\int \chi x^2 dx = \tfrac{3}{4}\chi x \,.\, \psi x - \tfrac{1}{4}\varphi x \,.\, \xi x + C,\quad \int \chi x \,.\, \psi x dx = \tfrac{1}{2}\psi x^2 + C,$$

$$\int \chi x \,.\, \xi x dx = \frac{x}{4} - \tfrac{1}{8}\chi 2x + C,\ \int \psi x^2 dx = -\frac{x}{4} + \tfrac{3}{4}\psi x \,.\, \xi x + \tfrac{1}{4}\varphi x \,.\, \chi x + C,$$

$$\int \psi x \,.\, \xi x dx = \tfrac{1}{2}\xi x^2 + C,\quad \int \xi x^2 dx = \tfrac{1}{4}\chi x \,.\, \psi x - \tfrac{3}{4}\varphi x \,.\, \xi x + C,$$

$$\int \frac{\varphi x}{\chi x} dx = l\chi x + C,$$

$$\int \frac{\chi x}{\psi x} = l\psi x + C,\quad \int \frac{\psi x}{\xi x} dx = l\xi x + C,\quad \int \frac{\xi x}{\varphi x} dx = -l\varphi x + C.$$

Hiebei muss noch bemerkt werden, dass die Richtigkeit mehrerer der angeführten Integrale zwar erst aus dem sogleich Nachfolgenden mit Leichtigkeit und unmittelbar sich erkennen lassen wird, aber auch mit Hilfe der in §. 4. oder §. 6. enthaltenen Werthe ohne besondere Schwierigkeit nachgewiesen werden kann.

§. 19.

Bei den bisher erwiesenen Eigenschaften der hypercyclischen Functionen ist die Veränderliche x durchgängig als mit dem nähmlichen Werthe behaftet angenommen worden. Wir müssen nunmehr zur Vergleichung jener Functionen für verschiedene, jedoch unter einander in einem bestimmten Zusammenhange stehende, Werthe der Veränderlichen schreiten. Die hauptsächlichsten zu diesem Behufe dienlichen Formeln findet man ganz leicht, indem man in den Ausdrücken des §. 4. oder §. 6. y anstatt x setzt und dann die hiedurch zum Vorscheine kommenden Werthe mit den früheren einzeln multiplicirt. Auf diese Weise wird man sich von der Richtigkeit folgender Gleichungen überzeugen:

$$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2(\varphi x \,.\, \varphi y - \psi x \,.\, \psi y),$$

$$\chi(x+y) + \chi(x-y) = 2(\chi x \,.\, \varphi y - \xi x \,.\, \psi y),$$

$$\psi(x+y) + \psi(x-y) = 2(\psi x \,.\, \varphi y + \varphi x \,.\, \psi y),$$

$$\xi(x+y)+\xi(x-y)=2(\xi x.\varphi y+\chi x.\psi y),$$
$$\varphi(x+y)-\varphi(x-y)=-2(\xi x.\chi y+\chi x.\xi y),$$
$$\chi(x+y)-\chi(x-y)=2(\varphi x.\chi y-\psi x.\xi y),$$
$$\psi(x+y)-\psi(x-y)=2(\chi x.\chi y-\xi x.\xi y),$$
$$\xi(x+y)-\xi(x-y)=2(\psi x.\chi y+\varphi x.\xi y).$$

§. 20.

Indem man die vier ersten mit den vier letzten vorstehenden Gleichungen paarweise addirt und subtrahirt, ergeben sich daraus folgende Werthe:

$$\varphi(x+y)=\varphi x.\varphi y-\chi x.\xi y-\psi x.\psi y-\xi x.\chi y,$$
$$\chi(x+y)=\varphi x.\chi y+\chi x.\varphi y-\psi x.\xi y-\xi x.\psi y,$$
$$\psi(x+y)=\varphi x.\psi y+\chi x.\chi y+\psi x.\varphi y-\xi x.\xi y,$$
$$\xi(x+y)=\varphi x.\xi y+\chi x.\psi y+\psi x.\chi y+\xi x.\varphi y,$$
$$\varphi(x-y)=\varphi x.\varphi y+\chi x.\xi y-\psi x.\psi y+\xi x.\chi y,$$
$$\chi(x-y)=-\varphi x.\chi y+\chi x.\varphi y+\psi x.\xi y-\xi x.\psi y,$$
$$\psi(x-y)=\varphi x.\psi y-\chi x.\chi y+\psi x.\varphi y+\xi x.\xi y,$$
$$\xi(x-y)=-\varphi x.\xi y+\chi x.\psi y-\psi x.\chi y+\xi x.\varphi y.$$

Diese Ausdrücke, wenngleich sie etwas mehr zusammengesetzt sind, besitzen dennoch eine augenfällige Analogie mit den Formeln, durch welche die Sinus und Cosinus der Summe und des Unterschiedes zweier Bogen dargestellt zu werden pflegen. Wirklich sind auch die ersteren eben so hier, wie die letzteren in der Goniometrie eine ungemein reichhaltige Quelle der mannigfaltigsten Folgerungen, so dass beinahe die ganze Theorie der hypercyclischen Functionen aus ihnen hergeleitet werden kann. Die wichtigsten dieser Folgerungen sollen nun etwas näher betrachtet werden, um daraus die eigenthümliche Beschaffenheit jener Functionen vollständiger beurtheilen zu können, als diess aus den früher erwiesenen Eigenschaften möglich ist.

§. 21.

Um mit dem einfachsten zu beginnen, setzen wir in den vier ersten Formeln des §. 19. $y=x$, indem zugleich bemerkt werden

muss, dass es ganz überflüssig wäre, die ähnliche Substitution auch in den vier anderen Formeln vorzunehmen, weil daraus entweder die gleichen Resultate wie früher sich ergeben, oder insofern sie von diesen verschieden ausfallen, diess auf die Gleichungen des §. 10. führen würde, die wir bereits kennen. Durch die angegebene Substitution erhalten wir mit Berücksichtigung der eben bezeichneten Gleichungen:

$$\varphi 2x = 2(\varphi x^2 - \psi x^2) - 1 = 1 - 4\chi x . \xi x,$$

$$\chi 2x = 2(\varphi x . \chi x - \psi x . \xi x),$$

$$\psi 2x = 4\varphi x . \psi x = 2(\chi x^2 - \xi x^2),$$

$$\xi 2x = 2(\varphi x . \xi x + \chi x . \psi x).$$

Durch diese Ausdrücke sind wir offenbar in den Stand gesetzt, aus den bekannten hypercyclischen Functionen für irgend einen Werth der Veränderlichen x die Functionen für den zweifachen Werth $2x$ zu finden.

§. 22.

Die eben gelöste Aufgabe kann auch umgekehrt gestellt und demnach verlangt werden, aus den gegebenen hypercyclischen Functionen für den zweifachen Werth $2x$ dieselben für den einfachen Werth x zu berechnen. Diess hat keine Schwierigkeit, sobald die beiden Functionen $\varphi 2x$ und $\psi 2x$ als bekannt angenommen werden, denn man erhält durch die Auflösung der vorhergehenden Gleichungen:

$$\varphi x = \tfrac{1}{2}\sqrt{[\sqrt{((1+\varphi 2x)^2 + \psi 2x^2)} + 1 + \varphi 2x]},$$

$$\chi x = \tfrac{1}{2}\sqrt{[\sqrt{((1-\varphi 2x)^2 + \psi 2x^2)} + \psi 2x]},$$

$$\psi x = \tfrac{1}{2}\sqrt{[\sqrt{((1+\varphi 2x)^2 + \psi 2x^2)} - 1 - \varphi 2x]},$$

$$\xi x = \tfrac{1}{2}\sqrt{[\sqrt{((1-\varphi 2x)^2 + \psi 2x^2)} - \psi 2x]}.$$

Es ist klar, dass diese Formeln gebraucht werden können, um aus den gegebenen Werthen von φx und ψx jene von $\varphi\frac{x}{2}$, $\chi\frac{x}{2}$, $\psi\frac{x}{2}$ und $\xi\frac{x}{2}$ zu finden, indem man darin x anstatt $2x$ und folglich $\frac{x}{2}$ anstatt x substituirt.

Ferner verdient es kaum erwähnt zu werden, dass die hier erhaltenen Ausdrücke eine ganz ähnliche Zerlegung gestatten,

wie die gleichgeltenden des §. 11., da wir hievon in der Folge keinen Gebrauch machen wollen. Aus demselben Grunde sollen auch die weiter möglichen Fälle, wenn nähmlich nicht $\varphi 2x$ und $\psi 2x$, sondern irgend ein anderes Paar aus den hypercyclischen Functionen von $2x$ als bekannt angenommen wird, ganz mit Stillschweigen übergangen werden.

§. 23.

Setzt man in den Formeln des §. 19. durchgängig yi anstatt y und substituirt dann anstatt der einzelnen hypercyclischen Functionen von yi ihre Werthe aus §. 3., so kommen folgende, für imaginäre Werthe der Veränderlichen geltende Gleichungen zum Vorscheine:

$$\varphi(x+yi)+\varphi(x-yi)=2(\varphi x.\varphi y+\psi x.\psi y),$$
$$\chi(x+yi)+\chi(x-yi)=2(\chi x.\varphi y+\xi x.\psi y),$$
$$\psi(x+yi)+\psi(x-yi)=2(\psi x.\varphi y-\varphi x.\psi y),$$
$$\xi(x+yi)+\xi(x-yi)=2(\xi x.\varphi y-\chi x.\psi y),$$
$$\varphi(x+yi)-\varphi(x-yi)=2i(\chi x.\xi y-\xi x.\chi y),$$
$$\chi(x+yi)-\chi(x-yi)=2i(\psi x.\xi y+\varphi x.\chi y),$$
$$\psi(x+yi)-\psi(x-yi)=2i(\xi x.\xi y+\chi x.\chi y),$$
$$\xi(x+yi)-\xi(x-yi)=-2i(\varphi x.\xi y-\psi x.\chi y).$$

Diese acht Gleichungen enthalten eben so, wie diess bei den acht Gleichungen des §. 19. der Fall ist, die sämmtlichen 16 Producte je zweier hypercyclischer Functionen von x und von y. Desshalb können umgekehrt die Werthe der 16 Producte aus den bezeichneten 16 Gleichungen gefunden werden. Man wird auf diese Art mit Weglassung derjenigen Producte, welche aus den wirklich angeführten durch eine blosse Verwechselung der Buchstaben x und y hervorgehen, erhalten:

$$4\varphi x.\varphi y=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\varphi(x+yi)+\varphi(x-yi),$$
$$4\varphi x.\chi y=\chi(x+y)-\chi(x-y)-i\chi(x+yi)+i\chi(x-yi),$$
$$4\varphi x.\psi y=\psi(x+y)+\psi(x-y)-\psi(x+yi)-\psi(x-yi),$$
$$4\varphi x.\xi y=\xi(x+y)-\xi(x-y)+i\xi(x+yi)-i\xi(x-yi),$$
$$4\chi x.\chi y=\psi(x+y)-\psi(x-y)-i\psi(x+yi)+i\psi(x-yi),$$
$$4\chi x.\psi y=\xi(x+y)+\xi(x-y)-\xi(x+yi)-\xi(x-yi),$$

$$4\chi x.\xi y = -\varphi(x+y) + \varphi(x-y) - i\varphi(x+yi) + i\varphi(x-yi),$$
$$4\psi x.\psi y = -\varphi(x+y) - \varphi(x-y) + \varphi(x+yi) + \varphi(x-yi),$$
$$4\psi x.\xi y = -\chi(x+y) + \chi(x-y) - i\chi(x+yi) + i\chi(x-yi),$$
$$4\xi x.\xi y = -\psi(x+y) + \psi(x-y) - i\psi(x+yi) + i\psi(x-yi).$$

Mittelst dieser Ausdrücke lässt sich jedes Product zweier beliebigen hypercyclischen Functionen, und durch wiederholte Anwendung derselben Formeln auch ein Product von drei oder noch mehreren solchen Functionen in eine blosse Summe oder Unterschied von eben dergleichen Functionen verwandeln, was hier die nähmlichen Dienste zu leisten vermag, wie die ähnlichen Verwandlungen der Producte mehrerer Sinus oder Cosinus in blosse Summen oder Unterschiede derselben.

Um z. B. den Ausdruck $\varphi mx.\psi nx.dx$ zu integriren, verwandle man das Product $\varphi mx.\psi nx$ mittelst der dritten obigen Formel, indem man darin mx anstatt x und nx anstatt y setzt. Dadurch erhält man:

$$\varphi mx.\psi nx = \tfrac{1}{4}\psi(m+n)x + \tfrac{1}{4}\psi(m-n)x - \tfrac{1}{4}\psi(m+ni)x - \tfrac{1}{4}\psi(m-ni)x,$$

und hieraus vermöge §. 18.:

$$\int\varphi mx.\psi nx.dx$$
$$= \frac{\xi(m+n)x}{4(m+n)} + \frac{\xi(m-n)x}{4(m-n)} - \frac{\xi(m+ni)x}{4(m+ni)} - \frac{\xi(m-ni)x}{4(m-ni)} + C,$$

Dieses Integral erscheint allerdings theilweise unter imaginärer Form. Dasselbe kann jedoch sogleich in eine durchgängig reelle Gestalt gebracht werden, wenn man die Functionen $\xi(m+ni)x$ und $\xi(m-ni)x$ vermöge §. 20. zerlegt, anstatt der Functionen der einfach imaginären Veränderlichen nxi ihre Werthe aus §. 3. setzt und dann die Glieder gehörig abkürzt. Auf diese Art wird man finden:

$$\int\varphi mx.\psi nx.dx = \frac{\xi(m+n)x}{4(m+n)} + \frac{\xi(m-n)x}{4(m-n)}$$
$$+ \frac{m(\chi mx.\psi nx - \xi mx.\varphi nx) + n(\varphi mx.\xi nx - \psi mx.\chi nx)}{2(m^2+n^2)} + C.$$

§. 24.

Unter den Producten, deren Werthe in §. 23. gefunden wurden, verdienen diejenigen besonders hervorgehoben zu werden,

in welchen die beiden Factoren einerlei hyperbolische Function sind. Nimmt man in diesen vier Producten $y=x$ an, so gehen dieselben in zweite Potenzen über und man erhält:

$$\varphi x^2 = \tfrac{1}{4}(\varphi 2x + 1 + \varphi(1+i)x + \varphi(1-i)x),$$

$$\chi x^2 = \tfrac{1}{4}(\psi 2x - i\psi(1+i)x + i\psi(1-i)x),$$

$$\psi x^2 = \tfrac{1}{4}(-\varphi 2x - 1 + \varphi(1+i)x + \varphi(1-i)x),$$

$$\xi x^2 = \tfrac{1}{4}(-\psi 2x - i\psi(1+i)x + i\psi(1-i)x),$$

oder auch

$$\varphi x^2 = \tfrac{1}{4}(\varphi 2x + 1 + 2\varphi(1+i)x),$$

$$\chi x^2 = \tfrac{1}{4}(\psi 2x - 2i\psi(1+i)x),$$

$$\psi x^2 = \tfrac{1}{4}(-\varphi 2x - 1 + 2\varphi(1+i)x),$$

$$\xi x^2 = \tfrac{1}{4}(-\psi 2x - 2i\psi(1+i)x),$$

weil $\varphi(1-i)x = \varphi(1+i)x$ und $\psi(1-i)x = -\psi(1+i)x$ ist, wie man sich aus der Beschaffenheit der Reihen des §. 2. oder auch aus den im Anfange des §. 23. enthaltenen Gleichungen leicht überzeugt, wenn man in der dritten und fünften derselben $y=x$ setzt.

Multiplicirt man die eben gefundenen Werthe von φx^2, χx^2, ψx^2, ξx^2 nach der Ordnung wieder durch φx, χx, ψx, ξx und verwandelt die auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sich ergebenden Producte vermöge §. 23. neuerdings in Summen oder Unterschiede, so werden dadurch die dritten Potenzen der hypercyclischen Functionen in blosse Summen oder Unterschiede solcher Functionen umgeformt, und es ist zugleich klar, dass durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens auch die vierten und noch höheren Potenzen in Summen und Unterschiede verwandelt werden können, was in manchen Fällen von Nutzen sein mag.

So z. B. findet man auf die eben bezeichnete Weise:

$$\varphi x^3 = \frac{1}{16}(\varphi 3x + 9\varphi x + 3\varphi(2+i)x + 3\varphi(2-i)x)$$

und folglich ist

$$\int \varphi x^3 dx = \frac{1}{16}\left(\frac{\chi 3x}{3} + 9\chi x + \frac{3\chi(2+i)x}{2+i} + \frac{3\chi(2-i)x}{2-i}\right) + C.$$

Die Vrrwandlung dieses letzten Werthes in eine durchaus reelle Form kann auf dieselbe Art bewerkstelliget werden, welche vorhin an dem Beispiele des §. 23. gezeigt worden ist.

§. 25.

Betrachtet man das im Vorhergehenden zur Darstellung der Potenzen der hypercyclischen Functionen gebrauchte Verfahren, so wird man sich überzeugen, dass jede solche Potenz, sobald der Exponent eine ganze additive Zahl ist, als Summe oder Unterschied einer bestimmten (endlichen) Anzahl von Gliedern sich ausdrücken lässt, deren jedes nebst einem constanten Coefficienten noch eine hypercyclische Function eines Vielfachen von x als Factor enthält, wo aber unter den Vielfachen nicht bloss solche mit reellen und zwar ganzen additiven, sondern auch mit complexen Factoren vorkommen. Es muss nun gewisse Gesetze, und auch Formeln als Ausdruck derselben geben, mittelst welcher jene Darstellung in allen einzelnen Fällen in Ausführung gebracht werden kann. Ich habe solche Formeln durch Induction, als demjenigen Wege, welcher sich zuerst darbietet, um dieselben nicht nur zu finden, sondern auch, nachdem sie gefunden wurden, auf bekannte Art strenge zu erweisen, zu erhalten gesucht und auch wirklich ausfindig gemacht. Allein die hiedurch zum Vorschein gekommenen Ausdrücke haben sich so sehr zusammengesetzt gezeigt, dass ich es nicht wage, sie vollständig hier mitzutheilen, noch weniger aber den zur Erkenntniss ihrer allgemeinen Giltigkeit erforderlichen Beweis zu führen. Am wenigsten complicirt hat sich noch die Formel für die Potenzen der Function φx ergeben. Da wir nun dieser Formeln zu den ferneren Ableitungen nicht eben nothwendig bedürfen werden, will ich mich begnügen, nur die zuletzt genannte allein, mit Uebergehung der übrigen, so weit hier anzugeben, um die dabei obwaltenden Gesetze deutlich erkennen zu lassen, hingegen zur Beseitigung jeder irgend vermeidlichen Weitläufigkeit die Ansetzung der dazu gehörigen allgemeinen Glieder nicht vornehmen, wie diess auch aus dem nähmlichen Grunde bei meiner gegenwärtigen Arbeit in der Regel bisher geschehen ist und auch in der Folge der Fall sein wird. Die Formel selbst ist folgende:

$$4^{n-1}.\varphi x^n = \varphi nx + \binom{n}{1}^2.\varphi(n-2)x + \binom{n}{2}^2.\varphi(n-4)x$$

$$+ \binom{n}{3}^2.\varphi(n-6)x + \ldots.$$

$$+ \binom{n}{1}.[\varphi(n-1+i)x + \varphi(n-1-i)x]$$

$$+ \binom{n}{2}.[\varphi(n-2+2i)x + \varphi(n-2-2i)x]$$

$$+ \binom{n}{3}.[\varphi(n-3+3i)x + \varphi(n-3-3i)x]$$

$$+ \binom{n}{2}.\binom{n}{1}.[\varphi(n-3+i)x + \varphi(n-3-i)x]$$

$$+ \binom{n}{4}.[\varphi(n-4+4i)x + \varphi(n-4-4i)x].$$

$$+ \binom{n}{3}.\binom{n}{1}.[\varphi(n-4+2i)x + \varphi(n-4-2i)x]$$

$$+ \binom{n}{5}.[\varphi(n-5+5i)x + \varphi(n-5-5i)x]$$

$$+ \binom{n}{4}.\binom{n}{1}.[\varphi(n-5+3i)x + \varphi(n-5-3i)x]$$

$$+ \binom{n}{3}.\binom{n}{2}.[\varphi(n-5+i)x + \varphi(n-5-i)x]$$

$$+ \binom{n}{6}.[\varphi(n-6+6i)x + \varphi(n-6-6i)x]$$

$$+ \binom{n}{5}.\binom{n}{1}.[\varphi(n-6+4i)x + \varphi(n-6-4i)x]$$

$$+ \binom{n}{4}.\binom{n}{2}.[\varphi(n-6+2i)x + \varphi(n-6-2i)x]$$

u. s. f.

Zur richtigen Anwendung dieser Formel muss bemerkt werden, dass die in den zwei ersten Zeilen befindlichen reellen Vielfachen von x nur so weit fortgesetzt werden dürfen, als die Factoren von x nicht subtractiv werden; bei den nachfolgenden complexen

Vielfachen von x aber darf der Factor von i niemals grösser sein, als der dabei stehende reelle Theil des Coefficienten von x, wesshalb alle Glieder, worin diess der Fall sein würde, ganz hinweggelassen werden müssen. Für alle geraden Werthe von n ist noch insbesondere beizufügen, dass von demjenigen Gliede der zwei ersten Zeilen, welches von x unabhängig ausfällt, nur der vierte Theil, von denjenigen unter den übrigen Gliedern hingegen, bei welchen der Factor von i dem dabei befindlichen reellen Theile des Coefficienten von x eben gleich ist, nur die Hälfte dessen genommen werden darf, was in Gemässheit der Formel als Coefficient desselben Gliedes sich ergeben würde.

Diesen Bemerkungen gemäss erhält man z. B. für $n=6$:

$$\begin{aligned}4^5.\varphi x^6 = \; & \varphi 6x + 6^2.\varphi 4x + 15^2.\varphi 2x + \tfrac{1}{4}.20^2 + 6[\varphi(5+i)x + \varphi(5-i)x] \\ & + 15[\varphi(4+2i)x + \varphi(4-2i)x] + \tfrac{1}{2}.20[\varphi(3+3i)x + \varphi(3-3i)x] \\ & + 15.6[\varphi(3+i)x + \varphi(3-i)x] \\ & + \tfrac{1}{2}.20.6[\varphi(2+2i)x + \varphi(2-2i)x] + \tfrac{1}{2}.20.15[\varphi(1+i)x + \varphi(1-i)x].\end{aligned}$$

Man wird wohl ohnehin nicht übersehen können, dass dieser Werth etwas kürzer sich darstellen lasse, weil $\varphi(3+3i)x = \varphi(3-3i)x$, $\varphi(2+2i)x = \varphi(2-2i)x$, $\varphi(1+i)x = \varphi(1-i)x$ ist; nur zum Behufe der leichteren Vergleichung mit der allgemeinen Formel wurde er im unabgekürzten Zustande hieher gesetzt.

Späterhin soll noch ein anderes Verfahren angedeutet werden, mittelst dessen gleichfalls die Potenzen der hypercyclischen Functionen durch Functionen vielfacher Werthe der Veränderlichen ausgedrückt werden können.

§. 26.

Durch Hilfe der Gleichungen des §. 19. sind wir in den Stand gesetzt, die hypercyclischen Functionen für alle in einer arithmetischen Progression fortschreitenden Werthe der Veränderlichen aus einander nach und nach herzuleiten. Durch Substitution von $x+(n-1)y$ anstatt x erhält man nähmlich daraus:

$$\varphi(x+ny) = 2\varphi y.\varphi(x+(n-1)y) - 2\psi y.\psi(x+(n-1)y) - \varphi(x+(n-2)y),$$

$$\chi(x+ny) = 2\varphi y.\chi(x+(n-1)y) - 2\psi y.\xi(x+(n-1)y) - \chi(x+(n-2)y),$$

$$\psi(x+ny) = 2\varphi y.\psi(x+(n-1)y) + 2\psi y.\varphi(x+(n-1)y) - \psi(x+(n-2)y),$$

$$\xi(x+ny) = 2\varphi y.\xi(x+(n-1)y) + 2\psi y.\chi(x+(n-1)y) - \xi(x+(n-2)y)$$

und auch:

$$\varphi(x+ny)=-2\chi y.\xi(x+(n-1)y)-2\xi y.\chi(x+(n-1)y)+\varphi(x+(n-2)y),$$

$$\chi(x+ny)=\ \ 2\chi y.\varphi(x+(n-1)y)-2\xi y.\psi(x+(n-1)y)+\chi(x+(n-2)y),$$

$$\psi(x+ny)=\ \ 2\chi y.\chi(x+(n-1)y)-2\xi y.\xi(x+(n-1)y)+\psi(x+(n-2)y),$$

$$\xi(x+ny)=\ \ 2\chi y.\psi(x+(n-1)y)+2\xi y.\varphi(x+(n-1)y)+\xi(x+(n-2)y).$$

Wird hierin nach und nach $x=2$, 3, 4 u. s. f. angenommen, so ergeben sich die hypercyclischen Functionen der in arithmetischer Progression fortschreitenden Werthe $x+2y$, $x+3y$, $x+4y$, u. s. f., und zwar eine jede von ihnen aus zwei verschiedenen Formeln, sobald die Functionen von x, y und $x+y$ bekannt sind.

Addirt man die vier ersten und die vier letzten vorstehenden Gleichungen paarweise zusammen und halbirt sie dann, so findet man neue zu gleichem Zwecke taugliche Formeln, in welchen die hypercyclischen Functionen für $x+ny$ nur von jenen für $x+(n-1)y$, nicht aber zugleich für $x+(n-2)y$ abhängen, Formeln, die auch unmittelbar aus §. 20. erhalten werden, indem man dort $x+(n-1)y$ anstatt x substituirt. Es ist nähmlich:

$$\varphi(x+ny)=\varphi y.\varphi(x+(n-1)y)-\chi y.\xi(x+(n-1)y)-\psi y.\psi(x+(n-1)y)$$
$$-\xi y.\chi(x+(n-1)y),$$

$$\chi(x+ny)=\varphi y.\chi(x+(n-1)y)+\chi y.\varphi(x+(n-1)y)-\psi y.\xi(x+(n-1)y)$$
$$-\xi y.\psi(x+(n-1)y),$$

$$\psi(x+ny)=\varphi y.\psi(x+(n-1)y)+\chi y.\chi(x+(n-1)y)+\psi y.\varphi(x+(n-1)y)$$
$$-\xi y.\xi(x+(n-1)y),$$

$$\xi(x+ny)=\varphi y.\xi(x+(n-1)y)+\chi y.\psi(x+(n-1)y)+\psi y.\chi(x+(n-1)y)$$
$$+\xi y.\varphi(x+(n-1)y).$$

§. 27.

Der einfachste Fall zur Anwendung der vorhergehenden Ausdrücke tritt dann ein, wenn in denselben $y=x$ angenommen wird. Dadurch gehen die vier ersten in folgende über:

$$\varphi(n+1)x=2\varphi x.\varphi nx-2\psi x.\psi nx-\varphi(n-1)x,$$

$$\chi(n+1)x=2\varphi x.\chi nx-2\psi x.\xi nx-\chi(n-1)x,$$

$$\psi(n+1)x = 2\varphi x.\psi nx + 2\psi x.\varphi nx - \psi(n-1)x,$$

$$\xi(n+1)x = 2\varphi x.\xi nx + 2\psi x.\chi nx - \xi(n-1)x.$$

Die übrigen aus §. 26. durch die nähmliche Substitution sich ergebenden Werthe will ich, als für die Folge leicht entbehrlich, ganz übergehen.

Man sieht wohl auf der Stelle, dass mit Hilfe der eben gefundenen Formeln die hypercyclischen Functionen aller Vielfachen von x berechnet werden können, sobald nur jene von x bekannt sind.

Es ereignet sich zuweilen, dass man die hypercyclischen Functionen keineswegs für sämmtliche Vielfache von x, sondern entweder nur für gerade, oder auch ausschliesslich für ungerade Vielfache zu erhalten wünscht. Für solche Fälle können aus §. 26. andere hiezu bequeme Ausdrücke hergeleitet werden. Setzt man nähmlich darin zuerst $y = 2x$, so erhält man für die ungeraden Vielfachen folgende Formeln:

$$\varphi(2n+1)x = 2\varphi 2x.\varphi(2n-1)x - 2\psi 2x.\psi(2n-1)x - \varphi(2n-3)x,$$

$$\chi(2n+1)x = 2\varphi 2x.\chi(2n-1)x - 2\psi 2x.\xi(2n-1)x - \chi(2n-3)x,$$

$$\psi(2n+1)x = 2\varphi 2x.\psi(2n-1)x + 2\psi 2x.\varphi(2n-1)x - \psi(2n-3)x,$$

$$\xi(2n+1)x = 2\varphi 2x.\xi(2n-1)x + 2\psi 2x.\chi(2n-1)x - \xi(2n-3)x;$$

für gerade Vielfache aber findet man, indem man $2x$ anstatt x substituirt und zugleich $y = 2x$ setzt,

$$\varphi(2n+2)x = 2\varphi 2x.\varphi 2nx - 2\psi 2x.\psi 2nx - \varphi(2n-2)x,$$

$$\chi(2n+2)x = 2\varphi 2x.\chi 2nx - 2\psi 2x.\xi 2nx - \chi(2n-2)x,$$

$$\psi(2n+2)x = 2\varphi 2x.\psi 2nx + 2\psi 2x.\varphi 2nx - \psi(2n-2)x,$$

$$\xi(2n+2)x = 2\varphi 2x.\xi 2nx + 2\psi 2x.\chi 2nx - \xi(2n-2)x.$$

Mit den hier gefundenen Gleichungen lassen sich mancherlei Veränderungen vornehmen und mehrere verschiedenartige Folgerungen daraus ziehen, mit deren umständlicher Auseinandersetzung ich mich nicht aufhalten will, da sie uns zu ferneren Ableitungen nicht nothwendig sind. Nur die Bemerkung glaube ich ausdrücklich beifügen zu müssen, dass sich daraus auf dem Wege der Induction allgemeine Formeln aufstellen lassen, mittelst welcher die hypercyclischen Functionen der vielfachen Werthe nx durch die Functionen des einfachen Werthes x ausgedrückt werden, und zwar können in diesen Formeln nur Producte und

Potenzen dieser letzteren Functionen mit ganzen additiven Exponenten vorkommen, wie diess aus der Beschaffenheit der vorstehenden Gleichungen sogleich einleuchtet. Es genügt jedoch, hier nur die Möglichkeit solcher allgemeiner Formeln von der angezeigten Beschaffenheit erkannt zu haben, die wirkliche Herleitung derselben soll auf eine andere Weise bewerkstelligt werden, welche besser geeignet ist, eine Uebersicht über die Gesammtheit aller verschiedenen hiebei möglichen Ausdrücke zu gewähren.

§. 28.

Bezeichnen wir der Kürze wegen die in §. 9. angegebenen Werthe der Potenzen e^{xw}, e^{-xw}, e^{xwi}, e^{-xwi} durch die einzelnen Buchstaben A, B, C, D, nähmlich:

$$A = e^{xw} = \varphi x - i\psi x - w\chi x - wi\xi x,$$

$$B = e^{-xw} = \varphi x - i\psi x - w\chi x - wi\xi x,$$

$$C = e^{xwi} = \varphi x + i\psi x + wi\chi x - w\xi x,$$

$$D = e^{-xwi} = \varphi x + i\psi x - wi\chi x + w\xi x.$$

Durch Erhebung zum Exponenten n erhält man hieraus

$$A^n = e^{nxw}, \quad B^n = e^{-nxw}, \quad C^n = e^{nxwi}, \quad D^n = e^{-nxwi}.$$

Aus §. 6. ergibt sich aber, wenn dort nx anstatt x gesetzt wird:

$$\varphi nx = \tfrac{1}{4}(e^{nxw} + e^{-nxw} + e^{nxwi} + e^{-nxwi}),$$

$$\chi nx = \frac{wi}{4}(e^{nxw} - e^{-nxw} - ie^{nxwi} + ie^{-nxwi}),$$

$$\psi nx = \frac{i}{4}(e^{nxw} + e^{-nxw} - e^{nxwi} - e^{-nxwi}),$$

$$\xi nx = \frac{w}{4}(-e^{nxw} + e^{-nxw} - ie^{nxwi} + ie^{-nxwi});$$

folglich ist, wenn hierin anstatt der Potenzen von e die angegebenen Werthe eingeführt werden,

$$\varphi nx = \tfrac{1}{4}(A^n + B^n + C^n + D^n),$$

$$\chi nx = \frac{wi}{4}(A^n - B^n - iC^n + iD^n)$$

$$\psi nx = \frac{i}{4}(A^n + B^n - C^n - D^n),$$

$$\xi nx = \frac{w}{4}(-A^n + B^n - iC^n + iD^n).$$

Substituirt man nun in diesen Formeln anstatt A, B, C, D, ihre gleich anfangs aufgestellten aus §. 9. entnommenen Werthe, so erhält man allgemeine Ausdrücke für die hypercyclischen Functionen von nx durch die Functionen der einfachen Werthe x, deren Analogie mit denjenigen, durch welche die Sinus und Cosinus der vielfachen aus den Sinus und Cosinus der einfachen Bogen gefunden werden, nicht verkannt werden kann.

§. 29.

In den vorhin angegebenen Werthen von A, B, C, D sind, wie man sieht, die sämmtlichen hypercyclischen Functionen von x enthalten, daher müssen diese letzteren auch in den daraus hervorgehenden Ausdrücken für φnx, χnx, ψnx, ξnx sämmtlich vorkommen, wenn nicht etwa zufällig eine von ihnen durch gegenseitige Aufhebung der damit behafteten Glieder daraus verschwinden sollte. Wir wissen aber aus §. 11., dass die beiden Functionen χx und ξx durch die beiden andern φx und ψx, wie auch umgekehrt φx, ψx durch χx, ξx dargestellt werden können. Substituirt man nun in den Ausdrücken für A, B, C, D entweder anstatt χx und ξx oder anstatt φx und ψx ihre Werthe aus §. 11., so werden darin im ersten Falle nur die Functionen φx, ψx, im anderen Falle hingegen nur χx, ξx noch vorkommen, so dass dann auch die hypercyclischen Functionen von nx ausschliesslich nur entweder durch φx und ψx oder durch χx und ξx ausgedrückt gefunden werden. Die durch die eben angezeigten Substitutionen anfänglich sehr verwickelt sich ergebenden Ausdrücke für A, B, C, D werden durch die bereits in §. 12. vorgenommenen Verkürzungen ungemein vereinfacht. Wir haben nämlich dort gefunden, dass

$$wi\chi x - w\xi x = i\sqrt{(1 - \varphi x^2 + \psi x^2 - 2i\varphi x.\psi x)},$$

$$w\chi x - wi\xi x = -i\sqrt{(1 - \varphi x^2 + \psi x^2 + 2i\varphi x.\psi x)},$$

$$\varphi x + i\psi x = \sqrt{(1 - 2\chi x.\xi x + i\chi x^2 - i\xi x^2)},$$

$$\varphi x - i\psi x = \sqrt{(1 - 2\chi x.\xi x - i\chi x^2 + i\xi x^2)}$$

sei. Setzt man nun entweder die beiden ersten oder die beiden letzten von diesen Werthen in den Ausdrücken für A, B, C, D, so gehen dieselben entweder in

$$A=\varphi x-i\psi x-i\sqrt{(1-\varphi x^2+\psi x^2+2i\varphi x.\psi x)},$$
$$B=\varphi x-i\psi x+i\sqrt{(1-\varphi x^2+\psi x^2+2i\varphi x.\psi x)},$$
$$C=\varphi x+i\psi x+i\sqrt{(1-\varphi x^2+\psi x^2-2i\varphi x.\psi x)},$$
$$D=\varphi x+i\psi x-i\sqrt{(1-\varphi x^2+\psi x^2-2i\varphi x.\psi x)},$$

oder im zweiten Falle in:

$$A=w\chi x-wi\xi x+\sqrt{(1-2\chi x.\xi x-i\chi x^2+i\xi x^2)},$$
$$B=-w\chi x+wi\xi x+\sqrt{(1-2\chi x.\xi x-i\chi x^2+i\xi x^2)},$$
$$C=wi\chi x-w\xi x+\sqrt{(1-2\chi x.\xi x+i\chi x^2-i\xi x^2)},$$
$$D=-wi\chi x+w\xi x+\sqrt{(1-2\chi x.\xi x+i\chi x^2-i\xi x^2)}$$

über. Je nachdem dann entweder die vier ersten oder die vier letzten von diesen Werthen in den Ausdrücken des §. 28. für φnx, χnx, ψnx, ξnx angewendet werden, findet man diese Functionen entweder durch φx und ψx oder durch χx und ξx dargestellt.

§. 30.

Dem Vorhergehenden gemäss besitzen wir drei verschiedene Arten von Ausdrücken, mittelst welcher die hypercyclischen Functionen von nx durch die Functionen von x dargestellt werden können, nähmlich entweder durch die sämmtlichen Functionen φx, χx, ψx, ξx oder ausschliesslich durch φx, ψx oder endlich durch χx, ξx. Die weitere Entwicklung dieser Ausdrücke kann auf überaus mannigfaltige Weise bewerkstelliget werden, je nachdem man die Potenzen A^n, B^n, C^n, D^n nach steigenden oder fallenden Potenzen der einzelnen Functionen φx, χx, ψx, ξx ordnen will, so dass eine vollständige Ausführung aller solchen Entwicklungen nothwendig einen sehr beträchtlichen Umfang einnehmen müsste. Diess liegt jedoch gänzlich ausser dem Zwecke meiner gegenwärtigen Arbeit. Ich begnüge mich daher, für jede hypercyclische Function nur eine einzige solche Entwicklung wirklich vorzunehmen, welche gleichsam als Probe dienen soll, um zu zeigen, welcher Behandlung der Gegenstand fähig sei, und zugleich eine Vorstellung von der Beschaffenheit der auf diese Art zu erlangenden Resultate zu geben.

Setzen wir zur Verkürzung der Ausdrücke

$$y=\varphi x-i\psi x \quad \text{und} \quad z=\varphi x+i\psi x,$$

so ist

$$1-y^2=1-\varphi x^2+\psi x^2+2i\varphi x.\psi x,\quad 1-z^2=1-\varphi x^2+\psi x^2-2i\varphi x.\psi x$$

und folglich, wenn diese Werthe in den vier ersten in §. 29. gefundenen Ausdrücken von A, B, C, D substituirt werden,

$$A=y-i\sqrt{(1-y^2)}=y-\sqrt{(y^2-1)},\quad B=y+i\sqrt{(1-y^2)}=y+\sqrt{(y^2-1)},$$
$$C=z+i\sqrt{(1-z^2)}=z+\sqrt{(z^2-1)},\quad D=z-i\sqrt{(1-z^2)}=z-\sqrt{(z^2-1)}.$$

Nun überzeugt man sich auf demselben Wege, welchen Lagrange bei der Entwicklung der Sinus und Cosinus vielfacher Bogen betreten hat, ohne desshalb hier eine umständliche Auseinandersetzung nothwendig zu machen, dass

$$A^n=(y-\sqrt{(y^2-1)})^n=(2y)^{-n}+\frac{n}{1}(2y)^{-n-2}+\frac{n(n+3)}{1.2}(2y)^{-n-4}$$
$$+\frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}(2y)^{-n-6}+\ldots,$$

$$B^n=(y+\sqrt{(y^2-1)})^n=(2y)^n-\frac{n}{1}(2y)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}(2y)^{n-4}$$
$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2y)^{n-6}+\ldots,$$

$$C^n=(z+\sqrt{(z^2-1)})^n=(2z)^n-\frac{n}{1}(2z)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}(2z)^{n-4}$$
$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2z)^{n-6}+\ldots,$$

$$D^n=(z-\sqrt{(z^2-1)})^n=(2z)^{-n}+\frac{n}{1}(2z)^{-n-2}+\frac{n(n+3)}{1.2}(2z)^{-n-4}$$
$$+\frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}(2z)^{-n-6}+\ldots$$

ist. Werden diese Werthe in den Ausdrücken von φnx und ψnx des §. 28. substituirt, und zugleich diejenigen Glieder, welche gleiche Potenzen von y und von z enthalten, gehörig zusammengezogen, so findet man:

$$\varphi nx = \tfrac{1}{4}\Big[2^n(y^n + z^n) - \frac{n}{1}2^{n-2}(y^{n-2} + z^{n-2}) + \frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-4}(y^{n-4} + z^{n-4})$$

$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-6}(y^{n-6} + z^{n-6}) + \ldots.$$

$$+ 2^{-n}(y^{-n} + z^{-n}) + \frac{n}{1}2^{-n-2}(y^{-n-2} + z^{-n-2})$$

$$+ \frac{n(n+3)}{1.2}2^{-n-4}(y^{-n-4} + z^{-n-4})$$

$$+ \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}2^{-n-6}(y^{-n-6} + z^{-n-6}) \ldots.\Big],$$

$$\psi nx = \frac{i}{4}\Big[2^n(y^n - z^n) - \frac{n}{1}2^{n-2}(y^{n-2} - z^{n-2}) + \frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-4}(y^{n-4} - z^{n-4})$$

$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-6}(y^{n-6} - z^{n-6}) + \ldots.$$

$$+ 2^{-n}(y^{-n} - z^{-n}) + \frac{n}{1}2^{-n-2}(y^{-n-2} - z^{-n-2})$$

$$+ \frac{n(n+3)}{1.2}2^{-n-4}(y^{-n-4} - z^{-n-4})$$

$$+ \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}2^{-n-6}(y^{-n-6} - z^{-n-6}) + \ldots.\Big].$$

Ferner ist

$$y^n = (\varphi x - i\psi x)^n = \varphi x^n - \binom{n}{1}i\varphi x^{n-1}.\psi x - \binom{n}{2}\varphi x^{n-2}.\psi x^2$$

$$+ \binom{n}{3}i\varphi x^{n-3}.\psi x^3 + \ldots.,$$

$$z^n = (\varphi x + i\psi x)^n = \varphi x^n + \binom{n}{1}i\varphi x^{n-1}.\psi x - \binom{n}{2}\varphi x^{n-2}.\psi x^2$$

$$- \binom{n}{3}i\varphi x^{n-3}.\psi x^3 + \ldots.;$$

daher

$$y^n + z^n = 2\Big[\varphi x^n - \binom{n}{2}\varphi x^{n-2}.\psi x^2 + \binom{n}{4}\varphi x^{n-4}.\psi x^4$$

$$- \binom{n}{6}\varphi x^{n-6}.\psi x^6 + \ldots.\Big],$$

$$y^n - z^n = -2i\Big[\binom{n}{1}\varphi x^{n-1}\psi x - \binom{n}{3}\varphi x^{n-3}.\psi x^3 + \binom{n}{5}\varphi x^{n-5}.\psi x^5$$

$$- \binom{n}{7}\varphi x^{n-7}.\psi x^7 + \ldots\Big].$$

Nimmt man in diesen beiden letzten Gleichungen nach und nach $n-2$, $n-4$, $n-6$, u. s. f., dann auch $-n$, $-n-2$, $-n-4$, $-n-6$, u. s. f. anstatt n und setzt die hiedurch zum Vorscheine kommenden Werthe in den vorhergehenden Ausdrücken von φnx und ψnx, so erhält man endlich:

$$\varphi nx = 2^{n-1}[\varphi x^n - \binom{n}{2}\varphi x^{n-2}.\psi x^2 + \binom{n}{4}\varphi x^{n-4}.\psi x^4 - \binom{n}{6}\varphi x^{n-6}.\psi x^6 + \ldots]$$

$$-\frac{n}{1}.2^{n-3}[\varphi x^{n-2} - \binom{n-2}{2}\varphi x^{n-4}.\psi x^2 + \binom{n-2}{4}\varphi x^{n-6}.\psi x^4 - \binom{n-2}{6}\varphi x^{n-8}.\psi x^6 + \ldots]$$

$$+\frac{n(n-3)}{1.2}.2^{n-5}[\varphi x^{n-4} - \binom{n-4}{2}\varphi x^{n-6}.\psi x^2 + \binom{n-4}{4}\varphi x^{n-8}.\psi x^4 - \binom{n-4}{6}\varphi x^{n-10}.\psi x^6 + \ldots]$$

$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}.2^{n-7}[\varphi x^{n-6} - \binom{n-6}{2}\varphi x^{n-8}.\psi x^2 + \binom{n-6}{4}\varphi x^{n-10}.\psi x^4 - \binom{n-6}{6}\varphi x^{n-12}.\psi x^6 + \ldots]$$

u. s. f.

$$+2^{-n-1}[\varphi x^{-n} - \binom{n+1}{2}\varphi x^{-n-2}.\psi x^2 + \binom{n+3}{4}\varphi x^{-n-4}.\psi x^4 - \binom{n+5}{6}\varphi x^{-n-6}.\psi x^6 + \ldots]$$

$$+\frac{n}{1}.2^{-n-3}[\varphi x^{-n-2} - \binom{n+3}{2}\varphi x^{-n-4}.\psi x^2 + \binom{n+5}{4}\varphi x^{-n-6}.\psi x^4 - \binom{n+7}{6}\varphi x^{-n-8}.\psi x^6 + \ldots]$$

$$+\frac{n(n+3)}{1.2}.2^{-n-5}[\varphi x^{-n-4} - \binom{n+5}{2}\varphi x^{-n-6}.\psi x^2 + \binom{n+7}{4}\varphi x^{-n-8}.\psi x^4 - \binom{n+9}{6}\varphi x^{-n-10}.\psi x^6 + \ldots]$$

$$+\frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}.2^{-n-7}[\varphi x^{-n-6} - \binom{n+7}{2}\varphi x^{-n-8}.\psi x^2 + \binom{n+9}{4}\varphi x^{-n-10}.\psi x^4 - \binom{n+11}{6}\varphi x^{-n-12}.\psi x^6 + \ldots]$$

u. s. f.

und

$$\psi nx = 2^{n-1}\Big[\binom{n}{1}\varphi x^{n-1}.\psi x - \binom{n}{3}\varphi x^{n-3}.\psi x^3 + \binom{n}{5}\varphi x^{n-5}.\psi x^5 - \binom{n}{7}\varphi x^{n-7}.\psi x^7 + \ldots\ldots\Big]$$

$$-\frac{n}{1}.2^{n-3}\Big[\binom{n-2}{1}\varphi x^{n-3}.\psi x - \binom{n-2}{3}\varphi x^{n-5}.\psi x^3 + \binom{n-2}{5}\varphi x^{n-7}.\psi x^5 - \binom{n-2}{7}\varphi x^{n-9}.\psi x^7 + \ldots\ldots\Big]$$

$$+\frac{n(n-3)}{1.2}.2^{n-5}\Big[\binom{n-4}{1}\varphi x^{n-5}.\psi x - \binom{n-4}{3}\varphi x^{n-7}.\psi x^3 + \binom{n-4}{5}\varphi x^{n-9}.\psi x^5 - \binom{n-4}{7}\varphi x^{n-11}.\psi x^7 + \ldots\ldots\Big]$$

$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}.2^{n-7}\Big[\binom{n-6}{1}\varphi x^{n-7}.\psi x - \binom{n-6}{3}\varphi x^{n-9}.\psi x^3 + \binom{n-6}{5}\varphi x^{n-11}.\psi x^5 - \binom{n-6}{7}\varphi x^{n-13}.\psi x^7 + \ldots\ldots\Big]$$

u. s. f.

$$-2^{-n-1}\Big[\binom{n}{1}\varphi x^{-n-1}.\psi x - \binom{n+2}{3}\varphi x^{-n-3}.\psi x^3 + \binom{n+4}{5}\varphi x^{-n-5}.\psi x^5 - \binom{n+6}{7}\varphi x^{-n-7}.\psi x^7 + \ldots\Big]$$

$$-\frac{n}{1}.2^{-n-3}\Big[\binom{n+2}{1}\varphi x^{-n-3}.\psi x - \binom{n+4}{3}\varphi x^{-n-5}.\psi x^3 + \binom{n+6}{5}\varphi x^{-n-7}.\psi x^5 - \binom{n+8}{7}\varphi x^{-n-9}.\psi x^7 + \ldots\Big]$$

$$-\frac{n(n+3)}{1.2}.2^{-n-5}\Big[\binom{n+4}{1}\varphi x^{-n-5}.\psi x - \binom{n+6}{3}\varphi x^{-n-7}.\psi x^3 + \binom{n+8}{5}\varphi x^{-n-9}.\psi x^5 - \binom{n+10}{7}\varphi x^{-n-11}.\psi x^7 + \ldots\Big]$$

$$-\frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}.2^{-n-7}\Big[\binom{n+6}{1}\varphi x^{-n-7}.\psi x - \binom{n+8}{3}\varphi x^{-n-9}.\psi x^3 + \binom{n+10}{5}\varphi x^{-n-11}.\psi x^5 - \binom{n+12}{7}\varphi x^{-n-13}.\psi x^7 + \ldots\Big]$$

u. s. f.

Jeder der beiden gefundenen Ausdrücke besteht aus zwei deutlich von einander geschiedenen Doppelreihen, die aber, wie man sich leicht überzeugt, so beschaffen sind, dass sie wechselseitig in einander übergehen, wenn in denselben das Vorzeichen von n geändert wird. Die erste Doppelreihe enthält in beiden Ausdrücken, sobald n additiv ist, anfangs eine oder mehrere Potenzen von φx mit additiven Exponenten, erst im weiteren Verlaufe kommen darin Potenzen von φx mit subtractiven Exponenten vor, hingegen in der zweiten Doppelreihe befinden sich in dem vorausgesetzten Falle keine anderen Potenzen von φx als nur solche mit subtractiven Exponenten. Ganz das Umgekehrte tritt ein, sobald n subtractiv angenommen wird. In diesem Falle enthält nur die zweite Doppelreihe anfänglich Potenzen von φx mit additiven Exponenten, in den späteren Gliedern aber, so wie in der ganzen ersten Doppelreihe kommen keine anderen Potenzen von φx zum Vorscheine, als nur solche mit subtractiven Exponenten. Nun wissen wir aus §. 27., dass in den Ausdrücken für φnx und ψnx ausschliesslich nur Potenzen von φx mit additiven Exponenten vorkommen können. Wir sind daher berechtigt zu schliessen, dass in den vorstehenden zwei Formeln diejenigen Glieder, welche Potenzen von φx mit subtractiven Exponenten enthalten, gegenseitig unter einander sich vollständig aufheben müssen. Durch eine genaue Untersuchung und Vergleichung der einzelnen mit solchen Potenzen versehenen Glieder in den beiden zusammengehörigen Doppelreihen wird man diess auch vollkommen bestätiget finden. Dieser Umstand erleichtert den Gebrauch der beiden obigen Formeln sehr beträchtlich, weil man dabei diejenigen Glieder, worin Potenzen von φx mit subtractiven Exponenten vorkommen sollen, gar nicht zu entwickeln nöthig hat, da sie ohnehin später wieder wegfallen würden. Man braucht daher stets nur eine der beiden Doppelreihen, entweder die erste oder die zweite anzuwenden, je nachdem n additiv oder subtractiv ist, und auch bei derselben nicht weiter vorzugehen, bis darin Glieder mit subtractiven Exponenten von φx erscheinen sollen.

§. 31.

Um auch für die Functionen χnx und ξnx ähnliche Ausdrücke zu erhalten, besteht das leichteste Mittel darin, die vorhergehend für φnx und ψnx gefundenen zu differentiiren. Beschränkt man sich hiebei zur Verkürzung der Formeln auf den Fall, wenn n additiv ist, was auch zum wirklichen Gebrauche vollkommen zureicht, weil ohnehin $\chi(-nx) = -\chi nx$ und $\xi(-nx) = -\xi nx$ ist, so wird man auf diese Art nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors n erhalten:

$$\chi nx = 2^{n-1}.\left\{\begin{array}{l} \chi x\left[\varphi x^{n-1}-\binom{n-1}{2}\varphi x^{n-3}.\psi x^2-\binom{n-1}{4}\varphi x^{n-5}.\psi x^4-\binom{n-1}{6}\varphi x^{n-7}.\psi x^6+\ldots\right] \\ -\xi x\left[\binom{n-1}{1}\varphi x^{n-2}.\psi x-\binom{n-1}{3}\varphi x^{n-4}.\psi x^3+\binom{n-1}{5}\varphi x^{n-6}.\psi x^5-\binom{n-1}{7}\varphi x^{n-8}.\psi x^7+\ldots\right] \end{array}\right\}$$

$$-\binom{n-2}{1}.2^{n-3}\left\{\begin{array}{l} \chi x\left[\varphi x^{n-3}-\binom{n-3}{2}\varphi x^{n-5}.\psi x^2+\binom{n-3}{4}\varphi x^{n-7}.\psi x^4-\binom{n-3}{6}\varphi x^{n-9}.\psi x^6+\ldots\right] \\ -\xi x\left[\binom{n-3}{2}\varphi x^{n-4}.\psi x-\binom{n-3}{3}\varphi x^{n-6}.\psi x^3+\binom{n-3}{5}\varphi x^{n-8}.\psi x^5-\binom{n-3}{7}\varphi x^{n-10}.\psi x^7+\ldots\right] \end{array}\right\}$$

$$+\binom{n-3}{2}.2^{n-5}\left\{\begin{array}{l} \chi x\left[\varphi x^{n-5}-\binom{n-5}{2}\varphi x^{n-7}.\psi x^2+\binom{n-5}{4}\varphi x^{n-9}.\psi x^4-\binom{n-5}{6}\varphi x^{n-11}.\psi x^6+\ldots\right] \\ -\xi x\left[\binom{n-5}{1}\varphi x^{n-6}.\psi x-\binom{n-5}{3}\varphi x^{n-8}.\psi x^3+\binom{n-5}{5}\varphi x^{n-10}.\psi x^5-\binom{n-5}{7}\varphi x^{n-12}.\psi x^7+\ldots\right] \end{array}\right\}$$

$$+\binom{n-4}{3}.2^{n-7}\left\{\begin{array}{l} \chi x\left[\varphi x^{n-7}-\binom{n-7}{2}\varphi x^{n-9}.\psi x^2+\binom{n-7}{4}\varphi x^{n-11}.\psi x^4-\binom{n-7}{6}\varphi x^{n-13}.\psi x^6+\ldots\right] \\ -\xi x\left[\binom{n-7}{1}\varphi x^{n-8}.\psi x-\binom{n-7}{3}\varphi x^{n-10}.\psi x^3+\binom{n-7}{5}\varphi x^{n-12}.\psi x^5-\binom{n-7}{7}\varphi x^{n-14}.\psi x^7+\ldots\right] \end{array}\right\}$$

u. s. f.

$$\xi nx = \begin{array}{l} 2^{n-1}. \left\{ \begin{array}{l} \xi x \left[\varphi x^{n-1} - \binom{n-1}{2} \varphi x^{n-3}.\psi x^2 + \binom{n-1}{4} \varphi x^{n-5}.\psi x^4 - \binom{n-1}{6} \varphi x^{n-7}.\psi x^6 + \ldots \right] \\ + \chi x \left[\binom{n-1}{1} \varphi x^{n-2}.\psi x - \binom{n-1}{3} \varphi x^{n-4}.\psi x^3 + \binom{n-1}{5} \varphi x^{n-6}.\psi x^5 - \binom{n-1}{7} \varphi x^{n-8}.\psi x^7 + \ldots \right] \end{array} \right\} \\ - \binom{n-2}{1}.2^{n-3} \left\{ \begin{array}{l} \xi x \left[\varphi x^{n-3} - \binom{n-3}{2} \varphi x^{n-5}.\psi x^2 + \binom{n-3}{4} \varphi x^{n-7}.\psi x^4 - \binom{n-3}{6} \varphi x^{n-9}.\psi x^6 + \ldots \right] \\ + \chi x \left[\binom{n-3}{1} \varphi x^{n-4}.\psi x - \binom{n-3}{3} \varphi x^{n-6}.\psi x^3 + \binom{n-3}{5} \varphi x^{n-8}.\psi x^5 - \binom{n-3}{7} \varphi x^{n-10}.\psi x^7 + \ldots \right] \end{array} \right\} \\ + \binom{n-3}{2}.2^{n-5} \left\{ \begin{array}{l} \xi x \left[\varphi x^{n-5} - \binom{n-5}{2} \varphi x^{n-7}.\psi x^2 + \binom{n-5}{4} \varphi x^{n-9}.\psi x^4 - \binom{n-5}{6} \varphi x^{n-11}.\psi x^6 + \ldots \right] \\ + \chi x \left[\binom{n-5}{1} \varphi x^{n-6}.\psi x - \binom{n-5}{3} \varphi x^{n-8}.\psi x^3 + \binom{n-5}{5} \varphi x^{n-10}.\psi x^5 - \binom{n-5}{7} \varphi x^{n-12}.\psi x^7 + \ldots \right] \end{array} \right\} \\ - \binom{n-4}{3}.2^{n-7} \left\{ \begin{array}{l} \xi x \left[\varphi x^{n-7} - \binom{n-7}{2} \varphi x^{n-9}.\psi x^2 + \binom{n-7}{4} \varphi x^{n-11}.\psi x^4 - \binom{n-7}{6} \varphi x^{n-13}.\psi x^6 + \ldots \right] \\ + \chi x \left[\binom{n-7}{1} \varphi x^{n-8}.\psi x - \binom{n-7}{3} \varphi x^{n-10}.\psi x^3 + \binom{n-7}{5} \varphi x^{n-12}.\psi x^5 - \binom{n-7}{7} \varphi x^{n-14}.\psi x^7 + \ldots \right] \end{array} \right\} \end{array}$$

u. s. f.

Bei der Anwendung dieser zwei Ausdrücke, welche, wie schon vorher bemerkt wurde, nur für **ganze additive** Werthe von n gelten, darf in der Entwicklung ihrer Glieder nicht weiter vorgeschritten werden, bis Potenzen von φx mit subtractiven Exponenten vorkommen sollen, weil alle noch folgenden Glieder von selbst wegfallen müssen, indem sie sich mit den bereits weggelassenen aus den zweiten Doppelreichen des §. 30. entspringenden Gliedern gegenseitig aufheben.

§. 32.

In §. 30. und §. 31. ist an einigen Beispielen gezeigt worden, auf welche Weise die Entwicklung der Functionen φnx, χnx, ψnx, ξnx **unmittelbar** aus den Formeln des §. 28. oder §. 29. bewerkstelliget werden könne, ohne dabei der Reihen zu bedürfen, mittelst welcher die Sinus und Cosinus **vielfacher** durch dieselben Functionen der **einfachen** Bogen ausgedrückt werden. Will man aber diese letzteren Reihen als bekannt voraussetzen und sich darauf stützen, so wird dadurch die Arbeit nicht unbeträchtlich erleichtert. Aus §. 4. ergibt sich nähmlich, wenn dort nx anstatt x gesetzt wird,

$$\varphi nx = \frac{i}{2}(\cos nxwi + \cos nxw),$$

$$\chi nx = \frac{w}{2}(\sin nxwi + i \sin nxw),$$

$$\psi nx = \frac{i}{2}(\cos nxwi - \cos nxw),$$

$$\xi nx = \frac{w}{2}(i \sin nxwi + \sin nxw).$$

Hier können nun die imaginären Bogen $nxwi$ und nxw als **Vielfache** von xwi und xw betrachtet und demgemäss vermittelst der gedachten goniometrischen Reihen die Sinus und Cosinus jener Vielfachen durch die Sinus oder Cosinus der einfachen Bogen xwi und xw auf die bekannten verschiedenen Arten ausgedrückt werden. Setzt man dann noch anstatt $\cos xwi$, $\sin xwi$, $\cos xw$, $\sin xw$ ihre in §. 9. angegebenen Werthe, so erhält man offenbar Ausdrücke für φnx, χnx, ψnx, ξnx, welche mit denjenigen übereinstimmen müssen, die durch das vorhergehend angewendete Verfahren unmittelbar aus den Gleichungen des §. 28. abgeleitet werden können.

Ein einzelnes Beispiel wird genügen, die so eben erklärte

Methode vollkommen deutlich zu machen. Ich wähle hiezu aus den verschieden goniometrischen Reihen diejenige, mittelst welcher der Cosinus eines vielfachen durch den Cosinus des einfachen Bogens nach steigenden Potenzen geordnet gefunden wird. Dieser Reihe gemäss ist für ungerade Werthe von n:

$$\cos nxwi = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{n}{1}\cos xwi - \frac{n(n^2-1)}{3!}(\cos xwi)^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{5!}(\cos xwi)^5 - \ldots\right],$$

$$\cos nxw = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{n}{1}\cos xw - \frac{n(n^2-1)}{3!}(\cos xw)^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{5!}(\cos xw)^5 - \ldots\right];$$

und für gerade Werthe von n:

$$\cos nxwi = (-1)^{\frac{n}{2}}\left[1 - \frac{n^2}{2}(\cos xwi)^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{4!}(\cos xwi)^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{6!}(\cos xwi)^6 + \ldots\right],$$

$$\cos nxw = (-1)^{\frac{n}{2}}\left[1 - \frac{n^2}{2}(\cos xw)^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{4!}(\cos xw)^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{6!}(\cos xw)^6 + \ldots\right].$$

Durch die Substitution dieser Werthe in den obigen Ausdrücken für φnx und ψnx erhält man, wenn zugleich $\cos xwi = y$ und $\cos xw = z$ gesetzt wird, für ungerade n:

$$\varphi nx = \tfrac{1}{2}.(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{n}{1}(y+z) - \frac{n(n^2-1)}{3!}(y^3+z^3) + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{5!}(y^5+z^5) - \ldots\right],$$

$$\psi nx = \frac{i}{2}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{n}{1}(y-z) - \frac{n(n^2-1)}{3!}(y^3-z^3) + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{5!}(y^5-z^5) - \ldots\right],$$

und für gerade n:

$$\varphi nx = \frac{1}{2}.(-1)^{\frac{n}{2}}\Big[2 - \frac{n^2}{2}(y^2+z^2) + \frac{n^2(n^2-4)}{4!}(y^4+z^4) - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{6!}(y^6+z^6) + \ldots\Big],$$

$$\psi nx = \frac{i}{2}.(-1)^{\frac{n}{2}}\Big[\;-\frac{n^2}{2}(y^2-z^2) + \frac{n^2(n^2-4)}{4!}(y^4-z^4) - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{6!}(y^6-z^6) + \ldots\Big].$$

Nun ist aber vermöge §. 9.:

$$y = \cos xwi = \varphi x - i\psi x, \qquad z = \cos xw = \varphi x + i\psi x,$$

und daher

$$y + z = 2\varphi x,$$
$$y^2 + z^2 = 2(\varphi x^2 - \psi x^2),$$
$$y^3 + z^3 = 2(\varphi x^3 - 3\varphi x.\psi x^2),$$
$$y^4 + z^4 = 2(\varphi x^4 - 6\varphi x^2.\psi x^2 + \psi x^4),$$
$$y^5 + z^5 = 2(\varphi x^5 - 10\varphi x^3.\psi x^2 + 5\varphi x.\psi x^4),$$
$$y^6 + z^6 = 2(\varphi x^6 - 15\varphi x^4.\psi x^2 + 15\varphi x^2.\psi x^4 - \psi x^6),$$

u. s. f.

$$y - z = -2i\psi x,$$
$$y^2 - z^2 = -4i\varphi x.\psi x,$$
$$y^3 - z^3 = -2i(3\varphi x^2.\psi x - \psi x^3),$$
$$y^4 - z^4 = -2i(4\varphi x^3.\psi x - 4\varphi x.\psi x^3),$$
$$y^5 - z^5 = -2i(5\varphi x^4.\psi x - 10\varphi x^2.\psi x^3 + \psi x^5),$$
$$y^6 - z^6 = -2i(6\varphi x^5.\psi x - 20\varphi x^3.\psi x^3 + 6\varphi x.\psi x^5),$$

u. s. f.

Werden diese Werthe in den vorhergehenden Ausdrücken substituirt, so ergeben sich daraus endlich für ungerade n die Formeln:

$$\varphi nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big[\frac{n}{1}\varphi x - \frac{n(n^2-1)}{3!}(\varphi x^3 - 3\varphi x.\psi x^2)$$
$$+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{5!}(\varphi x^5 - 10\varphi x^3.\psi x^2 + 5\varphi x.\psi x^4) - \ldots\Big],$$

$$\psi nx = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big[\frac{n}{1}\psi x - \frac{n(n^2-1)}{3!}(\psi x^3 - 3\psi x.\varphi x^2)$$
$$+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{5!}(\psi x^5 - 10\psi x^3.\varphi x^2 + 5\psi x.\varphi x^4) - \ldots\Big];$$

hingegen für **gerade** n findet man:

$$\varphi nx = (-1)^{\frac{n}{2}}\Big[1 - \frac{n^2}{2}(\varphi x^2 - \psi x^2) + \frac{n^2(n^2-4)}{4!}(\varphi x^4 - 6\varphi x^2.\psi x^2 + \psi x^4)$$
$$-\frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{6!}(\varphi x^6 - 15\varphi x^4.\psi x^2 + 15\varphi x^2.\psi x^4 - \psi x^6) + \ldots\Big],$$

$$\psi nx = (-1)^{\frac{n+2}{2}}\Big[\frac{n^2}{2}2\varphi x.\psi x - \frac{n^2(n^2-4)}{4!}(4\varphi x^3.\psi x - 4\varphi x.\psi x^3)$$
$$+\frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{6!}(6\varphi x^5.\psi x - 20\varphi x^3.\psi x^3 + 6\varphi x.\psi x^5) - \ldots\Big].$$

§. 33.

In dem Verfahren des §. 32. kann insoferne eine Abänderung vorgenommen werden, dass man dabei anstatt der Gleichungen des §. 4. jene des §. 5. zum Grunde legt. Dadurch erhält man in der Regel mit grosser Leichtigkeit neue von den vorhergehenden **verschiedene** Entwicklungen der hypercyclischen Functionen von nx, mittelst welcher diese letzteren aber nicht bloss durch die hypercyclischen Functionen von x, sondern zugleich durch die Sinus und Cosinus der Bogen $\frac{x}{\sqrt{2}}$ und $\frac{nx}{\sqrt{2}}$ ausgedrückt werden.

Denn durch Auflösung der Gleichungen des §. 5. ergibt sich:

$$\cos\frac{xi}{\sqrt{2}} = \frac{\varphi x}{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}}, \qquad \sin\frac{xi}{\sqrt{2}} = \frac{i\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}},$$

und auch

$$\cos\frac{xi}{\sqrt{2}}=\frac{\chi x+\xi x}{\sqrt{2}.\sin\frac{x}{\sqrt{2}}},\qquad \sin\frac{xi}{\sqrt{2}}=\frac{i(\chi x-\xi x)}{\sqrt{2}.\cos\frac{x}{\sqrt{2}}}.$$

Ferner folgt aus denselben Gleichungen, wenn man darin nx anstatt x setzt,

$$\varphi nx=\cos\frac{nx}{\sqrt{2}}.\cos\frac{nxi}{\sqrt{2}},$$

$$\chi nx=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{nx}{\sqrt{2}}.\cos\frac{nxi}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\cos\frac{nx}{\sqrt{2}}.\sin\frac{nxi}{\sqrt{2}},$$

$$\psi nx=-i\sin\frac{nx}{\sqrt{2}}.\sin\frac{nxi}{\sqrt{2}},$$

$$\xi nx=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{nx}{\sqrt{2}}.\cos\frac{nxi}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\cos\frac{nx}{\sqrt{2}}.\sin\frac{nxi}{\sqrt{2}}.$$

Entwickelt man nun in diesen letzten Ausdrücken die Sinus und Cosinus des imaginären Bogens $\frac{nxi}{\sqrt{2}}$ vermittelst der goniometrischen Reihen entweder nach steigenden oder fallenden Potenzen des Sinus oder Cosinus von $\frac{xi}{\sqrt{2}}$ und substituirt anstatt der letzteren ihre vorhin angegebenen Werthe, so erhält man für die Functionen φnx, χnx, ψnx, ξnx Formeln, welche meistentheils einfacher sein werden, als vermöge §. 30. oder §. 32., in welchen aber, wie schon bemerkt wurde, auch die Sinus und Cosinus von $\frac{x}{\sqrt{2}}$ und $\frac{nx}{\sqrt{2}}$ vorkommen, die daher gleichfalls als bekannt vorausgesetzt werden müssen.

Als Beispiel zur Anwendung dieses Verfahrens nehme ich die goniometrischen Reihen, durch welche die Sinus und Cosinus eines vielfachen Bogens durch den Sinus des einfachen nach fallenden Potenzen dargestellt werden. Diesen Reihen gemäss ist für alle additiven ungeraden Werthe von n:

$$\cos\frac{nxi}{\sqrt{2}}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big[(2\sin\frac{xi}{\sqrt{2}})^{n-1}-\binom{n-2}{1}(2\sin\frac{xi}{\sqrt{2}})^{n-3}$$
$$+\binom{n-3}{2}(2\sin\frac{xi}{\sqrt{2}})^{n-5}-\binom{n-4}{3}(2\sin\frac{xi}{\sqrt{2}})^{n-7}+..\Big].\cos\frac{xi}{\sqrt{2}},$$

$$\sin\frac{nxi}{\sqrt{2}}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\tfrac{1}{2}\Big[(2\sin\frac{xi}{\sqrt{2}})^{n}-\frac{n}{1}(2\sin\frac{xi}{\sqrt{2}})^{n-2}$$
$$+\frac{n(n-3)}{1.2}(2\sin\frac{xi}{\sqrt{2}})^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2\sin\frac{xi}{\sqrt{2}})^{n-6}+..\Big],$$

folglich, wenn hierin anstatt $\cos\frac{xi}{\sqrt{2}}$ und $\sin\frac{xi}{\sqrt{2}}$ von den vorhin angegebenen Werthen die beiden ersten gesetzt und zugleich die gemeinschaftlichen Factoren i^{n-1} und i^n herausgehoben werden:

$$\cos\frac{nxi}{\sqrt{2}}=\frac{\varphi x}{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}}\left[\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-1}+\binom{n-2}{1}\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-3}\right.$$
$$\left.+\binom{n-3}{2}\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-5}+\binom{n-4}{3}\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-7}+\dots\right],$$

$$\sin\frac{nxi}{\sqrt{2}}=\frac{i}{2}\left[\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n}+\frac{n}{1}\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-4}\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-6}+\dots\right].$$

Hieraus ergeben sich nun für additive und ungerade Werthe von n folgende Formeln:

$$\varphi nx=\cos\frac{nx}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\varphi x}{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}}\left[\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-1}+\binom{n-2}{1}\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-3}\right.$$
$$\left.+\binom{n-3}{2}\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-5}+\binom{n-4}{3}\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-7}+\dots\right],$$

$$\chi nx=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{nx}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\varphi x}{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}}\left[\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-1}+\binom{n-2}{1}\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-3}\right.$$
$$\left.+\binom{n-3}{2}\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-5}+\binom{n-4}{3}\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-7}+\dots\right]$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{nx}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n}+\frac{n}{1}\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-2}\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-3)}{1.2}\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-4}+\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\left(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)^{n-6}+\dots\right],$$

$$\psi nx = \tfrac{1}{2}\sin\frac{nx}{\sqrt{2}}\Big[\Big(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big)^{n} + \frac{n}{1}\Big(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}\Big(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big)^{n-4}$$

$$+\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\Big(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big)^{n-6} + \ldots\Big],$$

$$\xi nx = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{nx}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\varphi x}{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big[\Big(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big)^{n-1} + \binom{n-2}{1}\Big(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big)^{n-3}$$

$$+\binom{n-3}{2}\Big(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big)^{n-5} + \binom{n-4}{3}\Big(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big)^{n-7} + \ldots\Big]$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{nx}{\sqrt{2}}\Big[\Big(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big)^{n} + \frac{n}{1}\Big(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big)^{n-2}$$

$$\frac{n(n-3)}{1.2}\Big(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big)^{n-4} + \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\Big(\frac{2\psi x}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}\Big)^{n-6} + \ldots\Big].$$

Bei der Anwendung dieser Ausdrücke darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass vermöge der Beschaffenheit der hiebei gebrauchten goniometrischen Reihen keiner derselben weiter fortgeführt werden darf, sobald in ihm Potenzen mit subtractiven Exponenten zum Vorschein kommen sollen.

Wollte man bei der vorstehenden Entwicklung anstatt der beiden ersten die beiden letzten gleich anfangs aufgestellten Werthe von $\cos\frac{xi}{\sqrt{2}}$ und $\sin\frac{xi}{\sqrt{2}}$ substituiren, so würde man offenbar die hypercyclischen Functionen von nx durch ganz ähnliche Reihen mittelst der beiden Functionen χx und ξx ausgedrückt finden.

§. 34.

Aus den letzten in §. 28. enthaltenen Gleichungen lassen sich umgekehrt die Werthe von A^n, B^n, C^n, D^n finden. Es ist nämlich:

$$A^n = \varphi nx - i\psi nx + w\chi nx - wi\xi nx,$$

$$B^n = \varphi nx - i\psi nx - w\chi nx + wi\xi nx,$$

$$C^n = \varphi nx + i\psi nx + wi\chi nx - w\xi nx,$$

$$D^n = \varphi nx + i\psi nx - wi\chi nx + w\xi nx.$$

Aus den nähmlichen Gleichungen des §. 28. erhält man aber auch, wenn darin $n = 1$ angenommen wird,

$$\varphi x = \tfrac{1}{4}(A + B + C + D),$$

$$\chi x = \frac{wi}{4}(A - B - iC + iD),$$

$$\psi x = \frac{i}{4}(A + B - C - D),$$

$$\xi x = \frac{w}{4}(-A + B - iC + iD);$$

woraus ferner durch Erhebung zur Potenz n folgt:

$$\varphi x^n = \frac{1}{4^n}(A + B + C + D)^n,$$

$$\chi x^n = \frac{(wi)^n}{4^n}(A - B - iC + iD)^n,$$

$$\psi x^n = \frac{i^n}{4^n}(A + B - C - D)^n,$$

$$\xi x^n = \frac{w^n}{4^n}(-A + B - iC + iD)^n.$$

Entwickelt man nun hier die auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen stehenden Potenzen vermöge des polynomischen Lehrsatzes und substituirt anstatt der einzelnen Potenzen von A, B, C, D wieder ihre aus den gleich anfangs aufgestellten Ausdrücken hergenommenen Werthe, so ergeben sich offenbar Formeln, mittelst welcher die Potenzen φx^n, χx^n, ψx^n, ξx^n durch die hypercyclischen Functionen vielfacher Werthe der Veränderlichen x ausgedrückt erscheinen, worin aber auch zugleich Producte von eben solchen Functionen vorkommen. Um noch diese letzteren wegzuschaffen, kann man sich der Gleichungen des §. 23. bedienen, mit deren Hilfe man auf Ausdrücke kommen wird, die mit den in §. 25. gefundenen übereinstimmen müssen. Ich halte jedoch den eben nachgewiesenen Weg zur Herleitung der bezeichneten Ausdrücke keineswegs für einfacher, als jenen des §. 25., schon desshalb, weil man auch hier ohne Anwendung einer Induction schwerlich zur Kenntniss der dabei obwaltenden Gesetze gelangen dürfte. Ich will daher nicht länger bei diesem Gegenstande verweilen.

§. 35.

Bevor ich den eben behandelten Theil meiner Aufgabe verlasse, um zu anderen Untersuchungen überzugehen, muss ich noch eine sehr einfache Folgerung herleiten. Setzt man nähmlich in den am Anfange des §. 34. aufgestellten Ausdrücken anstatt A, B, C, D ihre Werthe aus §. 28, so erhält man auf der Stelle folgende Gleichungen:

$$(\varphi x - i\psi x + wi\chi x - wi\xi x)^n = \varphi nx - i\psi nx + wi\chi nx - wi\xi nx,$$

$$(\varphi x - i\psi x - wi\chi x + wi\xi x)^n = \varphi nx - i\psi nx - wi\chi nx + wi\xi nx,$$

$$(\varphi x + i\psi x + wi\chi x - w\xi x)^n = \varphi nx + i\psi nx + wi\chi nx - w\xi nx,$$

$$(\varphi x + i\psi x - wi\chi x + w\xi x)^n = \varphi nx + i\psi nx - wi\chi nx + w\xi nx.$$

Die Analogie dieser Ausdrücke mit dem Moivre'schen Lehrsatze tritt so deutlich hervor, dass sie kaum erwähnt zu werden braucht; sie ist zugleich die Ursache, wesshalb ich nicht mit Stillschweigen darüber hinweggehen wollte, obgleich ich davon weder irgend eine Anwendung machen, noch auch in eine nähere Auseinandersetzung der verschiedenen Formen, deren sie fähig sind, mich einlassen oder ihre unmittelbare Zurückführung auf den Moivre'schen Lehrsatz zeigen werde.

Noch verdient ausdrücklich bemerkt zu werden, dass überall, wo im Vorhergehenden von den hypercyclischen Functionen vielfacher Werthe nx die Rede war, die Voraussetzung stillschweigend zum Grunde lag, n sei eine ganze Zahl. Die Ausdehnung der Untersuchung auf andere als ganze Werthe von n würde jedenfalls eine bedeutende Weitläufigkeit erfordern und dürfte vielleicht nicht ohne Schwierigkeit sein, wie das Beispiel der ähnlichen Ausdehnung bei den goniometrischen Functionen zeigt. Desshalb kann ich hierauf nicht näher eingehen, sondern begnüge mich mit der oben gemachten Andeutung, indem ich auch fernerhin beständig an der bisherigen Voraussetzung, dass n eine ganze Zahl bezeichne, festhalten werde.

§. 36.

Zur genauen Beurtheilung der Beschaffenheit der hypercyclischen Functionen ist es von grosser Wichtigkeit, alle diejenigen Werthe der Veränderlichen x zu kennen, für welche jede einzelne der genannten Functionen gleich 0 wird. Die Auffindung dieser

Werthe hat rücksichtlich der beiden Functionen φ und ψ durchaus keine Schwierigkeit.

Was zuerst die Function φ anbelangt, handelt es sich darum, alle reellen und imaginären Werthe von x zu bestimmen, welche der Gleichung $\varphi x = 0$, oder wenn man anstatt φx den Werth aus §. 5. nimmt, der Gleichung

$$\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{xi}{\sqrt{2}} = 0$$

Genüge leisten. Letztere lässt sich offenbar in die zwei einzelnen Gleichungen zerlegen:

$$\cos\frac{x}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{und} \quad \cos\frac{xi}{\sqrt{2}} = 0.$$

Nun ist bekannt, dass ein Cosinus nur dann gleich 0 wird, sobald der zugehörige Bogen ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist. Folglich muss, wenn n was immer für eine ganze Zahl bezeichnet, um der ersten von den beiden aufgestellten Gleichungen zu genügen, nothwendig

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \pm(2n-1)\frac{\pi}{2} \quad \text{und daher} \quad x = \pm\frac{(2n-1)\pi\sqrt{2}}{2},$$

hingegen um der zweiten Gleichung zu entsprechen,

$$\frac{xi}{\sqrt{2}} = \pm(2n-1)\frac{\pi}{2} \quad \text{und daher} \quad x = \pm\frac{(2n-1)\pi\sqrt{2}}{2}\cdot i$$

sein. Hieraus ergibt sich, dass $\varphi x = 0$ sein werde, sobald für x irgend einer der Werthe aus den beiden Reihen

$$\pm\frac{\pi\sqrt{2}}{2},\quad \pm\frac{3\pi\sqrt{2}}{2},\quad \pm\frac{5\pi\sqrt{2}}{2},\quad \pm\frac{7\pi\sqrt{2}}{2},\ldots\ldots$$

oder

$$\pm\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.i,\quad \pm\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}.i,\quad \pm\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}.i,\quad \pm\frac{7\pi\sqrt{2}}{2}.i,\ldots\ldots$$

angenommen wird, und ausser diesen beiden Reihen gibt es keinen andern weder reellen noch imaginären Werth von x, für welchen $\varphi x = 0$ sein könnte.

Der kleinste unter den eben gefundenen reellen Werthen, nähmlich $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$, spielt bei den hypercyclischen Functionen, wie

man aus dem weiteren Verlaufe der Untersuchung entnehmen wird, ungefähr dieselbe Rolle, wie bei den goniometrischen Functionen der Kreisquadrant oder $\frac{\pi}{2}$, welcher ebenfalls der kleinste Werth von x ist, für welchen $\cos x = 0$ wird. Um des häufigen Gebrauches willen, der im Nachstehenden von dem ersteren Werthe wird gemacht werden, erscheint es zweckmässig, ein möglichst einfaches Zeichen dafür anzunehmen, wozu ich wegen der eben gedachten Analogie das Zeichen π_1 wähle, so dass in Hinkunft beständig

$$\pi_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = 2{,}22144\ 14690\ 79183\ 12351$$

sein soll. Dieser Bezeichnung gemäss hat man daher für jede beliebige ganze Zahl n

$$\varphi \pm (2n-1)\pi_1 = 0 \quad \text{und auch} \quad \varphi \pm (2n-1)\pi_1 . i = 0.$$

Auf ganz gleiche Weise lassen sich alle Werthe von x finden, für welche $\psi x = 0$ wird. Denn setzt man in dieser Gleichung anstatt ψx den Werth aus §. 5., so zeigt sich, dass

$$\sin\frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \sin\frac{xi}{\sqrt{2}} = 0$$

und daher entweder

$$\sin\frac{x}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{oder} \quad \sin\frac{xi}{\sqrt{2}} = 0$$

sein müsse. Der ersten von diesen Gleichungen wird nur Genüge geleistet, wenn

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \pm n\pi \quad \text{folglich} \quad x = \pm n\pi\sqrt{2} = \pm 2n\pi_1$$

angenommen wird, für die andere Gleichung hingegen muss

$$\frac{xi}{\sqrt{2}} = \pm n\pi \quad \text{und daher} \quad x = \pm n\pi\sqrt{2} . i = \pm 2n\pi_1 . i$$

sein. Demnach ist für jede beliebige Zahl n, mit Einschluss von 0,

$$\psi \pm 2n\pi_1 = 0 \quad \text{und auch} \quad \psi \pm 2n\pi_1 . i = 0,$$

während für keinen anderen, reellen oder imaginären Werth von x, der nicht in einer der beiden Formen $\pm 2n\pi_1 = \pm n\pi\sqrt{2}$ oder $\pm 2n\pi_1 . i = \pm n\pi\sqrt{2} . i$ enthalten ist, $\psi x = 0$ sein kann.

§. 37.

Wenn für x entweder π_1 oder auch ein Vielfaches von π_1 angenommen wird, lassen sich die hypercyclischen Functionen ganz leicht in reeller Form durch Exponentialgrössen oder durch hyperbolische Functionen darstellen. Denn für $x=\pi_1=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ ist

$$\cos\frac{x}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi_1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\sin\frac{x}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

$$\cos\frac{xi}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi i}{2}=\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2}=\tfrac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}),$$

$$\sin\frac{xi}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi i}{2}=i\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2}=\frac{i}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}),$$

und folglich vermöge §. 5.

$$\varphi\pi_1=0,\quad \chi\pi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}),$$

$$\psi\pi_1=\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2}=\tfrac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}),\quad \xi\pi_1=\chi\pi_1.$$

In Bezug auf die Vielfachen von π_1 müssen wir die beiden Fälle unterscheiden, wenn entweder ein gerades oder ein ungerades Vielfaches anstatt x angenommen wird.

Für $x=2n\pi_1=n\pi\sqrt{2}$ ist

$$\cos\frac{x}{\sqrt{2}}=\cos n\pi=(-1)^n,$$

$$\sin\frac{x}{\sqrt{2}}=\sin n\pi=0;$$

$$\cos\frac{xi}{\sqrt{2}}=\cos n\pi i=\mathrm{Cos}\,n\pi=\tfrac{1}{2}(e^{n\pi}+e^{-n\pi}),$$

$$\sin\frac{xi}{\sqrt{2}}=\sin n\pi i=i\,\mathrm{Sin}\,n\pi=\frac{i}{2}(e^{n\pi}-e^{-n\pi});$$

mithin

$$\varphi 2n\pi_1 = (-1)^n . \operatorname{Cos} n\pi = \frac{(-1)^n}{2}(e^{n\pi} + e^{-n\pi}), \quad \psi 2n\pi_1 = 0,$$

$$\chi 2n\pi_1 = -\xi 2n\pi_1 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}} \operatorname{Sin} n\pi = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{2}}(e^{n\pi} - e^{-n\pi});$$

für $x = (2n-1)\pi_1 = \frac{(2n-1)\pi\sqrt{2}}{2}$ hingegen erhält man:

$$\cos\frac{x}{\sqrt{2}} = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{x}{\sqrt{2}} = \sin\frac{(2n-1)\pi}{2} = (-1)^{n+1},$$

$$\cos\frac{xi}{\sqrt{2}} = \cos\frac{(2n-1)\pi i}{2} = \operatorname{Cos}\frac{(2n-1)\pi}{2} = \tfrac{1}{2}(e^{\frac{(2n-1)\pi}{2}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi}{2}}),$$

$$\sin\frac{xi}{\sqrt{2}} = i \operatorname{Sin}\frac{(2n-1)\pi}{2} = \frac{i}{2}(e^{\frac{(2n-1)\pi}{2}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi}{2}});$$

und hieraus folgt:

$$\varphi(2n-1)\pi_1 = 0,$$

$$\psi(2n-1)\pi_1 = (-1)^{n+1}.\operatorname{Sin}\frac{(2n-1)\pi}{2} = \frac{(-1)^{n+1}}{2}(e^{\frac{(2n-1)\pi}{2}} - e^{-\frac{(2n-1)\pi}{2}}).$$

$$\chi(2n-1)\pi_1 = \xi(2n-1)\pi_1 = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}} . \operatorname{Cos}\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{2}}(e^{\frac{(2n-1)\pi}{2}} + e^{-\frac{(2n-1)\pi}{2}}).$$

Ich erlaube mir die Folgerung, welche sich hier nebenbei ergeben hat, die aber aus den sogleich nachher beizubringenden Formeln auch unmittelbar erwiesen werden könnte, besonders hervorzuheben, dass für jede ganze Zahl n stets

$$\chi 2n\pi_1 = -\xi 2n\pi_1 \quad \text{und} \quad \chi(2n-1)\pi_1 = \xi(2n-1)\pi_1$$

ist, indem ich dabei bemerke, dass diese beiden Gleichungen in eine einzige zusammen gezogen werden können, wenn man

$$\chi n\pi_1 = (-1)^{n+1} . \xi n\pi_1$$

setzt.

Die vorstehenden Ausdrücke sind zur wirklichen näherungs-

weisen Berechnung der hypercyclischen Functionen ganz bequem, sobald man sich dabei der logarithmischen oder der von Gudermann berechneten Tafeln der hyperbolischen Functionen bedienen kann; wenn man aber eine grössere Genauigkeit verlangt, als diese Tafeln zu gewähren vermögen, wird man sie hiezu wenig brauchbar finden. In einem solchen Falle wird man sich für $x=\pi_1$ mit Vortheil der Reihen des §. 2. bedienen, bei deren Anwendung jeder beliebige Grad der Genauigkeit erreicht werden kann. Auch für $x=2\pi_1$ ist dieses letztere Verfahren noch keineswegs mit allzu grosser Unbequemlichkeit verbunden; doch wird man leichter zum Ziele gelangen, wenn man die Formeln des §. 21. anwendet. Auf diesen Wegen habe ich in 20 Decimalstellen genau gefunden:

$$\psi\pi_1 = 2{,}30129\ 89023\ 07294\ 87346,$$

$$\chi\pi_1 = \xi\pi_1 = 1{,}77425\ 71174\ 66456\ 76432,$$

$$\varphi 2\pi_1 = -11{,}59195\ 32755\ 21520\ 62775,$$

$$\chi 2\pi_1 = -\xi 2\pi_1 = -8{,}16619\ 19136\ 72924\ 17991.$$

Für höhere Vielfache von π_1 wird der Gebrauch der Reihen des §. 2., wie schon in §. 3. bemerkt wurde, fortwährend unbequemer, wesshalb für diese Fälle auf andere Weise vorgesorgt werden muss.

§. 38.

Die vier ersten in §. 26. aufgestellten Gleichungen nehmen eine weit einfachere Gestalt an, wenn darin anstatt y entweder π_1 oder ein Vielfaches von π_1 gesetzt wird. Beschränken wir uns hier, um nicht weitläufiger zu werden, als geradezu nothwendig ist, auf die beiden ersten Fälle, in welchen entweder $y=\pi_1$ oder $y=2\pi_1$ angenommen wird. Für $y=\pi_1$ ist vermöge §. 36. $\varphi y = \varphi\pi_1 = 0$; daher gehen die bezeichneten Gleichungen in folgende über:

$$\varphi(x+n\pi_1) = -2\psi\pi_1 . \psi(x+(n-1)\pi_1) - \varphi(x+(n-2)\pi_1),$$

$$\chi(x+n\pi_1) = -2\psi\pi_1 . \xi(x+(n-1)\pi_1) - \chi(x+(n-2)\pi_1),$$

$$\psi(x+n\pi_1) = 2\psi\pi_1 . \varphi(x+(n-1)\pi_1) - \psi(x+(n-2)\pi_1),$$

$$\xi(x+n\pi_1) = 2\psi\pi_1 . \chi(x+(n-1)\pi_1) - \xi(x+(n-2)\pi_1).$$

Aus diesen Gleichungen können die hypercyclischen Functionen für die in einer arithmetischen Progression fortlaufenden Werthe der Veränderlichen

$$x+2\pi_1,\quad x+3\pi_1,\quad x+4\pi_1,\quad x+5\pi_1,\ldots$$

nach und nach ganz leicht gefunden werden, indem man darin $n=2, 3, 4,\ldots$ annimmt, sobald die Functionen für x und $x+\pi_1$ bereits bekannt sind.

§. 39.

Werden die Gleichungen des §. 38. nach der Ordnung durch

$$-\psi(x+(n-1)\pi_1),\qquad -\xi(x+(n-1)\pi_1),$$
$$\varphi(x+(n-1)\pi_1),\qquad \chi(x+(n-1)\pi_1)$$

getheilt, so erhält man:

$$-\frac{\varphi(x+n\pi_1)}{\psi(x+(n-1)\pi_1)}=2\psi\pi_1+\frac{\varphi(x+(n-2)\pi_1)}{\psi(x+(n-1)\pi_1)}=2\psi\pi_1+\frac{1}{\frac{\psi(x+(n-1)\pi_1)}{\varphi(x+(n-2)\pi_1)}},$$

$$-\frac{\chi(x+n\pi_1)}{\xi(x+(n-1)\pi_1)}=2\psi\pi_1+\frac{\chi(x+(n-2)\pi_1)}{\xi(x+(n-1)\pi_1)}=2\psi\pi_1+\frac{1}{\frac{\xi(x+(n-1)\pi_1)}{\chi(x+(n-2)\pi_1)}},$$

$$\frac{\psi(x+n\pi_1)}{\varphi(x+(n-1)\pi_1)}=2\psi\pi_1-\frac{\psi(x+(n-2)\pi_1)}{\varphi(x+(n-1)\pi_1)}=2\psi\pi_1-\frac{1}{\frac{\varphi(x+(n-1)\pi_1)}{\psi(x+(n-2)\pi_1)}},$$

$$\frac{\xi(x+n\pi_1)}{\chi(x+(n-1)\pi_1)}=2\psi\pi_1-\frac{\xi(x+(n-2)\pi_1)}{\chi(x+(n-1)\pi_1)}=2\psi\pi_1-\frac{1}{\frac{\chi(x+(n-1)\pi_1)}{\xi(x+(n-2)\pi_1)}}.$$

Hieraus ergibt sich ferner, indem man $n-1$ anstatt n setzt und die auf solche Art zum Vorscheine kommenden Werthe in den früheren substituirt,

$$-\frac{\varphi(x+n\pi_1)}{\psi(x+(n-1)\pi_1)}=2\psi\pi_1+\frac{1}{2\psi\pi_1-\frac{1}{\frac{\varphi(x+(n-2)\pi_1)}{\psi(x+(n-3)\pi_1)}}},$$

$$-\frac{\chi(x+n\pi_1)}{\xi(x+(n-1)\pi_1)}=2\psi\pi_1+\frac{1}{2\psi\pi_1-\frac{1}{\frac{\chi(x+(n-2)\pi_1)}{\xi(x+(n-3)\pi_1)}}},$$

$$\frac{\psi(x+n\pi_1)}{\varphi(x+(n-1)\pi_1)} = 2\psi\pi_1 + \cfrac{1}{2\psi\pi_1 + \cfrac{1}{\cfrac{\psi(x+(n-2)\pi_1)}{\varphi(x+(n-3)\pi_1)}}},$$

$$\frac{\xi(x+n\pi_1)}{\chi(x+(n-1)\pi_1)} = 2\psi\pi_1 + \cfrac{1}{2\psi\pi_1 + \cfrac{1}{\cfrac{\xi(x+(n-2)\pi_1)}{\chi(x+(n-3)\pi_1)}}}.$$

Nimmt man nun abermals in den zuerst angegebenen Ausdrücken $n-2$ anstatt n an, setzt die auf solche Weise erhaltenen Werthe in den letzten Formeln, und fährt in dieser Art der Substitution fort; so überzeugt man sich, dass jeder von den vier Quotienten

$$-\frac{\varphi(x+n\pi_1)}{\psi(x+(n-1)\pi_1)}, \quad -\frac{\chi(x+n\pi_1)}{\xi(x+(n-1)\pi_1)},$$

$$\frac{\psi(x+n\pi_1)}{\varphi(x+(n-1)\pi_1)}, \quad \frac{\xi(x+n\pi_1)}{\chi(x+(n-1)\pi_1)}$$

in einen **Kettenbruch** sich verwandeln lasse, dessen **Theilbrüche sämmtlich** gleich $\frac{1}{2\psi\pi_1}$ sind, mit alleiniger Ausnahme des jedesmaligen **letzten**, welcher in den einzelnen Quotienten nach der Ordnung entweder

$$\frac{1}{\cfrac{\psi(x+\pi_1)}{\varphi x}}, \quad \frac{1}{\cfrac{\xi(x+\pi_1)}{\chi x}}, \quad -\frac{1}{\cfrac{\varphi(x+\pi_1)}{\psi x}}, \quad -\frac{1}{\cfrac{\chi(x+\pi_1)}{\xi x}}$$

oder

$$-\frac{1}{\cfrac{\varphi(x+\pi_1)}{\psi x}}, \quad -\frac{1}{\cfrac{\chi(x+\pi_1)}{\xi x}}, \quad \frac{1}{\cfrac{\psi(x+\pi_1)}{\varphi x}}, \quad \frac{1}{\cfrac{\xi(x+\pi_1)}{\chi x}}$$

sein wird, jenachdem n eine **gerade** oder **ungerade** Zahl ist. Die Gesammtzahl **aller** Theilbrüche beträgt $n-1$, wobei natürlich das **erste** Glied $2\psi\pi_1$ nicht mitgerechnet ist.

Die Form der Kettenbrüche für die bezeichneten Quotienten erscheint zwar nicht besonders bequem, um die Werthe derselben und dann ferner ihre Zähler aus den Nennern wirklich zu berechnen; sie dürfte jedoch nicht nur an sich selbst bemerkenswerth sein, sondern sie gestattet überdiess eine Folgerung, die auf einem andern Wege sich nur schwer nachweisen lassen möchte. Betrachtet man nähmlich dabei n als fortwährend zunehmend, so

ist klar, dass jeder einzelne von jenen Quotienten sich immermehr dem endlosen Kettenbruche

$$2\psi\pi_1 + \cfrac{1}{2\psi\pi_1 + \cfrac{1}{2\psi\pi_1 + \cfrac{1}{2\psi\pi_1 + \ldots}}}$$

nähern müsse, dessen Werth bekanntlich

$$\psi\pi_1 + \sqrt{(\psi\pi_1^2 + 1)} = \psi\pi_1 + \chi\pi_1 . \sqrt{2} = 4{,}81047\ 73809\ 65381\ 65547$$

ist. Diese gefundene Zahl ist daher die **gemeinschaftliche Gränze**, welcher sich jene Quotienten bei fortwährendem Wachsthume von n ohne Ende nähern.

§. 40.

Setzt man in den vier ersten Gleichungen des §. 26. $y = 2\pi_1$, so erhält man wegen $\psi y = \psi 2\pi_1 = 0$ folgende Werthe:

$$\varphi(x + 2n\pi_1) = 2\varphi 2\pi_1 . \varphi(x + (2n-2)\pi_1) - \varphi(x + (2n-4)\pi_1),$$

$$\chi(x + 2n\pi_1) = 2\varphi 2\pi_1 . \chi(x + (2n-2)\pi_1) - \chi(x + (2n-4)\pi_1),$$

$$\psi(x + 2n\pi_1) = 2\varphi 2\pi_1 . \psi(x + (2n-2)\pi_1) - \psi(x + (2n-4)\pi_1),$$

$$\xi(x + 2n\pi_1) = 2\varphi 2\pi_1 . \xi(x + (2n-2)\pi_1) - \xi(x + (2n-4)\pi_1).$$

Indem man hierin für n nach und nach die Zahlen 2, 3, 4,.... annimmt, überzeugt man sich aus diesen Gleichungen, dass die gleichnamigen hypercyclischen Functionen für die in arithmetischer Progression fortschreitenden Werthe der Veränderlichen

$$x, \quad x + 2\pi_1, \quad x + 4\pi_1, \quad x + 6\pi_1, \quad x + 8\pi_1, \ldots.$$

lauter **recurrirende** Reihen bilden, deren gemeinschaftliche Relationsscala

$$2\varphi 2\pi_1, \quad -1$$

ist, wonach aus den **beiden ersten** Gliedern einer jeden solchen Reihe **alle folgenden** sehr leicht gefunden werden können.

Ferner ist auch ohne genauere Ausführung einleuchtend, dass durch das gleiche Verfahren, wie es in §. 39. angewendet wurde, aus den vorstehenden Gleichungen die Quotienten

$$\frac{\varphi(x+2n\pi_1)}{\varphi(x+(2n-2)\pi_1)}, \quad \frac{\chi(x+2n\pi_1)}{\chi(x+(2n-2)\pi_1)},$$

$$\frac{\psi(x+2n\pi_1)}{\psi(x+(2n-2)\pi_1)}, \quad \frac{\xi(x+2n\pi_1)}{\xi(x+(2n-2)\pi_1)}$$

in der Form von Kettenbrüchen, bei welchen alle Theilbrüche mit alleiniger Ausnahme des letzten gleich $-\frac{1}{2\varphi 2\pi_1}$ sind, dargestellt und dadurch zugleich die Gränzen angegeben werden können, welchen sie bei dem fortwährenden Wachsthume von n immer mehr sich nähern. Letztere ergibt sich für alle vier Quotienten durch den endlosen Kettenbruch

$$2\varphi 2\pi_1 - \cfrac{1}{2\varphi 2\pi_1 - \cfrac{1}{2\varphi 2\pi_1 - \cfrac{1}{2\varphi 2\pi_1 - \ldots}}},$$

dessen Werth, wie man leicht findet, $\varphi 2\pi_1 \pm \sqrt{((\varphi 2\pi_1)^2 - 1)}$ beträgt. Hiebei ist rücksichtlich des Vorzeichens, mit welchem die vorkommende Wurzel genommen werden soll, zu bemerken, dass die beiden Glieder gleiche oder verschiedene Zeichen haben müssen, je nachdem die Reihe, zu welcher die Gränze gesucht wird, numerisch betrachtet eine steigende oder fallende ist, was in jedem einzelnen Falle schon aus der Beschaffenheit der ersten Glieder beurtheilt werden kann. Demnach ist, da wir den Werth von $\varphi 2\pi_1$ in §. 37. mit dem Zeichen $-$ behaftet gefunden haben, die Gränze einer steigenden Reihe:

$$\varphi 2\pi_1 - \sqrt{((\varphi 2\pi_1)^2 - 1)} = -23{,}14069\ 26327\ 79269,$$

hingegen für eine Reihe mit abnehmenden Gliedern:

$$\varphi 2\pi_1 + \sqrt{((\varphi 2\pi_1)^2 - 1)} = -0{,}04321\ 39182\ 63772.$$

§. 41.

Die Formeln des §. 38. oder auch des §. 40. können nun zunächst dazu gebraucht werden, um die hypercyclischen Functionen aller höheren Vielfachen von π_1 mit grösserer Bequemlichkeit zu berechnen als nach §. 37. In Bezug auf die Function φ handelt es sich dabei nur um gerade Vielfache und für die Function ψ nur um ungerade Vielfache von π_1, da wir aus §. 36. wissen, dass für jede ganze Zahl n immer $\varphi(2n-1)\pi_1 = 0$ und $\psi 2n\pi_1 = 0$ ist. Desshalb sind hier die Gleichungen des §. 40. am

zweckmässigsten anzuwenden. Setzt man nähmlich in der ersten von ihnen $x=0$ und in der dritten $x=\pi_1$, so findet man

$$\varphi 2n\pi_1 = 2\varphi 2\pi_1 . \varphi(2n-2)\pi_1 - \varphi(2n-4)\pi_1 .$$

und

$$\psi(2n+1)\pi_1 = 2\varphi 2\pi_1 . \psi(2n-1)\pi_1 - \psi(2n-3)\pi_1 ,$$

woraus nach und nach die Werthe der Function φ für alle geraden und der Function ψ für alle ungeraden Vielfachen von π_1 mittelst der bereits bekannten Werthe von $\varphi 2\pi_1$ und $\psi\pi_1$ sich berechnen lassen.

Was die Functionen χ und ξ anbelangt, wissen wir aus §. 37., dass

$$\chi n\pi_1 = (-1)^{n+1} . \xi n\pi_1$$

ist. Dieser Eigenschaft gemäss braucht man für jedes Vielfache von π_1 stets nur eine von den beiden Functionen χ und ξ, z. B. χ, zu berechnen, weil die andere von selbst daraus sich ergibt, nähmlich

$$\xi n\pi_1 = (-1)^{n+1} . \chi n\pi_1 .$$

Hiezu sind die Formeln des §. 38. ganz bequem, sobald man die Functionen für alle Vielfachen von π_1 nach der Ordnung zu erhalten wünscht. Setzt man in der zweiten aus ihnen $x=0$, so ergibt sich

$$\chi n\pi_1 = -2\psi\pi_1 . \xi(n-1)\pi_1 - \chi(n-2)\pi_1 ,$$

oder auch, wenn man anstatt ξ die Function χ einführt,

$$\chi n\pi_1 = (-1)^{n+1} . 2\psi\pi_1 . \chi(n-1)\pi_1 - \chi(n-2)\pi_1 .$$

Sobald aber die Functionen entweder nur für gerade oder auch ausschliesslich für ungerade Vielfache von π_1 berechnet werden sollen, sind die Gleichungen des §. 40. vorzuziehen, weil bei ihrer Anwendung der überflüssige Theil der Arbeit erspart bleibt. Denn nimmt man darin $x=-n\pi_1$, so erhält man für die Function χ die Gleichung

$$\chi n\pi_1 = 2\varphi 2\pi_1 . \chi(n-2)\pi_1 - \chi(n-4)\pi_1 ,$$

aus welcher die Functionen der geraden oder der ungeraden Vielfachen von π_1 ausschliesslich gefunden werden, je nachdem man darin anstatt n entweder die geraden Zahlen 4, 6, 8, ... oder die ungeraden Zahlen 3, 5, 7, ... setzt.

Auf den eben vorgezeichneten Wegen sind folgende Werthe in 20 Decimalstellen genau berechnet worden:

$$\psi 3\pi_1 = -55{,}65439\ 75994\ 17548\ 20947,$$

$$\chi 3\pi_1 = \xi 3\pi_1 = -39{,}36175\ 40913\ 98872\ 99059,$$

$$\varphi 4\pi_1 = 267{,}74676\ 14837\ 48222\ 24590,$$

$$\chi 4\pi_1 = -\xi 4\pi_1 = 189{,}33251\ 48805\ 24722\ 78006,$$

$$\psi 5\pi_1 = 1287{,}95805\ 41971\ 83312\ 07790,$$

$$\chi 5\pi_1 = \xi 5\pi_1 = 910{,}78317\ 14226\ 61106\ 83108.$$

Bei der Berechnung der hypercyclischen Functionen für sehr hohe Vielfache von π_1 kann die Bemerkung von Nutzen sein, dass man auf die hier gezeigte Art nur so lange vorwärts zu schreiten braucht, bis entweder die Quotienten

$$\frac{\varphi n\pi_1}{\psi(n-1)\pi_1},\quad \frac{\chi n\pi_1}{\xi(n-1)\pi_1},\quad \frac{\psi n\pi_1}{\varphi(n-1)\pi_1},\quad \frac{\xi n\pi_1}{\chi(n-1)\pi_1},$$

oder die Quotienten

$$\frac{\varphi 2n\pi_1}{\varphi(2n-2)\pi_1},\quad \frac{\chi 2n\pi_1}{\chi(2n-2)\pi_1},\quad \frac{\xi 2n\pi_1}{\xi(2n-2)\pi_1},\quad \frac{\psi 2n\pi_1}{\psi(2n-2)\pi_1},$$

welche aus den in §. 39. und §. 40. betrachteten hervorgehen, wenn man darin mit Aussserachtlassung des Vorzeichens $x=0$ oder $x=\pi_1$ annimmt, ihren eben dort angegebenen Gränzen so weit sich genähert haben werden, als man überhaupt die Genauigkeit der Rechnung zu treiben wünscht. Von da angefangen verwandelt sich die für noch höhere Vielfache von π_1 erforderliche Arbeit offenbar in eine blosse Multiplication mit diesen Gränzen, oder auch, wenn man dabei die logarithmischen Tafeln anwenden kann und will, in eine blosse Addition der Logarithmen jener Gränzen.

§. 42.

Es verdient wenigstens kurz erwähnt zu werden, dass die hypercyclischen Functionen der Vielfachen von π_1 ausser der eben gezeigten recurrirenden Berechnung auch eine independente Darstellung durch die Functionen von π_1 zulassen. Man braucht zu diesem Zwecke nur in den Entwickelungen der §§. 30. bis 33. durchgängig $x=\pi_1$ anzunehmen. Unter dieser Voraussetzung erleiden jene Entwickelungen sehr bedeutende Vereinfachungen, weil für $x=\pi_1$, $\varphi x=0$ und $\chi x=\xi x$ ist, wesshalb alle Glieder gänzlich wegfallen müssen, worin der Factor φx vorkommt, hingegen diejenigen Glieder, welche die Factoren χx oder ξx enthalten, einer Zusammenziehung fähig werden. Zugleich tritt in

diesem Falle die Analogie mit den goniometrischen oder eigentlich mit den hyperbolischen Reihen so stark hervor, dass jene mit diesen letzteren fast ganz übereinstimmen, was sich auch aus den im §. 37. angegebenen Werthen leicht erklärt. Auf diese Art gehen z. B. die im §. 30. enthaltenen Entwickelungen in folgende über: für gerade Werthe von n ist nämlich:

$$\varphi n\pi_1 = (-1)^{\frac{n}{2}}[2^{n-1}\psi\pi_1{}^n + \frac{n}{1}2^{n-3}\psi\pi_1{}^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-5}\psi\pi_1{}^{n-4} + \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-7}\psi\pi_1{}^{n-6} + \ldots],$$

und für ungerade Werthe von n:

$$\psi n\pi_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}[2^{n-1}\psi\pi_1{}^n + \frac{n}{1}2^{n-3}\psi\pi_1{}^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-5}\psi\pi_1{}^{n-4} + \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-7}\psi\pi_1{}^{n-6} + \ldots].$$

Aus den Reihen des §. 31. hingegen erhält man für gerade n:

$$\chi n\pi_1 = -\xi n\pi_1 = (-1)^{\frac{n}{2}}[(2\psi\pi_1)^{n-1} + \binom{n-2}{1}(2\psi\pi_1)^{n-3} + \binom{n-3}{2}(2\psi\pi_1)^{n-5} + \binom{n-4}{3}(2\psi\pi_1)^{n-7} + \ldots].\chi\pi_1,$$

und für ungerade n:

$$\chi n\pi_1 = \xi n\pi_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}[(2\psi\pi_1)^{n-1} + \binom{n-2}{1}(2\psi\pi_1)^{n-3} + \binom{n-3}{2}(2\psi\pi_1)^{n-5} + \binom{n-4}{3}(2\psi\pi_1)^{n-7} + \ldots].\chi\pi_1.$$

Ich bemerke hiebei, dass die beiden letzten Ausdrücke sich in einen einzigen, für alle ganzen Werthe von n giltigen, zusammenziehen lassen, indem man setzt:

$$\chi nx = (-1)^{n+1}\xi nx = (\sin\frac{n\pi}{2} + \cos\frac{n\pi}{2}).[(2\psi\pi_1)^{n-1} + \binom{n-2}{1}(2\psi\pi_1)^{n-3} + \binom{n-3}{2}(2\psi\pi_1)^{n-5} + \ldots].\chi\pi_1.$$

Mit Hilfe dieser Reihen, welche vermöge der Beschaffenheit

ihrer Herleitung stets nur so mit fortgeführt werden dürfen, bis dabei Potenzen mit subtractiven Exponenten zum Vorscheine kommen sollen, können die hypercyclischen Functionen eines einzelnen wie immer hohen Vielfachen von π_1 für sich allein unabhängig von den vorhergehenden aus den bekannten Werthen von $\psi\pi_1$ und $\chi\pi_1$ berechnet werden.

§. 43.

Nebst den bisher behandelten Vielfachen von π_1 erscheint es zweckmässig, auch der Berechnung der hypercyclischen Functionen für die ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi_1$ eine besondere kurze Betrachtung zu widmen, da wir derselben im Nachfolgenden zu bestimmten Zwecken bedürfen werden. Diese Berechnung auf dem Wege der Recursion vorzunehmen, unterliegt keiner Schwierigkeit. Denn setzt man in §. 38. $x = \frac{1}{2}\pi_1$, so erhält man die Gleichungen:

$$\varphi\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi_1 = -2\psi\pi_1 . \psi\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi_1 - \varphi\left(\frac{2n-3}{2}\right)\pi_1,$$

$$\chi\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi_1 = -2\psi\pi_1 . \xi\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi_1 - \chi\left(\frac{2n-3}{2}\right)\pi_1,$$

$$\psi\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi_1 = 2\psi\pi_1 . \varphi\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi_1 - \psi\left(\frac{2n-3}{2}\right)\pi_1,$$

$$\xi\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi_1 = 2\psi\pi_1 . \chi\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi_1 - \xi\left(\frac{2n-3}{2}\right)\pi_1,$$

aus welchen sich, indem man darin $n = 1, 2, 3, \ldots$ annimmt, die hypercyclischen Functionen von $\frac{3}{2}\pi_1$, $\frac{5}{2}\pi_1$, $\frac{7}{2}\pi_1, \ldots$ finden lassen, sobald nur die Functionen von $\frac{1}{2}\pi_1$ bekannt sind. Letztere können sowohl unmittelbar aus den Reihen des §. 2., als auch durch die Gleichungen des §. 22. berechnet werden.

Auf diesen Wegen habe ich folgende näherungsweise Werthe gefunden:

$$\varphi\tfrac{1}{2}\pi_1 = 0,93764\ 00694\ 31430\ 00843,$$
$$\chi\tfrac{1}{2}\pi_1 = 1,09664\ 09253\ 69007\ 72828,$$
$$\psi\tfrac{1}{2}\pi_1 = 0,61424\ 31274\ 86595\ 64917,$$
$$\xi\tfrac{1}{2}\pi_1 = 0,22796\ 90638\ 82998\ 11836,$$
$$\varphi\tfrac{3}{2}\pi_1 = -3,76375\ 41395\ 00834\ 80102,$$
$$\chi\tfrac{3}{2}\pi_1 = 0,04739\ 01124\ 21077\ 42639,$$
$$\psi\tfrac{3}{2}\pi_1 = 3,69673\ 43997\ 92561\ 43365,$$
$$\xi\tfrac{3}{2}\pi_1 = 6,27636\ 26370\ 98881\ 09388.$$

Für die höheren Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi_1$ können andere Gleichungen aufgestellt werden, welche vor den obigen den Vorzug besitzen, dass darin die verschiedenen hypercyclischen Functionen von einander **abgesondert** erscheinen und daher auch abgesondert berechnet werden können. Setzt man nähmlich in den Formeln des §. 40. $x = -(n-\frac{1}{2})\pi_1$, so ergeben sich daraus folgende Werthe:

$$\varphi\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi_1 = 2\varphi 2\pi_1 \,.\, \varphi\left(\frac{2n-3}{2}\right)\pi_1 - \varphi\left(\frac{2n-7}{2}\right)\pi_1,$$

$$\chi\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi_1 = 2\varphi 2\pi_1 \,.\, \chi\left(\frac{2n-3}{2}\right)\pi_1 - \chi\left(\frac{2n-7}{2}\right)\pi_1,$$

$$\psi\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi_1 = 2\varphi 2\pi_1 \,.\, \psi\left(\frac{2n-3}{2}\right)\pi_1 - \psi\left(\frac{2n-7}{2}\right)\pi_1,$$

$$\xi\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi_1 = 2\varphi 2\pi_1 \,.\, \xi\left(\frac{2n-3}{2}\right)\pi_1 - \xi\left(\frac{2n-7}{2}\right)\pi_1.$$

Hieraus zeigt sich, wenn darin zuerst $n = 2, 4, 6, \ldots.$, dann ferner auch $n = 3, 5, 7, \ldots.$ angenommen wird, dass die hypercyclischen Functionen der Werthe

$$-\tfrac{3}{2}\pi_1,\quad \tfrac{1}{2}\pi_1,\quad \tfrac{5}{2}\pi_1,\quad \tfrac{9}{2}\pi_1,\quad \tfrac{13}{2}\pi_1, \ldots.$$

und auch der Werthe

$$-\tfrac{1}{2}\pi_1,\quad \tfrac{3}{2}\pi_1,\quad \tfrac{7}{2}\pi_1,\quad \tfrac{11}{2}\pi_1,\quad \tfrac{15}{2}\pi_1, \ldots.$$

recurrirende Reihen mit der gemeinschaftlichen Relationsscala

$$2\varphi 2\pi_1,\quad -1$$

bilden, durch deren Hilfe aus den bekannten **zwei ersten** Gliedern einer jeden solchen Reihe **alle folgenden** sich finden lassen.

Als Beispiele dieser Berechnung mögen folgende dienen, welche bald als nützlich sich erweisen werden:

$$\psi\tfrac{5}{2}\pi_1 = -17{,}93728\ 96670\ 62212\ 26459,$$

$$\xi\tfrac{5}{2}\pi_1 = -\ 0{,}00985\ 14364\ 93308\ 55530,$$

$$\varphi\tfrac{7}{2}\pi_1 = \ 86{,}32188\ 41848\ 57338\ 41850,$$

$$\chi\tfrac{7}{2}\pi_1 = -\ 0{,}00204\ 79124\ 44675\ 41791,$$

$$\psi\tfrac{9}{2}\pi_1 = \ 415{,}24220\ 42926\ 73679\ 66398,$$

$$\xi\tfrac{9}{2}\pi_1 = \ 0{,}00042\ 57191\ 71402\ 58270.$$

$$\varphi\tfrac{11}{2}\pi_1 = -1997{,}51474\ 20426\ 40190\ 97950,$$
$$\chi\tfrac{11}{2}\pi_1 = \quad 0{,}00008\ 84983\ 20995\ 56470,$$
$$\psi\tfrac{13}{2}\pi_1 = -9608{,}99917\ 07034\ 07976\ 81260,$$
$$\xi\tfrac{13}{2}\pi_1 = \quad -0{,}00001\ 83969\ 93476\ 39701,$$
$$\varphi\tfrac{15}{2}\pi_1 = 46223{,}87322\ 96655\ 59248\ 94850,$$
$$\chi\tfrac{15}{2}\pi_1 = \quad -0{,}00000\ 38243\ 59209\ 96455.$$

Es wird kaum nöthig sein, hiebei noch besonders zu erinnern, dass aus den vorhin zuletzt aufgestellten Gleichungen durch die in §. 39. angewendete Methode die Quotienten

$$\frac{\varphi\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi_1}{\varphi\left(\frac{2n-3}{2}\right)\pi_1},\quad \frac{\chi\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi_1}{\chi\left(\frac{2n-3}{2}\right)\pi_1},\quad \frac{\psi\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi_1}{\psi\left(\frac{2n-3}{2}\right)\pi_1},\quad \frac{\xi\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi_1}{\xi\left(\frac{2n-3}{2}\right)\pi_1}$$

in der Form von **Kettenbrüchen** dargestellt werden können, deren **Gränzen** bei fortwährendem Wachsthume von n die nähmlichen sind, welche bereits in §. 40. angegeben wurden und dass von diesen Gränzen hier gleichfalls ein ähnlicher Gebrauch wie in §. 41. zur Verkürzung der Arbeit bei höheren Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi_1$ gemacht werden könne.

Eben so wenig will ich dabei verweilen, die **independente** Darstellung der hypercyclischen Functionen für vielfache Werthe von $\frac{1}{2}\pi_1$ durch die Functionen von $\frac{1}{2}\pi_1$ umständlich zu zeigen, da sie durch die in den §§. 30. bis 33. enthaltenen Verfahrungsarten ohne Schwierigkeit bewerkstelliget werden kann. Ich bemerke nur, dass insbesondere das in §. 33. gelehrte Verfahren in dem gegenwärtigen Falle nicht nur sehr leicht zum Ziele führt, sondern auch vergleichsweise höchst einfache Resultate gewährt. Denn für $x = \frac{1}{2}\pi_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ ist $\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$, und daher:

$$\cos\frac{x}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{nx}{\sqrt{2}} = \cos\frac{n\pi}{4},\qquad \sin\frac{nx}{\sqrt{2}} = \sin\frac{n\pi}{4}.$$

Durch die Substitution dieser Werthe verwandeln sich z. B. die beiden dort für φnx und ψnx angegebenen Reihen in folgende, nur für **additive** und **ungerade** Werthe von n giltige:

$$\varphi\frac{n\pi_1}{2}=\sqrt{2}\,.\cos\frac{n\pi}{4}\,.\,\varphi\tfrac{1}{2}\pi_1\left[(2\sqrt{2}\psi\tfrac{1}{2}\pi_1)^{n-1}+\binom{n-2}{1}(2\sqrt{2}\psi\tfrac{1}{2}\pi_1)^{n-3}\right.$$

$$\left.+\binom{n-3}{2}(2\sqrt{2}\psi\tfrac{1}{2}\pi_1)^{n-5}+\ldots\right],$$

$$\psi\frac{n\pi_1}{2}=\tfrac{1}{2}\,.\sin\frac{n\pi}{4}\left[(2\sqrt{2}\psi\tfrac{1}{2}\pi_1)^{n}+\frac{n}{1}(2\sqrt{2}\psi\tfrac{1}{2}\pi_1)^{n-2}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-3)}{1.2}(2\sqrt{2}\psi\tfrac{1}{2}\pi_1)^{n-4}+\ldots\right].$$

§. 44.

Da die hypercyclischen Functionen, wie wir in §. 8 gesehen haben, im Allgemeinen durch eine Verbindung goniometrischer mit hyperbolischen oder Exponential-Functionen sich darstellen lassen, so gilt dasjenige, was in §. 37. über die Berechnung jener Functionen für die Vielfachen von π_1 gesagt wurde, auch für jeden andern beliebigen Werth der Veränderlichen x. Demnach können die goniometrischen, hyperbolischen und logarithmischen Tafeln überhaupt zur Berechnung der hypercyclischen Functionen für alle Werthe von x angewendet werden, sobald man sich mit derjenigen Genauigkeit begnügt, welche die zur Verfügung stehenden Tafeln gestatten. Zur Erlangung einer grösseren Schärfe hingegen müssen andere Hilfsmittel aufgesucht werden, und zwar nur für den Fall, wenn x den Werth π_1 übersteigt, weil für kleinere Werthe von x ohnehin die Reihen des §. 2. rasch genug convergiren, um den Gebrauch irgend einer anderen Berechnungsmethode ganz überflüssig zu machen. Bei dem Eintritte des eben bezeichneten Falles kann man sich der vorhergehend mitgetheilten Formeln in folgender Weise bedienen:

Jeder Werth von x, der grösser ist als π_1, lässt sich durch die Division mit π_1 auf die Form $n\pi_1 \pm y$ bringen, wo n so angenommen werden kann, dass y kleiner als $\frac{1}{2}\pi_1$ ausfällt. Berechnet man nun durch die Reihen des §. 2. die hypercyclischen Functionen von y, dann auch vermittelst der Formeln des §. 20. jene von $\pi_1 \pm y$; so können daraus ferner durch die Gleichungen des §. 38. die Functionen von $2\pi_1 \pm y$, $3\pi_1 \pm y$, $4\pi_1 \pm y$, u. s. f. hergeleitet werden, und man braucht auf diese Art nur so weit fortzufahren, bis man zu dem gegebenen Werthe $n\pi_1 \pm y$ gelangt sein wird.

Ich will mich nicht dabei aufhalten, die mancherlei Verkürzungen anzugeben, deren das im Allgemeinen so eben erklärte Verfahren fähig ist, die man beim wirklichen Gebrauche ohnehin

leicht selbst finden wird, sondern nur einer Abänderung desselben gedenken, die dann mit Vortheil angewendet werden kann, wenn die hypercyclischen Functionen für mehrere Werthe der Veränderlichen berechnet werden sollen. In diesem Falle wird man sich eine beträchtliche Erleichterung der Arbeit verschaffen, indem man vorläufig die hypercyclischen Functionen für die Vielfachen von π_1 so weit berechnet, als man derselben bedarf; dann jeden einzelnen gegebenen Werth der Veränderlichen auf die Form $n\pi_1 \pm y$ bringt; die Functionen von y aus den Reihen des §. 2. bestimmt und hieraus die Functionen von $n\pi_1 \pm y$ durch die Gleichungen des §. 20. ableitet, indem man darin $x = n\pi_1$ annimmt. Das Ganze ist so einfach, dass eine umständlichere Erläuterung oder die Anführung eines Beispieles als ganz überflüssig erscheinen müsste.

Man wird leicht selbst sehen, dass bei dem vorhergehenden Verfahren anstatt der Vielfachen von π_1 auch jene von $2\pi_1$ oder auch von $\frac{1}{2}\pi_1$ angewendet werden können, indem man jeden gegebenen Werth der Veränderlichen durch die Division mit $2\pi_1$ oder mit $\frac{1}{2}\pi_1$ auf die Form $2n\pi_1 \pm y$ oder $\frac{n\pi_1}{2} \pm y$ bringt, wobei dann im ersten Falle nur die hypercyclischen Functionen der geraden Vielfachen von π_1, im andern Falle auch jene der Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi_1$ vorläufig berechnet zu werden brauchen.

Noch verdient der Umstand erwähnt zu werden, dass man sich anstatt der Gleichungen des §. 20. auch des Taylor'schen Lehrsatzes zu gleichem Zwecke bedienen könnte. Denn aus demselben ergeben sich mit Berücksichtigung der in §. 13. und §. 16. angeführten Werthe der Differentialquotienten folgende Reihen:

$$\varphi(x+y) = \varphi x - \xi x.\frac{y}{1} - \psi x.\frac{y^2}{2} - \chi x.\frac{y^3}{3!} - \varphi x.\frac{y^4}{4!} + \xi x.\frac{y^5}{5!} + \ldots\ldots,$$

$$\chi(x+y) = \chi x + \varphi x.\frac{y}{1} - \xi x.\frac{y^2}{2} - \psi x.\frac{y^3}{3!} - \chi x.\frac{y^4}{4!} - \varphi x.\frac{y^5}{5!} + \ldots\ldots,$$

$$\psi(x+y) = \psi x + \chi x.\frac{y}{1} + \varphi x.\frac{y^2}{2} - \xi x.\frac{y^3}{3!} - \psi x.\frac{y^4}{4!} - \chi x.\frac{y^5}{5!} - \ldots\ldots,$$

$$\xi(x+y) = \xi x + \psi x.\frac{y}{1} + \chi x.\frac{y^2}{2} + \varphi x.\frac{y^3}{3!} - \xi x.\frac{y^4}{4!} - \psi x.\frac{y^5}{5!} - \ldots\ldots$$

Diese Reihen sind für jeden beliebigen Werth von x und von y convergent. Desshalb lassen sich daraus unmittelbar die hypercyclischen Functionen von $n\pi_1 \pm y$ oder $2n\pi_1 \pm y$ oder $\frac{n\pi_1}{2} \pm y$ ebensowohl berechnen, wie aus den Gleichungen des §. 20. Man

wird aber schwerlich zu verkennen im Stande sein, dass diese Gleichungen und jene Reihen eigentlich ganz einerlei und nur in ihrer Form verschieden sind. Denn substituirt man in den Gleichungen anstatt der hypercyclischen Functionen von y die gleichgeltenden Werthe nach §. 2. und ordnet alles nach den Potenzen von y, so erhält man sogleich die vorstehenden Reihen. Aus diesem Grunde ist es im Grunde gleichgiltig, welche von beiden Arten von Ausdrücken man anwenden mag.

§. 45.

Wir müssen nunmehr die so eben behandelte Aufgabe umkehren, indem wir uns die Frage zur Beantwortung vorlegen, wie zu jedem gegebenen Werthe irgend einer hypercyclischen Function der entsprechende Werth der Veränderlichen oder, wenn es vielleicht mehrere solche geben sollte, alle zugehörigen Werthe derselben gefunden werden können? Eine directe Lösung dieser Aufgabe erscheint nicht ausführbar, weil keine der in den §§. 4. bis 8. aufgestellten Gleichungen allgemein in geschlossener Form sich auflösen lässt, sobald darin x als Unbekannte betrachtet wird. Die Umkehrung der Reihen des §. 2., welche als zunächst liegendes Hilfsmittel sich darbietet, kann zwar insofern bewerkstelligt werden, dass man nach gehöriger Festsetzung der Form der umgekehrten Reihen die ersten Glieder derselben ohne besondere Schwierigkeit zu finden vermag. Allein es dürfte nicht leicht sein, auf diesem Wege für die Coefficienten der Reihen ein hinreichend einfaches Gesetz zu erkennen und zu erweisen, um über die Convergenz oder Divergenz derselben ein sicheres Urtheil zu fällen und dadurch die Gränzen ihrer Anwendbarkeit zu bestimmen. Auch die Differentialrechnung ist nicht im Stande, zur Erreichung des hier vorliegenden Zweckes etwas Wesentliches zu leisten. Denn die in §. 17. enthaltene Differentialgleichung zwischen x und der Function φx, welche eben zum Behufe der gegenwärtigen Vergleichung dort aufgestellt wurde, zeigt hinlänglich, wie ungemein verwickelt das aus derselben sich ergebende recurrente Gesetz für die Coefficienten ausfallen müsste, wenn man anstatt x eine nach den Potenzen von φx geordnete Reihe mit unbestimmten Coefficienten substituiren und daraus die Werthe der letzteren finden wollte. Aus diesen Gründen scheint kaum ein anderer Weg zu erübrigen, als eine indirecte Lösung unserer Aufgabe zu versuchen, die wenigstens für das practische Bedürfniss der Berechnung genügt, wenn gleich dabei eine voll-

ständige theoretische Auflösung noch immer zu wünschen bleibt. Man gelangt zu diesem Ziele am einfachsten auf folgende Weise.

Wir werden uns bald überzeugen, dass es nicht schwer fällt, die grössten und kleinsten Werthe zu bestimmen, welche jede einzelne hypercyclische Function in gewissen Intervallen, die so wenig von einander entfernt sind, dass zwischen ihnen nur ein einziges solches Maximum oder Minimum liegen kann, zu erhalten vermögen. Durch diese Kenntniss werden wir uns wegen der ununterbrochenen Stetigkeit aller hypercyclischen Functionen in den Stand gesetzt finden, auf der Stelle mit voller Sicherheit zu beurtheilen, ob in jedem einzelnen dergleichen Intervalle ein Werth der Veränderlichen wirklich vorhanden sei, welcher dem gegebenen Werthe der hypercyclischen Function entspricht oder ob darin kein solcher liegen könne. Für diejenigen Intervalle, bei welchen der letztere Fall eintrifft, ist natürlich jede weitere Untersuchung überflüssig. Für jedes Intervall hingegen, in welchem man das Vorhandensein eines und zwar nur eines einzigen entsprechenden Werthes der Veränderlichen erkannt hat, wird man durch einige versuchsweise vorgenommene Berechnungen nicht nur engere und immer engere Gränzen für den zu findenden Werth erhalten, sondern kann dieselben auch einander so sehr nähern, als man verlangt, indem man als neuen Versuchswerth für die Veränderliche stets das arithmetische Mittel zwischen den beiden zuletzt gefundenen Gränzen annimmt. Man verkürzt sich dabei die Arbeit bedeutend, wenn man zur Aufstellung der neuen Versuchswerthe anfangs der sogenannten regula falsi sich bedient, und später, nachdem bereits ein genäherter Werth a zum Vorschein gekommen ist, der von dem wahren x so wenig sich unterscheidet, dass der Unterschied $x-a=y$ klein genug ausfällt, um bei der Entwicklung der hypercyclischen Function von $x=a+y$ durch die Taylor'sche Reihe die nachfolgenden Glieder in Bezug auf die vorhergehenden als unbeträchtlich vernachlässigen zu dürfen, die bekannte Newton'sche Näherung anwendet. Der Taylor'sche Lehrsatz gibt nähmlich für die Function φ vermöge §. 44., wenn dort a anstatt x gesetzt wird:

$$\varphi x=\varphi(a+y)=\varphi a-\xi a\cdot\frac{y}{1}-\psi a\cdot\frac{y^2}{2}-\chi a\cdot\frac{y^3}{3!}-\ldots.$$

Hieraus folgt:

$$y=\frac{\varphi a-\varphi x}{\xi a}-\frac{\psi a}{\xi a}\cdot\frac{y^2}{2}-\frac{\chi a}{\xi a}\cdot\frac{y^3}{3!}-\ldots.,$$

und daher ist näherungsweise:

$$y = \frac{\varphi a - \varphi x}{\xi a},$$

wobei der begangene Fehler nahezu durch das erste weggelassene Glied

$$-\frac{\psi a}{\xi a} \cdot \frac{y^2}{2}$$

ausgedrückt wird, wenn man darin anstatt y den gefundenen Näherungswerth annimmt. Auf diese Art erhält man aus dem früheren Näherungswerthe a nicht nur einen neuen

$$a + y = a + \frac{\varphi a - \varphi x}{\xi a},$$

sondern ist zugleich im Stande, den bei dem letzteren noch unterlaufenden Fehler wenigstens nahezu anzugeben.

Auf ganz gleiche Weise findet man für die drei anderen hypercyclischen Functionen χ, ψ und ξ nach der Ordnung die Näherungswerthe

$$y = \frac{\chi x - \chi a}{\varphi a}, \text{ und den Fehler nahezu } \frac{\xi a}{\varphi a} \cdot \frac{y^2}{2},$$

$$y = \frac{\psi x - \psi a}{\chi a}, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad -\frac{\varphi a}{\chi a} \cdot \frac{y^2}{2},$$

$$y = \frac{\xi x - \xi a}{\psi a}, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad -\frac{\chi a}{\psi a} \cdot \frac{y^2}{2}.$$

Es bedarf wohl keiner Erinnerung, dass durch die wiederholte Anwendung dieses Näherungsverfahrens jeder gewünschte Grad der Genauigkeit sehr rasch herbeigeführt werden kann. Gelegenheit zur wirklichen Ausübung desselben wird sich im Nachfolgenden sogleich ergeben.

§. 46.

Man wird gewiss nicht unbemerkt gelassen haben, dass die in §. 36. ausgesprochene allgemeine Aufgabe dort nur zur Hälfte gelöst wurde, nähmlich nur für die Functionen φ und ψ. Wir wollen nun zur Lösung derselben Aufgabe auch für die beiden andern hypercyclischen Functionen χ und ξ schreiten und demnach zu bestimmen versuchen, für welche reellen oder imaginären Werthe von x entweder $\chi x = 0$ oder $\xi x = 0$ werde.

Bei diesen zwei Functionen stellt sich das in §. 36. eingehal-

tene Verfahren als ganz erfolglos heraus. Denn setzt man hier anstatt χx und ξx ihre Werthe aus §. 5., so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{xi}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{xi}{\sqrt{2}}=0$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{xi}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{xi}{\sqrt{2}}=0,$$

oder auch

$$\operatorname{tang}\frac{x}{\sqrt{2}}-i\operatorname{tang}\frac{xi}{\sqrt{2}}=0 \quad\text{und}\quad \operatorname{tang}\frac{x}{\sqrt{2}}+i\operatorname{tang}\frac{xi}{\sqrt{2}}=0,$$

deren keine weder eine allgemeine Auflösung, noch eine weitere Zerlegung gestattet. Aus diesen Gleichungen lässt sich kaum etwas anderes schliessen, als was auch unmittelbar aus der Betrachtung der Reihen des §. 2. folgt, nähmlich dass der Werth $x=0$ jeder von beiden Gleichungen angehöre, und dann, dass allemal, sobald einer von ihnen irgend ein reeller oder imaginärer Werth $x=\alpha$ entspricht, stets auch die Werthe $x=-\alpha$ und $x=\pm\alpha i$ der nähmlichen Gleichung Genüge leisten müssen. Man kann nicht einmal mit Sicherheit daraus entnehmen, ob es ausser $x=0$ noch irgend einen davon verschiedenen reellen Werth von x gebe, welcher der einen oder der andern aus ihnen zugehört. Dass indessen letzteres wirklich bei beiden Gleichungen der Fall sei, lässt sich aus anderen Gründen leicht nachweisen. In Bezug auf die Function χx machen die in §. 37. und §. 41. berechneten Werthe ersichtlich, dass jene Function für die nach der Ordnung fortschreitenden ungeraden, und eben so auch für die geraden Vielfachen von π_1 abwechselnd verschiedene Vorzeichen erhalte. Diese Regel wird durch die in §. 42. für $\chi n\pi_1$ angegebenen Reihenentwickelungen allgemein erwiesen, weil darin sämmtliche zwischen den Klammern enthaltenen Glieder durchaus additiv sind und daher das Vorzeichen des ganzen Werthes stets von den ausserhalb stehenden Factoren abhängt, welche eben für die nach der Ordnung wachsenden sowohl ungeraden, als auch für die geraden Werthe von n abwechselnd additiv und subtractiv sind. Da nun $\chi\pi_1$ additiv und $\chi 2\pi_1$ subtractiv ist, folglich ungleiche Vorzeichen haben, so ergibt sich daraus, dass auch $\chi 3\pi_1$ und $\chi 4\pi_1$, ferner $\chi 5\pi_1$ und $\chi 6\pi_1$ und allgemein $\chi(2n-1)\pi_1$ und $\chi 2n\pi_1$ nothwendig ebenfalls ungleiche Vorzeichen besitzen müssen. Wegen der ununterbrochenen Stetigkeit der Function χx muss nun zwischen jedem Paare der mit

ungleichen Vorzeichen versehenen Werthe dieser Function wenigstens ein reeller Werth von x vorhanden sein, für welchen $\chi x = 0$ ist, und folglich gibt es gewiss wenigstens einen solchen Werth von x zwischen jedem Paare der angegebenen Gränzen, nähmlich zwischen

$$\pi_1 \text{ und } 2\pi_1, \quad 3\pi_1 \text{ und } 4\pi_1, \quad 5\pi_1 \text{ und } 6\pi_1,$$

$$\text{allgemein zwischen } (2n-1)\pi_1 \text{ und } 2n\pi_1.$$

Bezeichnen wir diese Werthe von x, für welche $\chi x = 0$ wird, nach der Ordnung beziehungsweise durch

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ldots \alpha_n,$$

so dass allgemein α_n zwischen $(2n-1)\pi_1$ und $2n\pi_1$ liegt, indem wir es einstweilen unentschieden lassen, ob es ausser den eben bezeichneten vielleicht noch mehrere andere mit ihnen zwischen denselben Gränzen enthaltene Werthe von x geben könne, für welche ebenfalls $\chi x = 0$ ist, so wie auch, ob nicht auch ausserhalb der angegebenen Gränzen, nähmlich zwischen $2\pi_1$ und $3\pi_1$, $4\pi_1$ und $5\pi_1$, u. s. f., eben solche Werthe vorhanden sind, Fragen, deren Beantwortung bald nachfolgen wird.

Für die Function ξx kann ganz auf dieselbe Art erwiesen werden, dass es zwischen jedem der Gränzenpaare $2\pi_1$ und $3\pi_1$, $4\pi_1$ und $5\pi_1$, allgemein $2n\pi_1$ und $(2n+1)\pi_1$, wo n jede beliebige ganze Zahl mit Ausnahme von 0 bedeutet, immer wenigstens einen Werth von x geben müsse, für welchen $\xi x = 0$ wird. Diese Werthe sollen im weiteren Verlaufe der Untersuchung stets beziehungsweise durch

$$\beta_1, \ \beta_2, \ \beta_3, \ldots \beta_n$$

bezeichnet werden, so dass β_n zwischen $2n\pi_1$ und $(2n+1)\pi_1$ liegt. Auch hiebei behalten wir es einer baldigen späteren Entscheidung vor, ob nebst den bezeichneten auch noch andere dergleichen reelle Werthe vorhanden sind oder nicht.

§. 47.

Wenn man bedenkt, dass vermöge §. 36. die reellen Werthe von x, für welche $\varphi x = 0$ ist, so wie auch diejenigen, für welche $\psi x = 0$ wird, jedesmal eine arithmetische Progression mit der Differenz $2\pi_1$ bilden; wenn man hiemit den Umstand verbindet, dass sowohl die unteren, als auch die oberen eben nachgewiesenen Gränzen, zwischen welchen die mit α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$ und

auch jene, zwischen welchen die mit β_1, β_2, β_3,.... bezeichneten Zahlen enthalten sein müssen, gleichfalls arithmetische Progressionen mit der gemeinschaftlichen Differenz $2\pi_1$ ausmachen: so sollte man sich zu der Erwartung berechtiget glauben, die Zahlen α_1, α_2, α_3,.... und auch β_1, β_2, β_3,.... dürften ebenfalls in arithmetischen Progressionen fortschreiten und jede von ihnen in der Mitte zwischen den vorhin angewiesenen Gränzen liegen. Allein in diesen Erwartungen findet man sich vollständig getäuscht. Denn wir haben bereits in §. 43. gesehen, dass keiner von den dort beispielsweise berechneten Werthen $\chi\frac{3}{2}\pi_1$, $\chi\frac{7}{2}\pi_1$, $\chi\frac{11}{2}\pi_1$, $\chi\frac{15}{2}\pi_1$, eben so wenig als $\xi\frac{5}{2}\pi_1$, $\xi\frac{9}{2}\pi_1$, $\xi\frac{13}{2}\pi_1$, wirklich gleich 0 sei, obgleich alle diese Werthe allerdings nur klein sind, und zugleich fortschreitend immer kleiner werden. Diese letzte Eigenschaft lässt sich nun ohne Schwierigkeit allgemein beweisen. Denn aus §. 40. ergibt sich, wenn dort entweder $\frac{3}{2}\pi_1$ oder $\frac{1}{2}\pi_1$ anstatt x angenommen wird, dass die Quotienten

$$\frac{\chi\left(\frac{4n+3}{2}\right)\pi_1}{\chi\left(\frac{4n-1}{2}\right)\pi_1} \quad \text{und} \quad \frac{\xi\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi_1}{\xi\left(\frac{4n-3}{2}\right)\pi_1}$$

bei fortwährendem Wachsthume von n sich immer mehr einer bestimmten Gränze nähern müssen, welche, wie aus der Beschaffenheit der ersten solchen Quotienten hervorgeht, im gegenwärtigen Falle nur $-0{,}04321$.... sein kann. Desshalb wird sich jede der beiden Reihen

$$\chi\tfrac{3}{2}\pi_1, \quad \chi\tfrac{7}{2}\pi_1, \quad \chi\tfrac{11}{2}\pi_1, \text{ u. s. f.}$$

und

$$\xi\tfrac{5}{2}\pi_1, \quad \xi\tfrac{9}{2}\pi_1, \quad \xi\tfrac{13}{2}\pi_1, \text{ u. s. f.}$$

immer mehr einer geometrischen Progression mit dem Quotienten $-0{,}04321$.... nähern, woraus folgt, dass die Glieder dieser Reihen nicht nur fortschreitend kleiner werden, sondern zugleich nach der Ordnung stets abwechselnde Vorzeichen haben müssen. Vergleicht man nun die erste dieser Reihen mit den Werthen

$$\chi 2\pi_1, \quad \chi 4\pi_1, \quad \chi 6\pi_1, \text{ u. s. f.},$$

welche letztere, wie in §. 46. bereits gezeigt worden ist, gleichfalls durchgängig abwechselnde Zeichen vor sich tragen, so sieht man aus den in §. 43. und §. 37. gefundenen Werthen, dass die ersten Glieder $\chi\frac{3}{2}\pi_1$ und $\chi 2\pi_1$ unter sich verschiedene Vorzeichen besitzen. Daher wird auch jedes nach der Ordnung folgende Paar von Gliedern, nähmlich

$\chi\frac{7}{2}\pi_1$ und $\chi 4\pi_1$, $\chi\frac{11}{2}\pi_1$ und $\chi 6\pi_1$, allgemein $\chi\left(\frac{4n-1}{2}\right)\pi_1$ und $\chi 2n\pi_1$

ebenfalls mit **ungleichen** Vorzeichen behaftet sein, woraus wegen der Stetigkeit der Function χx folgt, dass die vorhin mit α_1, α_2, α_3, ... α_n bezeichneten Werthe beziehungsweise zwischen den Gränzen

$\frac{3}{2}\pi_1$ und $2\pi_1$, $\frac{7}{2}\pi_1$ und $4\pi_1$, $\frac{11}{2}\pi_1$ und $6\pi_1$, ... $\left(\frac{4n-1}{2}\right)\pi_1$ und $2n\pi_1$

liegen, und demnach

$$\alpha_1 > \tfrac{3}{2}\pi_1, \quad \alpha_2 > \tfrac{7}{2}\pi_1, \quad \alpha_3 > \tfrac{11}{2}\pi_1, \ldots \alpha_n > \left(\frac{4n-1}{2}\right)\pi_1$$

ist.

Die Vergleichung der **zweiten** obigen Reihe

$$\xi\tfrac{5}{2}\pi_1, \quad \xi\tfrac{9}{2}\pi_1, \quad \xi\tfrac{13}{2}\pi_1, \ldots \xi\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi_1$$

mit den Werthen von

$$\xi 2\pi_1, \quad \xi 4\pi_1, \quad \xi 6\pi_1, \ldots \xi 2n\pi_1$$

lehrt ganz auf dieselbe Weise, dass die vorhin mit β_1, β_2, β_3, ... β_n bezeichneten Werthe beziehungsweise zwischen den Gränzen

$2\pi_1$ und $\frac{5}{2}\pi_1$, $4\pi_1$ und $\frac{9}{2}\pi_1$, $6\pi_1$ und $\frac{13}{2}\pi_1$, ... $2n\pi_1$ und $\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi_1$

liegen, und folglich

$$\beta_1 < \tfrac{5}{2}\pi_1, \quad \beta_2 < \tfrac{9}{2}\pi_1, \quad \beta_3 < \tfrac{13}{2}\pi_1, \ldots \beta_n < \left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi_1$$

sein müsse.

§. 48.

Durch das Erwiesene finden wir uns in den Stand gesetzt, die Werthe von α_1, α_2, α_3, ... α_n und auch von β_1, β_2, β_3, ... β_n mit Hilfe des im §. 45. erklärten Verfahrens so genau zu berechnen, als man dieselben zu kennen verlangt.

Zur näherungsweisen Berechnung von α_n wissen wir nämlich, dass dieser Werth zwischen den Gränzen $\left(\frac{4n-1}{2}\right)\pi_1$ und

$2n\pi_1$ enthalten sei und der ersten dieser Gränzen ganz nahe liege. Desshalb können wir in der für die Function χx in §. 45. aufgestellten Näherungsformel

$$x = \alpha_n, \quad \chi x = \chi \alpha_n = 0 \quad \text{und} \quad a = \left(\frac{4k+1}{2}\right)\pi_1$$

setzen. Dadurch erhalten wir

$$y = -\frac{\chi a}{\varphi a} \quad \text{und} \quad \alpha_n = a + y = a - \frac{\chi a}{\varphi a},$$

wobei der noch vorhandene Fehler nahezu

$$\frac{\xi a}{\varphi a} \cdot \frac{y^2}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{\xi a}{\varphi a} \cdot \frac{\chi a^2}{2\varphi a^2}$$

betragen wird. Sollte dieser Fehler zu bedeutend ausfallen, um vernachlässigt werden zu dürfen, so können aus dem bereits erhaltenen Näherungswerthe, der durch a_1 bezeichnet werden soll, so dass

$$a_1 = a - \frac{\chi a}{\varphi a}$$

ist, auf dieselbe Weise neue solche Werthe hergeleitet werden, nähmlich

$$a_2 = a_1 - \frac{\chi a_1}{\varphi a_1} = a - \frac{\chi a}{\varphi a} - \frac{\chi a_1}{\varphi a_1},$$

$$a_3 = a_2 - \frac{\chi a_2}{\varphi a_2} = a - \frac{\chi a}{\varphi a} - \frac{\chi a_1}{\varphi a_1} - \frac{\chi a_2}{\varphi a_2}, \text{ u. s. f.,}$$

und der dabei jedesmal unterlaufende Fehler wird beziehungsweise nahezu

$$\frac{\xi a_1}{\varphi a_1} \cdot \frac{(a_2 - a_1)^2}{2}, \quad \frac{\xi a_2}{\varphi a_2} \cdot \frac{(a_3 - a_2)^2}{2}, \text{ u. s. f.}$$

betragen. Es versteht sich hiebei von selbst, dass man die Näherung nur so lange fortzusetzen braucht, bis man den gewünschten Grad der Genauigkeit erreicht haben wird, was begreiflicher Weise desto rascher erfolgen muss, je weniger der zuerst angenommene Näherungswerth a von der gesuchten Zahl α_n verschieden ist.

Aus diesem Grunde fällt die Bestimmung von α_1 verhältnissmässig am weitläufigsten aus. Setzt man nähmlich zu diesem Behufe

$$a = \tfrac{3}{2}\pi_1 = 3{,}33216\ldots,$$

so wird man

$$y = -\frac{\chi^{\frac{3}{2}}\pi_1}{\varphi^{\frac{3}{2}}\pi_1} = \frac{0{,}047390}{3{,}763754} = 0{,}01259\ldots$$

und daher

$$\alpha_1 = 3{,}33216 + 0{,}01259 = 3{,}34475$$

finden, wobei der unterlaufende Fehler nahezu

$$\frac{\xi^{\frac{3}{2}}\pi_1}{\varphi^{\frac{3}{2}}\pi_1}\cdot\frac{y^2}{2} = -\frac{5{,}275362}{3{,}763754}\cdot\frac{0{,}01259^2}{2} = -0{,}00011$$

ausmacht. Mit Berücksichtigung dieses Fehlers wird daher

$$\alpha_1 = 3{,}34475 - 0{,}00011 = 3{,}34464$$

sein. Obgleich die hierdurch wirklich erreichte Näherung nicht mit voller Zuverlässigkeit beurtheilt werden kann, ist doch so viel klar, dass dieser letzte Werth dem wahren näher kommen müsse, als der früher mit α_1 bezeichnete. Desshalb wird es zweckmässig sein, bei der weiteren Fortsetzung der Arbeit anstatt des früheren α_1 diesen zuletzt gefundenen als neuen Näherungswerth anzunehmen. Unter dieser Voraussetzung erhält man durch Wiederholung des Verfahrens

$\alpha_2 = 3{,}34464\ 38860$ und ferner $\alpha_3 = 3{,}34464\ 38859\ 81086\ 32207$

jedesmal bis zur letzten angegebenen Decimalstelle richtig, so dass in 20 Decimalstellen genau $\alpha_1 = 3{,}34464\ 38859\ 81086\ 32207$ ist.

Für die Werthe α_2, α_3, α_4, ... stellt sich die Rechnung fortschreitend immer kürzer heraus. Denn man überzeugt sich aus den in §. 43. zu dem gegenwärtigen Zwecke berechneten Zahlen, dass durch die nur einmalige Anwendung des Newton'schen Verfahrens α_2 wenigstens in 9, α_3 wenigstens in 14 und α_4 wenigstens in 19 Decimalstellen richtig gefunden werde. Es ist nähmlich:

$$\alpha_2 = \tfrac{7}{2}\pi_1 - \frac{\chi^{\frac{7}{2}}\pi_1}{\varphi^{\frac{7}{2}}\pi_1} = 7{,}77506\ 8866,$$

$$\alpha_3 = \tfrac{11}{2}\pi_1 - \frac{\chi^{\frac{11}{2}}\pi_1}{\varphi^{\frac{11}{2}}\pi_1} = 12{,}21792\ 81242\ 3972,$$

$$\alpha_4 = \tfrac{15}{2}\pi_1 - \frac{\chi^{\frac{15}{2}}\pi_1}{\varphi^{\frac{15}{2}}\pi_1} = 16{,}66081\ 10181\ 76609\ 0117.$$

Alle diese Werthe müssen nicht nur bis zur letzten angegebenen Decimalstelle richtig sein, sondern man wird zugleich sehen, dass jeder derselben noch um mehrere Decimalstellen weiter ge-

nau erhalten werden könnte, wenn man dabei die Grösse des jedesmaligen Fehlers eben so berücksichtigen wollte, wie diess vorher bei der Berechnung des ersten Näherungswerthes von α_1 durch das Newton'sche Verfahren wirklich geschehen ist.

Da ferner, wie in §. 47. nachgewiesen wurde, die Werthe von $\chi\left(\frac{4n-1}{2}\right)\pi_1$ bei fortwährend wachsenden n sich immer mehr einer geometrischen Progression mit dem Quotienten $-0{,}04321....$, hingegen die Werthe von $\varphi\left(\frac{4n-1}{2}\right)\pi_1$, welche, wie die ersten Glieder zeigen, eine steigende Reihe ausmachen, vermöge §. 40. einer eben solchen Progression mit dem Quotienten $-23{,}14069....$ sich nähern, so müssen die Quotienten

$$\frac{\chi\left(\frac{4n-1}{2}\right)\pi_1}{\varphi\left(\frac{4n-1}{2}\right)\pi_1}$$

fortwährend einer Progression mit dem Quotienten

$$\frac{0{,}04321....}{23{,}14069....}=(0{,}04321....)^2=0{,}001867<\frac{2}{10^3}$$

näher kommen. Nun ist aber für $n=4$ vermöge §. 43:

$$-\frac{\chi\frac{15}{2}\pi_1}{\varphi\frac{15}{2}\pi_1}=0{,}00000\ 00000\ 827<\frac{1}{10^{10}},$$

folglich muss für $n=5, 6, 7, 8$

$$-\frac{\chi\frac{19}{2}\pi_1}{\varphi\frac{19}{2}\pi_1}<\frac{2}{10^{13}},\quad -\frac{\chi\frac{23}{2}\pi_1}{\varphi\frac{23}{2}\pi_1}<\frac{4}{10^{16}},\quad -\frac{\chi\frac{27}{2}\pi_1}{\varphi\frac{27}{2}\pi_1}<\frac{8}{10^{19}},$$

$$-\frac{\chi\frac{31}{2}\pi_1}{\varphi\frac{31}{2}\pi_1}<\frac{16}{10^{22}}$$

sein. Daher kann von $n=5$ angefangen in wenigstens 12 und von $n=8$ angefangen in wenigstens 20 Decimalstellen genau

$$\alpha_n=\frac{(4n-1)}{2}\pi_1$$

gesetzt und dadurch die näherungsweise Bestimmung von α_n äusserst leicht gemacht werden. Zur näherungsweisen Berechnung der Werthe von $\beta_1, \beta_2, \beta_3, ... \beta_n$ lässt sich offenbar ganz das nämliche Verfahren mit wenigen leicht in die Augen fallenden Abänderungen anwenden, welches so eben für die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ... \alpha_n$ gebraucht wurde. Diess ist zu sehr einleuchtend,

als dass eine umständliche Wiederholung des Gesagten für nöthig erachtet werden sollte. Desshalb genügt es, nur die Resultate hier anzusetzen. Man wird nähmlich, wenn $b=\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi_1$ gesetzt wird, für β_n nach und nach die Näherungswerthe erhalten:

$$b_1=b-\frac{\xi b}{\psi b},$$

$$b_2=b_1-\frac{\xi b_1}{\psi b_1}=b-\frac{\xi b}{\psi b}-\frac{\xi b_1}{\psi b_1}.$$

$$b_3=b_2-\frac{\xi b_2}{\psi b_2}=b-\frac{\xi b}{\psi b}-\frac{\xi b_1}{\psi b_1}-\frac{\xi b_2}{\psi b_2}, \quad \text{u. s. f.}$$

und die hiebei noch unterlaufenden Fehler ergeben sich nahezu beziehungsweise:

$$-\frac{\chi b}{\psi b}\cdot\frac{(b_1-b)^2}{2}, \quad -\frac{\chi b_1}{\psi b_1}\cdot\frac{(b_2-b_1)^2}{2}, \quad -\frac{\chi b_2}{\psi b_2}\cdot\frac{(b_3-b_2)^2}{2} \quad \text{u. s. f.}$$

Auf solche Art findet man für $n=1$ aus dem Werthe von b_3, dass

$$\beta_1=5,55306\ 42437\ 43718\ 61130$$

bis zur letzten Decimalstelle richtig sei; hingegen für $n=2$ und $n=3$ folgt schon aus den Werthen von b_1:

$$\beta_2=\ 9,99648\ 76360\ 9,$$

$$\beta_3=14,43936\ 95509\ 29249\ 06$$

bis zur letzten angegebenen Ziffer genau.

Es zeigt sich ferner, dass für gössere Werthe von n mit rasch zunehmender Näherung, die schon bei $n=4$ wenigstens 20 Decimalstellen erreicht,

$$\beta_n=\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi_1-\frac{\xi\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi_1}{\psi\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi_1}$$

gesetzt, und von $n=8$ angefangen in mehr als 20 Decimalstellen genau

$$\beta_n=\frac{(4n+1)}{2}\pi_1$$

angenommen werden dürfe, was die Berechnung ungemein leicht macht und doch zu jedem wirklichen Gebrauche mehr als hinreichend genau erscheint.

§. 40.

Wir haben bereits in §. 3. gesehen, dass den drei letzten von den Gleichungen

$$\varphi x = 0, \quad \chi x = 0, \quad \psi x = 0, \quad \xi x = 0$$

durch den Werth $x = 0$ gleichzeitig Genüge geleistet werde. Ich will nun nachweisen, dass es ausser $x = 0$ keinen andern weder reellen noch imaginären Werth von x gebe, welcher zugleich irgend zweien von jenen Gleichungen entsprechen könnte. Betrachten wir zu diesem Behufe alle möglichen Fälle einzeln.

Was zuerst die beiden Gleichungen $\varphi x = 0$ und $\psi x = 0$ anbelangt, wissen wir aus der allgemeinen in §. 36. enthaltenen Auflösung derselben, dass überhaupt kein Werth von x, welcher der einen von ihnen entspricht, auch der anderen Genüge leistet, so dass diese beiden Gleichungen niemals gleichzeitig für denselben Werth von x richtig sein können.

Nehmen wir zweitens die beiden Gleichungen $\varphi x = 0$ und $\chi x = 0$ als zugleich bestehend an. Durch die Substitution dieser Werthe gehen die beiden ersten in §. 10. gefundenen Gleichungen in

$$-\psi x^2 = 1 \quad \text{und} \quad \xi x^2 = 0$$

über, woraus

$$\psi x = \pm\sqrt{-1} = \pm i \quad \text{und} \quad \xi x = 0$$

folgen würde. Aus §. 36. ist aber bekannt, dass alle Werthe von x, für welche $\varphi x = 0$ ist, entweder reell oder einfach imaginär von der Form ai sind, wo a eine reelle Zahl bezeichnet. Es müsste daher für irgend einen reellen oder einfach imaginären Werth von x $\psi x = \pm i$ sein, was vermöge der Beschaffenheit der Function ψx nicht möglich ist, weil ψx für alle solche Werthe von x nothwendig reell sein muss. Demnach ist es auch nicht möglich, dass die beiden Gleichungen $\varphi x = 0$ und $\chi x = 0$ gleichzeitig für denselben Werth von x richtig seien.

Ganz auf den nähmlichen Widerspruch würde die Annahme von dem gleichzeitigen Bestehen der Gleichungen $\varphi x = 0$ und $\xi x = 0$ führen, welche daher ebenfalls nicht Statt haben kann.

Wollte man die Gleichungen $\chi x = 0$ und $\psi x = 0$ zugleich als richtig annehmen, so würde daraus vermöge §. 10. $\varphi x = \pm 1$, und $\xi x = 0$ sich ergeben. Aus §. 36. zeigt sich aber, dass unter den sämmtlichen dort angegebenen reellen und imaginären Werthen,

von x, für welche $\psi x=0$ ist, nur den einzige $x=0$ sich befindet, für welchen $\varphi x=+1$ wird, hingegen keiner, für welchen $\varphi x=-1$ werden könnte. Desshalb können auch die beiden hier betrachteten Gleichungen $\chi x=0$ und $\psi x=0$ in keinem andern Falle zugleich richtig sein, als nur wenn $x=0$ angenommen wird.

Auf die nähmlichen Folgerungen führt die Voraussetzung von dem gleichzeitigen Bestehen der Gleichungen $\psi x=0$ und $\xi x=0$, welche daher ebenfalls nur für $x=0$ zugleich richtig sein können.

Betrachtet man endlich die beiden Gleichungen $\chi x=0$ und $\xi x=0$ als gleichzeitig bestehend, so folgt daraus vermöge der zweiten in §. 10. gefundenen Gleichung, dass $2\varphi x.\psi x=0$ und daher entweder $\varphi x=0$ oder $\psi x=0$ sein müsse, wodurch man jedenfalls auf einen der bereits behandelten Fälle zurückgeführt wird.

Diese vollständige Aufzählung aller hier überhaupt möglichen Fälle erweist die allgemeine Richtigkeit des anfangs ausgesprochenen Satzes.

§. 50.

Die so eben erwiesene Eigenschaft gestattet zunächst die Folgerung, dass keine der Gleichungen $\varphi x=0$, $\chi x=0$, $\psi x=0$, $\xi x=0$ zwei oder mehrere unter sich gleiche Wurzeln haben könne, mit alleiniger Ausnahme des Werthes $x=0$ bei den zwei letzten Gleichungen. Denn hätte zuerst die Gleichung $\varphi x=0$ zwei oder mehrere einander gleiche Wurzeln, so müsste, wie aus der Theorie der Gleichungen bekannt ist, die nähmliche Wurzel auch der Gleichung $\frac{d\varphi x}{dx}=0$ wenigstens ein Mal zukommen, folglich müssten, da $\frac{d\varphi x}{dx}=-\xi x$ ist, die beiden Gleichungen $\varphi x=0$ und $\xi x=0$ für einerlei Werth von x richtig sein, was nach dem vorher Erwiesenen in keinem Falle möglich ist.

Auf dieselbe Weise lässt sich auch die Unmöglichkeit des Vorhandenseins gleicher Wurzeln in den Gleichungen $\chi x=0$, $\psi x=0$, $\xi x=0$ zeigen, wobei nur der Werth $x=0$ in den zwei letzten Gleichungen vermöge §. 49. eine Ausnahme macht.

§. 51.

Aus dem Satze des §. 49. folgt ferner, dass jede hypercyclische Function, wenn sie für irgend einen reellen Werth von x

selbst gleich 0 wird, für zunächst kleinere und zunächst grössere Werthe von x nothwendig ungleiche Vorzeichen haben müsse.

Betrachten wir zuerst wieder die Function φx und setzen wir $\varphi a = 0$. Unter dieser Voraussetzung folgt aus der in §. 44. angeführten Taylor'schen Reihe

$$\varphi(a \pm y) = \mp \xi a \cdot \frac{y}{1} - \psi a \cdot \frac{y^2}{2} \mp \chi a \cdot \frac{y^3}{3!} \pm \xi a \cdot \frac{y^5}{5!} + \ldots,$$

wo vermöge §. 49. nicht $\xi a = 0$ sein und daher das erste Glied nicht fehlen kann. In dieser Reihe, welche für jeden beliebigen Werth von y convergirt, lässt sich y so klein annehmen, dass das erste Glied $\xi a . y$, ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen betrachtet, grösser ausfällt, als die Summe aller folgenden Glieder. Bei dieser Annahme hat der Werth von $\varphi(a \pm y)$ stets einerlei Vorzeichen mit seinem ersten Gliede $\mp \xi a . y$ und daher müssen für hinreichend kleine Werthe von y die Functionen $\varphi(a - y)$ und $\varphi(a + y)$ nothwendig verschiedene Zeichen vor sich tragen.

Die nähmlichen Schlüsse lassen sich offenbar auch auf die Functionen χx, ψx und ξx anwenden, bei welchen demnach ebenfalls der ausgesprochene Satz gelten wird, mit Ausnahme des Werthes $a = 0$ bei der Function ψx.

§. 52.

Die vorhergehenden höchst einfachen Sätze machen es uns möglich, die Beschaffenheit der hypercylischen Functionen in Bezug auf die bei denselben eintretenden Aenderungen der Vorzeichen, dann rücksichtlich ihres Wachsens oder Abnehmens bei zunehmenden Werthen der Veränderlichen und der hiedurch sich ergebenden grössten und kleinsten Werthe der Functionen genau zu beurtheilen und zugleich dasjenige nachzuholen, was in §. 46. noch unentschieden gelassen wurde.

Stellen wir uns zu diesem Ende vor, die Veränderliche x nehme von 0 angefangen additiv fortwährend zu und untersuchen wir die Folgerungen, welche sich daraus ergeben. Wir wollen uns dabei erinnern, dass vermöge §. 3. 6. für hinlänglich kleine Werthe von x alle hypercyclischen Functionen additiv sind und es nicht nur bis zu den dort angegebenen Gränzen, sondern so lange bleiben, bis sie gleich 0 werden, weil jede von ihnen wegen ihrer Stetigkeit nur dann ihr Vorzeichen ändern kann, wenn sie zuvor gleich 0 geworden ist, bei dem wirklichen Eintritte

dieses letzten Falles aber vermöge §. 51. ihr Zeichen auch nothwendig ändern muss. Aus diesen Vordersätzen überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit folgender Gesetze, ohne dass es nothwendig sein wird, sie überall umständlich zu begründen:

1. Die Function φx bleibt, von $x=0$ angefangen, wo sie gleich 1 ist, beständig additiv bis $x=\pi_1$, wo sie gleich 0 wird; von $x=\pi_1$ weiter muss φx subtractiv werden und ununterbrochen bleiben, bis sie abermals gleich 0 wird, nähmlich bis $x=3\pi_1$, wo das Zeichen wieder wechselt. Auf diese Art muss überhaupt das Vorzeichen von φx bei allen ungeraden Vielfachen von π_1, und zwar nur bei diesen Werthen allein, sich ändern, und demnach φx zwischen $x=(4n-1)\pi_1$ und $x=(4n+1)\pi_1$ stets additiv, hingegen zwischen $x=(4n+1)\pi_1$ und $x=(4n+3)\pi_1$ immer subtractiv sein.

2. Die Function ψx bleibt, von $x=0$ angefangen, wo sie gleichfalls 0 ist, beständig additiv bis $x=2\pi_1$, wird dann subtractiv bis $x=4\pi_1$ und wechselt überhaupt ihr Vorzeichen bei allen geraden Vielfachen von π_1 dergestalt, dass sie zwischen $x=4n\pi_1$ und $x=(4n+2)\pi_1$ beständig additiv, zwischen $x=(4n-2)\pi_1$ und $x=4n\pi_1$ aber ununterbrochen subtractiv ist.

3. Da jede stetige Function bei zunehmenden Werthen der Veränderlichen selbst wächst oder abnimmt, je nachdem ihr Differentialquotient additiv oder subtractiv ist; da ferner in §. 13. $\frac{d\chi x}{dx}=\varphi x$ gefunden wurde: so folgt aus dem in 1. Erwiesenen, dass die Function χx zugleich mit der Veränderlichen von $x=0$ bis $x=\pi_1$ beständig wachsen, von da angefangen bis $x=3\pi_1$, fortwährend abnehmen, allgemein zwischen $x=(4n-1)\pi_1$ und $x=(4n+1)\pi_1$ stets wachsen, zwischen $x=(4n+1)\pi_1$ und $x=(4n+3)\pi_1$ immer abnehmen müsse.

4. Für die Function ξx ist wegen $\frac{d\xi x}{dx}=\psi x$ auf dieselbe Weise aus 2. klar, dass sie von $x=0$ bis $x=2\pi_1$ beständig wachsen, von da angefangen bis $x=4\pi_1$ ununterbrochen abnehmen, überhaupt zwischen $x=4n\pi_1$ und $x=(4n+2)\pi_1$ fortwährend zunehmen, hingegen zwischen $x=(4n-2)\pi_1$ und $x=4n\pi_1$ immer abnehmen müsse.

5. Aus 3. ergibt sich nun, dass die Function χx von $x=0$ bis $x=\pi_1$ niemals, zwischen $x=\pi_1$ und $x=3\pi_1$, ferner zwischen $x=3\pi_1$ und $x=5\pi_1$, allgemein zwischen jeden zwei ungeraden Vielfachen von π_1 nur ein einziges Mal gleich 0

werden könne. Desshalb sind die in §. 46. mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots. \alpha_n$ bezeichneten und in §. 48. berechneten wirklich die einzigen reellen additiven Werthe von x, für welche $\chi x = 0$ wird, was dort noch unentschieden gelassen wurde.

6. Auf dieselbe Weise erkennt man aus 4., dass die Function ξx von $x=0$ bis $x=2\pi_1$ niemals, dann zwischen $x=2\pi_1$ und $x=4\pi_1$, allgemein zwischen jeden zwei geraden Vielfachen von π_1 nur ein einziges Mal gleich 0 sein könne. Die in §. 46. mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots. \beta_n$ bezeichneten und in §. 48. näherungsweise berechneten sind daher die einzigen reellen additiven Wurzeln der Gleichung $\xi x = 0$.

7. Da wir nun die sämmtlichen reellen additiven Wurzeln der Gleichung $\chi x = 0$ kennen, und ein Zeichenwechsel bei dieser stetigen Function nur eintreten kann, wenn zuvor $\chi x = 0$ geworden ist, in diesem Falle aber auch nothwendig Statt finden muss; so wird χx von $x=0$ bis $x=\alpha_1$ beständig additiv, von $x=\alpha_1$ bis $x=\alpha_2$ stets subtractiv, allgemein zwischen $x=\alpha_{2n}$ und $x=\alpha_{2n+1}$ jederzeit additiv, hingegen zwischen $x=\alpha_{2n-1}$ und $x=\alpha_{2n}$ allemal subtractiv sein.

8. Eben so wird die Function ξx von $x=0$ bis $x=\beta_1$ ununterbrochen additiv, von $x=\beta_1$ bis $x=\beta_2$ subtractiv, allgemein zwischen $x=\beta_{2n}$ und $x=\beta_{2n+1}$ stets additiv, von $x=\beta_{2n-1}$ bis $x=\beta_{2n}$ beständig subtractiv sein müssen.

9. Wegen des eben Erwiesenen und da $\frac{d\varphi x}{dx} = -\xi x$ ist, muss die Function φx von $x=0$ bis $x=\beta_1$ beständig abnehmen, dann von $x=\beta_1$ bis $x=\beta_2$ wieder ununterbrochen wachsen; allgemein wird sie zwischen $x=\beta_{2n}$ und $x=\beta_{2n+1}$ stets abnehmen und zwischen $x=\beta_{2n-1}$ und $x=\beta_{2n}$ fortwährend wachsen.

10. Eben so folgt aus 7. und wegen $\frac{d\psi x}{dx} = \chi x$, dass die Function ψx von $x=0$ bis $x=\alpha_1$ beständig wachsen, dann von $x=\alpha_1$ bis $x=\alpha_2$ wieder abnehmen, allgemein zwischen $x=\alpha_{2n}$ und $x=\alpha_{2n+1}$ stets wachsen, hingegen zwischen $x=\alpha_{2n-1}$ und $x=\alpha_{2n}$ immer abnehmen müsse.

11. Vermöge §. 3. 2. erhalten alle hypercyclischen Functionen für subtractive x ganz die nähmlichen Werthe, wie für die gleichen additiven x, nur haben die Functionen χx und ξx entgegengesetzte Vorzeichen, durch welchen letzten Umstand zugleich das Wachsen dieser Functionen in Abnehmen und

das Abnehmen in Wachsen übergeht. Desswegen haben die Functionen φx und ψx für subtractive Werthe der Veränderlichen sowohl in Bezug auf ihre Vorzeichen als auch auf das Wachsen oder Abnehmen derselben ganz das nähmliche Verhalten, wie es in 1. 2. 9. 10. für gleiche additive Werthe von x nachgewiesen wurde, hingegen die Functionen χx und ξx besitzen in beiden Rücksichten gerade die entgegengesetzte Beschaffenheit für subtractive x, wie sie in 3. 4. 7. 8. für die gleichen additiven x angegeben wurde.

§. 53.

Um sich eine bequeme Uebersicht der so eben im einzelnen nachgewiesenen Eigenschaften der hypercyclischen Functionen zu verschaffen, dürfte es am angemessensten sein, sowohl für die Vorzeichen, als auch für das Wachsen und Abnehmen der Functionen kleine Tabellen zu verfassen, durch welche man in den Stand gesetzt wird, die zusammengehörige Beschaffenheit der sämmtlichen Functionen gleichsam mit einem Blicke zu überschauen. In letzterer Beziehung ist es hiezu nothwendig, eine besondere kurze Bezeichnung für das Wachsen oder Abnehmen der Functionen einzuführen. Ich wähle zu diesem Behufe für das Wachsen das Zeichen $<$, welches mir hinlänglich deutlich ein Forschreiten vom Kleineren zum Grösseren auszudrücken scheint, und für das Abnehmen das umgekehrte Zeichen $>$. Hiebei muss noch bemerkt werden, dass im Vorhergehenden das Wachsen und Abnehmen der Functionen stets im algebraischen oder analytischen Sinne verstanden wurde, folglich mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen. Das Wachsen und Abnehmen kann aber auch absolut ohne alle Rücksicht auf die Vorzeichen betrachtet werden, wodurch es sich dann von dem früheren oft wesentlich unterscheidet. Durch das Gesagte werden hoffentlich die drei nachstehenden kleinen Tabellen hinlänglich deutlich erscheinen, ohne einer weiteren Erklärung zu bedürfen. Ebenso wenig wird es nöthig sein, eine besondere Erinnerung beizufügen, wie dieselben mit leichter Mühe weiter fortgesetzt werden können.

Tabelle I

über die Vorzeichen der hypercyclischen Functionen.

x	von 0 bis π_1	von π_1 bis α_1	von α_1 bis $2\pi_1$	von $2\pi_1$ bis β_1	von β_1 bis $3\pi_1$	von $3\pi_1$ bis α_2	von α_2 bis $4\pi_1$	von $4\pi_1$ bis β_2	von β_2 bis $5\pi_1$	von $5\pi_1$ bis α_3	von α_3 bis $6\pi_1$	von $6\pi_1$ bis β_3
φx	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−
χx	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−
ψx	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−
ξx	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	+	+

Tabelle II

über das Wachsen oder Abnehmen der hypercyclischen Functionen mit Berücksichtigung ihrer Vorzeichen.

x	von 0 bis π_1	von π_1 bis α_1	von α_1 bis $2\pi_1$	von $2\pi_1$ bis β_1	von β_1 bis $3\pi_1$	von $3\pi_1$ bis α_2	von α_2 bis $4\pi_1$	von $4\pi_1$ bis β_2	von β_2 bis $5\pi_1$	von $5\pi_1$ bis α_3	von α_3 bis $6\pi_1$	von $6\pi_1$ bis β_3
φx	$>$	$>$	$>$	$>$	$<$	$<$	$<$	$<$	$>$	$>$	$>$	$>$
χx	$<$	$>$	$>$	$>$	$>$	$<$	$<$	$<$	$<$	$>$	$>$	$>$
ψx	$<$	$<$	$>$	$>$	$>$	$>$	$<$	$<$	$<$	$<$	$>$	$>$
ξx	$<$	$<$	$<$	$>$	$>$	$>$	$>$	$<$	$<$	$<$	$<$	$>$

Tabelle III

über das Wachsen oder Abnehmen der hypercyclischen Functionen ohne Rücksicht auf ihre Vorzeichen.

x	von 0 bis π_1	von π_1 bis α_1	von α_1 bis $2\pi_1$	von $2\pi_1$ bis β_1	von β_1 bis $3\pi_1$	von $3\pi_1$ bis α_2	von α_2 bis $4\pi_1$	von $4\pi_1$ bis β_2	von β_2 bis $5\pi_1$	von $5\pi_1$ bis α_3	von α_3 bis $6\pi_1$	von $6\pi_1$ bis β_3
φx	$>$	$<$	$<$	$<$	$>$	$<$	$<$	$<$	$>$	$<$	$<$	$<$
χx	$<$	$>$	$<$	$<$	$<$	$>$	$<$	$<$	$<$	$>$	$<$	$<$
ψx	$<$	$<$	$>$	$<$	$<$	$<$	$>$	$<$	$<$	$<$	$>$	$<$
ξx	$<$	$<$	$<$	$>$	$<$	$<$	$<$	$>$	$<$	$<$	$<$	$>$

§. 54.

Da jede stetige Function einen sogenannten grössten oder kleinsten Werth dort erhalten muss, wo das Wachsen derselben in Abnehmen oder umgekehrt das Abnehmen in Wachsen übergeht, so ergeben sich aus §. 52. 3. 4. 9. 10. oder auch aus der blossen Ansicht der Tabelle II. die grössten und kleinsten Werthe für die hypercyclischen Functionen folgender Massen:

bei φx für $x=0,\ \pm\beta_1,\ \pm\beta_2,\ \pm\beta_3,\ \ldots\ \pm\beta_n,\ldots,$

bei χx für $x=\ \pm\pi_1,\ \pm3\pi_1,\ \pm5\pi_1,\ \ldots\ \pm(2n-1)\pi_1,\ldots,$

bei ψx für $x=0,\ \pm\alpha_1,\ \pm\alpha_2,\ \pm\alpha_3,\ \ldots\ \pm\alpha_n,\ldots,$

bei ξx für $x=\ \pm2\pi_1,\ \pm4\pi_1,\ \pm6\pi_1,\ \ldots\ \pm2n\pi_1,\ldots\ldots$

Aus der Betrachtung der in §. 52. aufgestellten Regeln oder noch leichter aus der Vergleichung der Tabelle II. mit Tabelle I. wird man entnehmen, dass die sämmtlichen bei den hypercyclischen Functionen vorkommenden grössten Werthe durchgängig additiv und daher auch dann wirkliche Maxima sind, wenn auf ihre Vorzeichen keine Rücksicht genommen wird; hingegen findet man alle sogenannten kleinsten Werthe, mit einer einzigen Ausnahme, sämmtlich subtractiv, wesshalb sie ohne Rücksicht auf ihre Vorzeichen betrachtet eigentlich ebenfalls Maxima sind, wie diess auch die Tabelle III. zeigt.

So z. B. ist $\varphi 0=1$ ein additives Maximum, hingegen $\varphi\beta_1 = -18{,}91522\ 44081$ ist zwar im analytischen Sinne ein Minimum, sobald jedoch dieser Werth ohne Rücksicht auf das Vorzeichen betrachtet wird, ist er ebenfalls ein Maximum, nähmlich der grösste Werth, welchen die Function φx zwischen $x=\pi_1$ und $x=3\pi_1$ erhalten kann. Das nähmliche gilt offenbar auch für $x=\beta_3,\ \beta_5,\ldots$ allgemein für $x=\beta_{2n-1}$. Eben so ist $\psi 0=0$ ein Minimum, und zwar das einzige, welches nicht subtractiv ist; ferner sind $\psi\alpha_1=3{,}69703\ 10125$, dann $\psi\alpha_3,\ \psi\alpha_5,\ldots\ \psi\alpha_{2n-1}$ additive Maxima, hingegen $\psi\alpha_2,\ \psi\alpha_4,\ldots\ \psi\alpha_{2n}$ sind zwar analytische Minima, jedoch ohne Rücksicht auf ihre Vorzeichen genommen, gleichfalls Maxima.

Mit gehöriger Berücksichtigung des eben Gesagten wird man bei dem Gebrauche, der nach Anleitung des §. 45. von den grössten und kleinsten Werthen der hypercyclischen Functionen gemacht werden soll, weiter keine Schwierigkeit finden.

§. 55.

In §. 36. sind die sämmtlichen reellen und imaginären Wurzeln der Gleichungen $\varphi x=0$ und $\psi x=0$ gefunden worden. Vermöge §. 48. sind wir im Stande die dort mit α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_n, \ldots$ und β_1, β_2, $\beta_3, \ldots \beta_n, \ldots$ bezeichneten reellen additiven Wurzeln der Gleichungen $\chi x=0$ und $\xi x=0$ zu berechnen, von welchen in §. 52. 5. und 6. erwiesen wurde, dass sie die einzigen Wurzeln dieser Art sind, welche den letzteren Gleichungen zukommen. Aus diesen reellen additiven ergeben sich nun vermöge §. 3. 2. alle reellen subtractiven Wurzeln der nähmlichen Gleichungen durch blosse Veränderung der Vorzeichen, und hieraus ferner die imaginären additiven und subtractiven Wurzeln durch Beifügung des Factors i. Da wir auf solche Art die reellen und imaginären Wurzeln der vier angezeigten Gleichungen kennen, von welchen wir überdiess aus §. 50. wissen, dass sie keine gleichen Wurzeln enthalten können, so lassen sich in Gemässheit der aus der Theorie der Gleichungen bekannten Weise die vier hypercyclischen Functionen in ihre einfachen sogenannten Wurzelfactoren zerlegen, von welchen aber ein Theil vermöge der Beschaffenheit der Wurzeln imaginär ist. Dieser Uebelstand lässt sich beseitigen, wenn man je vier von jenen Factoren, welche aus den zusammengehörigen Wurzeln $+a$, $-a$, $+ai$, $-ai$, wo a was immer für eine von den reellen additiven Wurzeln bedeuten kann, entspringen, durch Multiplication in einen einzigen zusammenzieht. Denn es ist

$$(1-\frac{x}{a})(1+\frac{x}{a})(1-\frac{x}{ai})(1+\frac{x}{ai})=(1-\frac{x^2}{a^2})(1+\frac{x^2}{a^2})=1-\frac{x^4}{a^4}.$$

Wird diese Multiplication mit allen zusammengehörigen Wurzelfactoren einer jeden hypercyclischen Function vorgenommen, so erhält man folgende Zerlegungen:

$$\varphi x=(1-\frac{x^4}{\pi_1^4})(1-\frac{x^4}{3^4.\pi_1^4})(1-\frac{x^4}{5^4.\pi_1^4})(1-\frac{x^4}{7^4.\pi_1^4})(1-\frac{x^4}{9^4.\pi_1^4})\ldots,$$

$$\chi x=x(1-\frac{x^4}{\alpha_1^4})(1-\frac{x^4}{\alpha_2^4})(1-\frac{x^4}{\alpha_3^4})(1-\frac{x^4}{\alpha_4^4})(1-\frac{x^4}{\alpha_5^4})\ldots,$$

$$\psi x=\frac{x^2}{2}(1-\frac{x^4}{2^4.\pi_1^4})(1-\frac{x^4}{4^4.\pi_1^4})(1-\frac{x^4}{6^4.\pi_1^4})(1-\frac{x^4}{8^4.\pi_1^4})(1-\frac{x^4}{10^4.\pi_1^4})\ldots,$$

$$\xi x=\frac{x^3}{6}(1-\frac{x^4}{\beta_1^4})(1-\frac{x^4}{\beta_2^4})(1-\frac{x^4}{\beta_3^4})(1-\frac{x^4}{\beta_4^4})(1-\frac{x^4}{\beta_5^4})\ldots.$$

Den vorstehenden Werthen von φx und ψx kann eine etwas

veränderte Form gegeben werden, indem man vermöge §. 36. darin $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ anstatt π_1 und folglich $\frac{\pi^4}{4}$ anstatt $\pi_1{}^4$ substituirt, wodurch sie folgende Gestalt annehmen:

$$\varphi x = (1-\frac{4x^4}{\pi^4})(1-\frac{4x^4}{3^4.\pi^4})(1-\frac{4x^4}{5^4.\pi^4})(1-\frac{4x^4}{7^4.\pi^4})(1-\frac{4x^4}{9^4.\pi^4})\ldots,$$

$$\psi x = \frac{x^2}{2}(1-\frac{4x^4}{2^4.\pi^4})(1-\frac{4x^4}{4^4.\pi^4})(1-\frac{4x^4}{6^4.\pi^4})(1-\frac{4x^4}{8^4.\pi^4})(1-\frac{4x^4}{10^4.\pi^4})\ldots\ldots$$

§. 56.

Betrachtet man die im §. 5. angegebenen Werthe von $\chi x + \xi x$ und $\chi x - \xi x$, so wird man sogleich erkennen, dass dieselben ganz auf die nähmliche Art sich in Factoren zerlegen lassen, welche so eben bei den Functionen φx und ψx angewendet wurde. Denn es ist daraus offenbar, dass nur dann $\chi x + \xi x = 0$ sein könne und sein müsse, wenn entweder

$$\sin\frac{x}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{oder} \quad \cos\frac{xi}{\sqrt{2}} = 0$$

und daher entweder

$$x = \pm n\pi\sqrt{2} = \pm 2n\pi_1 \quad \text{oder} \quad x = \pm\frac{(2n-1)}{2}\pi i\sqrt{2} = \pm(2n-1)\pi_1 i$$

angenommen wird, wo n jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann. Hieraus folgt nun durch Zerlegung in die Wurzelfactoren und Multiplication je zweier zusammen gehöriger solcher Factoren:

$$\chi x + \xi x$$

$$= x(1+\frac{x^2}{\pi_1{}^2})(1-\frac{x^2}{2^2.\pi_1{}^2})(1+\frac{x^2}{3^2.\pi_1{}^2})(1-\frac{x^2}{4^2.\pi_1{}^2})(1+\frac{x^2}{5^2.\pi_1{}^2})(1-\frac{x^2}{6^2.\pi_1{}^2})\ldots,$$

oder wenn man hierin anstatt π_1 seinen Werth substituirt:

$$\chi x + \xi x$$

$$= x(1+\frac{2x^2}{\pi^2})(1-\frac{2x^2}{2^2.\pi^2})(1+\frac{2x^2}{3^2.\pi^2})(1-\frac{2x^2}{4^2.\pi^2})(1+\frac{2x^2}{5^2.\pi^2})(1-\frac{2x^2}{6^2.\pi^2})\ldots.$$

Auf demselben Wege findet man aus dem in §. 5. enthaltenen Werthe von $\chi x - \xi x$, dass der Gleichung $\chi x - \xi x = 0$ nur die Wurzeln

$$x = \pm\frac{(2n-1)}{2}\pi\sqrt{2} = \pm(2n-1)\pi_1 \quad \text{und} \quad x = \pm n\pi i\sqrt{2} = \pm 2n\pi_1 i$$

zugehören, woraus dann

$$\chi x - \xi x$$
$$= x(1-\frac{x^2}{\pi_1{}^2})(1+\frac{x^2}{2^2.\pi_1{}^2})(1-\frac{x^2}{3^2.\pi_1{}^2})(1+\frac{x^2}{4^2.\pi_1{}^2})(1-\frac{x^2}{5^2.\pi_1{}^2})(1+\frac{x^2}{6^2.\pi_1{}^2})\ldots,$$

oder auch

$$\chi x - \xi x$$
$$= x(1-\frac{2x^2}{\pi^2})(1+\frac{2x^2}{2^2.\pi^2})(1-\frac{2x^2}{3^2.\pi^2})(1+\frac{2x^2}{4^2.\pi^2})(1-\frac{2x^2}{5^2.\pi^2})(1+\frac{2x^2}{6^2.\pi^2})\ldots$$

folgt.

Noch kann aus den in §. 55. gefundenen Zerlegungen von χx und ξx eine andere abgeleitet werden, die nicht mit Stillschweigen übergangen werden darf. Es ergibt sich nähmlich aus §. 21. $1-\varphi 2x = 4\chi x.\xi x$, und daher ist, wenn anstatt χx und ξx die bemerkten Werthe substituirt werden:

$$1-\varphi 2x = \frac{2x^4}{3}(1-\frac{x^4}{\alpha_1{}^4})(1-\frac{x^4}{\beta_1{}^4})(1-\frac{x^4}{\alpha_2{}^4})(1-\frac{x^4}{\beta_2{}^4})(1-\frac{x^4}{\alpha_3{}^4})(1-\frac{x^4}{\beta_3{}^4})\ldots$$

§. 57.

Die in §. 55. und §. 56. vorgenommenen Zerlegungen lassen sich benützen, um die Logarithmen der Functionen φx, χx ψx, ξx, $\chi x + \xi x$, $\chi x - \xi x$ und $1-\varphi 2x$ in Reihen zu entwickeln, für welche sich einfache Bildungsgesetze ihrer Coefficienten ergeben und daraus ohne Schwierigkeit die Gränzen ihrer Convergenz bestimmt werden können. Betrachten wir zu diesem Zwecke zuerst die Functionen φx, ψx, $\chi x + \xi x$ und $\chi x - \xi x$. Zum Behufe der Entwicklung ihrer Logarithmen braucht man nur das nähmliche Verfahren anzuwenden, welches gewöhnlich dazu dient, aus den analogen Zerlegungen von $\cos x$ und $\sin x$ die Logarithmen davon durch Reihen darzustellen, und welches zu sehr bekannt ist, als dass eine umständliche Auseinandersetzung desselben hier nöthig befunden werden sollte. Ich beschränke mich daher, nur die Resultate hier anzusetzen. Man wird nähmlich, wenn die natürlichen Logarithmen durch l und die Bernoulli'schen Zahlen nach der Ordnung durch B_1, B_2, B_3, B_4,.... bezeichnet werden, auf dem angedeuteten Wege finden:

$$l\varphi x = -\frac{(2^4-1)2B_2}{4!}.\frac{x^4}{1} - \frac{(2^8-1)2^3B_4}{8!}.\frac{x^8}{2} - \frac{(2^{12}-1)2^5B_6}{12!}.\frac{x^{12}}{3}$$
$$-\frac{(2^{16}-1)2^7B_8}{16!}.\frac{x^{16}}{4} - \ldots,$$

$$l\psi x = 2lx - l2 - \frac{2B_2}{4!}\cdot\frac{x^4}{1} - \frac{2^3B_4}{8!}\cdot\frac{x^8}{2} - \frac{2^5B_6}{12!}\cdot\frac{x^{12}}{3} - \frac{2^7B_8}{16!}\cdot\frac{x^{16}}{4} - \ldots,$$

$$l(\chi x+\xi x) = lx + \frac{(2^1-1)2B_1}{2!}\cdot\frac{x^2}{1} - \frac{2^5B_2}{4!}\cdot\frac{x^4}{2} + \frac{(2^5-1)2^3B_3}{6!}\cdot\frac{x^6}{3} - \frac{2^{11}B_4}{8!}\cdot\frac{x^8}{4} + \ldots,$$

$$l(\chi x-\xi x) = lx - \frac{(2^1-1)2B_1}{2!}\cdot\frac{x^2}{1} - \frac{2^5B_2}{4!}\cdot\frac{x^4}{2} - \frac{(2^5-1)2^3B_3}{6!}\cdot\frac{x^6}{3} - \frac{2^{11}B_4}{8!}\cdot\frac{x^8}{4} - \ldots$$

Die Coefficienten der beiden letzten so eben gefundenen Reihen scheinen dem ersten Anblicke nach einem doppelten Gesetze zu unterliegen, doch können sie auch leicht unter einem gemeinschaftlichen allgemeinen Ausdruck zusammengefasst werden, und zwar mit Ausserachtlassung der Vorzeichen am einfachsten auf folgende Weise:

$$\frac{(2^{2n}-1+\cos n\pi)2^{n-1}B_n}{(2n)!}\cdot\frac{x^{2n}}{n}.$$

Aus eben diesen beiden Reihen lässt sich eine neue bemerkenswerthe Reihe ableiten, indem man dieselben von einander abzieht. Dadurch erhält man:

$$l\left(\frac{\chi x+\xi x}{\chi x-\xi x}\right) = \frac{(2^1-1)2^2B_1}{2!}\cdot\frac{x^2}{1} + \frac{(2^5-1)2^4B_3}{6!}\cdot\frac{x^6}{3} + \frac{(2^9-1)2^6B_5}{10!}\cdot\frac{x^{10}}{5}$$
$$+ \frac{(2^{13}-1)2^8B_7}{14!}\cdot\frac{x^{14}}{7} + \ldots$$

Was die Convergenz aller dieser Reihen betrifft, so kann aus den bekannten Eigenschaften der Bernoulli'schen Zahlen leicht entnommen werden, dass die Reihe für $l\psi x$ convergent sei, sobald $x < \pi\sqrt{2}$ oder $x < 2\pi_1$ gesetzt wird; die übrigen Reihen hingegen convergiren, wenn $x < \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ oder $x < \pi_1$ ist.

§. 58.

Aus den vorhergehenden Entwicklungen ergeben sich durch blosses Differentiiren derselben noch andere bemerkenswerthe Reihen. Denn es ist

$$\frac{dl\varphi x}{dx} = \frac{d\varphi x}{\varphi x dx} = -\frac{\xi x}{\varphi x},$$

$$\frac{dl\psi x}{dx} = \frac{d\psi x}{\psi x dx} = \frac{\chi x}{\psi x},$$

$$\frac{dl(\chi x+\xi x)}{dx}=\frac{d(\chi x+\xi x)}{(\chi x+\xi x)dx}=\frac{\varphi x+\psi x}{\chi x+\xi x},$$

$$\frac{dl(\chi x-\xi x)}{dx}=\frac{d(\chi x-\xi x)}{(\chi x-\xi x)dx}=\frac{\varphi x-\psi x}{\chi x-\xi x},$$

$$\frac{dl\left(\frac{\chi x+\xi x}{\chi x-\xi x}\right)}{dx}=\frac{\varphi x+\psi x}{\chi x+\xi x}-\frac{\varphi x-\psi x}{\chi x-\xi x}=\frac{2(\chi x.\psi x-\varphi x.\xi x)}{\chi x^2-\xi x^2}$$

$$=\frac{4(\chi x.\psi x-\varphi x.\xi x)}{\psi 2x}.$$

Demnach erhält man durch Differentiiren der Reihen des §. 57.:

$$\frac{\xi x}{\varphi x}=\frac{(2^4-1)2^3B_2}{4!}.x^3+\frac{(2^8-1)2^5B_4}{8!}.x^7+\frac{(2^{12}-1)2^7B_6}{12!}.x^{11}$$
$$+\frac{(2^{16}-1)2^9B_8}{16!}.x^{15}+\ldots,$$

$$\frac{\chi x}{\psi x}=\frac{2}{x}-\frac{2^3B_2}{4!}.x^3-\frac{2^5B_4}{8!}.x^7-\frac{2^7B_6}{12!}.x^{11}-\frac{2^9B_8}{16!}.x^{15}-\ldots.$$

$$\frac{\varphi x+\psi x}{\chi x+\xi x}=\frac{1}{x}+\frac{(2^1-1)2^2B_1}{2!}.x-\frac{2^6B_2}{4!}.x^3+\frac{(2^5-1)2^4B_3}{6!}.x^5$$
$$-\frac{2^{12}B_4}{8!}.x^7+\ldots,$$

$$\frac{\varphi x-\psi x}{\chi x-\xi x}=\frac{1}{x}-\frac{(2^1-1)2^2B_1}{2!}.x-\frac{2^6B_2}{4!}.x^3-\frac{(2^5-1)2^4B_3}{6!}.x^5$$
$$-\frac{2^{12}B_4}{8!}.x^7-\ldots,$$

$$\frac{\chi x.\psi x-\varphi x.\xi x}{\psi 2x}=\frac{(2^1-1)2B_1}{2!}.x+\frac{(2^5-1)2^3B_3}{6!}.x^5+\frac{(2^9-1)2^5B_5}{10!}.x^9$$
$$+\frac{(2^{13}-1)2^7B_7}{14!}.x^{13}+\ldots.$$

Rücksichtlich der Convergenz dieser Reihen ist es offenbar, dass dieselbe ganz innerhalb der nähmlichen Gränzen Statt finde, wie bei den Reihen des §. 57., aus welchen die gegenwärtigen hergeleitet worden sind.

§. 59.

Die Reihen des §. 58. können dazu gebraucht werden, um daraus Beziehungen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen abzuleiten, welche bisher noch nicht bekannt zu sein scheinen, die aber nicht nur an sich betrachtet interessant, sondern auch in manchen Fällen nicht ohne Nutzen befunden werden dürften. Die einfachsten dieser Beziehungen ergeben sich aus der vorstehenden Entwicklung des Quotienten $\frac{\chi x}{\psi x}$, indem man mit dem Nenner ψx multiplicirt, dann anstatt χx und ψx die gleichgeltenden Reihen aus §. 2. substituirt und nach verrichteter Multiplication die beiderseitigen Coëfficienten der entsprechenden Potenzen von x einander gleichstellt. Auf diesem Wege findet man nach einer ganz einfachen Reduction folgende Gleichungen:

$$\frac{2B_2}{4!2!}-\frac{1}{6!}=0,$$

$$\frac{2^3B_4}{8!2!}-\frac{2B_2}{4!6!}+\frac{2}{10!}=0,$$

$$\frac{2^5B_6}{12!2!}-\frac{2^3B_4}{8!6!}+\frac{2B_2}{4!10!}-\frac{3}{14!}=0,$$

allgemein

$$\frac{2^{2n-1}B_{2n}}{(4n)!2!}-\frac{2^{2n-3}B_{2n-2}}{(4n-4)!6!}+\frac{2^{2n-5}B_{2n-4}}{(4n-8)!10!}-\frac{2^{2n-7}B_{2n-6}}{(4n-12)!14!}+\ldots.$$

$$\ldots.+\frac{(-1)^{n-1}2B_2}{4!(4n-2)!}+\frac{(-1)^n.n}{(4n+2)!}=0.$$

Diese Gleichungen haben das Besondere, dass in denselben keineswegs die sämmtlichen, sondern nur die mit den geraden Zeigern versehenen Bernoulli'schen Zahlen B_2, B_4, B_6, ... vorkommen, welche letztere daher für sich allein und ohne Beiziehung der ungeradstelligen Zahlen B_1, B_3, B_5, ... daraus berechnet werden können. Da auf solche Art diese Gleichungen nur ungefähr halb so viele Glieder enthalten, als die bekannten recurrirenden Beziehungen zwischen den sämmtlichen Bernoulli'schen Zahlen, so ist klar, dass schon aus diesem Grunde den ersteren der Vorzug grösserer Leichtigkeit in der Anwendung gebührt.

Andere von den obigen verschiedene Gleichungen ausschliesslich zwischen den geradstelligen Bernoulli'schen Zahlen lassen

sich auf gleiche Art aus der Entwicklung des Quotienten $\frac{\xi x}{\varphi x}$ finden. Da jedoch ihre Ableitung keine Besonderheit darbietet, sie überdiess etwas minder einfach und daher auch minder bequem im Gebrauche sind, als die vorhergehenden, halte ich es für überflüssig, sie gleichfalls hier anzuführen. Eben so übergehe ich die Beziehungen, welche aus den gegebenen Entwicklungen der Quotienten $\frac{\varphi x + \psi x}{\chi x + \xi x}$ und $\frac{\varphi x - \psi x}{\chi x - \xi x}$ auf dieselbe Weise abgeleitet werden könnten, da ein daraus entspringender Nutzen nicht wohl abzusehen ist. Interessanter erscheinen die Gleichungen, welche aus der letzten in §. 58. aufgestellten Entwicklung des Quotienten $\frac{\chi x . \psi x - \varphi x . \xi x}{\psi 2x}$ hervorgehen. Multiplicirt man nämlich mit dem Nenner $\psi 2x$ und bemerkt dabei, dass

$$\psi 2x = \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^6}{6!} + \frac{(2x)^{10}}{10!} - \frac{(2x)^{14}}{14!} + \frac{(2x)^{18}}{18!} - \ldots,$$

ferner vermöge §. 19., wenn in der letzten dortigen Gleichung $y = xi$ gesetzt wird,

$$\chi x . \psi x - \varphi x . \xi x = \frac{i}{2}(\xi(1-i)x - \xi(1+i)x)$$

oder, indem man $\xi(1-i)x$ und $\xi(1+i)x$ nach §. 2. entwickelt,

$$\chi x . \psi x - \varphi x . \xi x = \frac{2x^3}{3!} + \frac{2^3 x^7}{7!} + \frac{2^5 x^{11}}{11!} + \frac{2^7 x^{15}}{15!} + \frac{2^9 x^{19}}{19!} + \ldots$$

ist, so wird man nach geschehener Multiplication durch Gleichstellung der entsprechenden Coëfficienten folgende Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen finden:

$$\frac{(2^1-1)2^2 B_1}{2!2!} = \frac{1}{3!},$$

$$\frac{(2^5-1)2^2 B_3}{2!6!} - \frac{(2^1-1)2^6 B_1}{6!2!} = \frac{1}{7!},$$

$$\frac{(2^9-1)2^2 B_5}{2!10!} - \frac{(2^5-1)2^6 B_3}{6!6!} + \frac{(2^1-1)2^{10} B_1}{10!2!} = \frac{1}{11!},$$

allgemein

$$\frac{(2^{4n-3}-1)2^2 B_{2n-1}}{2!(4n-2)!} - \frac{(2^{4n-7}-1)2^6 B_{2n-3}}{6!(4n-6)!} + \frac{(2^{4n-11}-1)2^{10} B_{2n-5}}{10!(4n-10)} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{n+1}(2^1-1)2^{2n} B_1}{(4n-2)!2!} = \frac{1}{(4n-1)!}.$$

Diese Gleichungen, welche, wie man sieht, nur die ungeradstelligen Bernoulli'schen Zahlen B_1, B_3, B_5, ... mit Ausschluss der geradstelligen B_2, B_4, B_6, ... enthalten, können zur abgesonderten Berechnung der ersteren eben so dienen, wie diess früher für die geradstelligen Zahlen von den vorher aufgestellten Gleichungen gesagt worden ist. Ich erlaube mir jedoch zu bemerken, dass es zwischen den ungeradstelligen Bernoulli'schen Zahlen noch andere etwas einfachere, zu ihrer abgesonderten Berechnung geeignete, Beziehungen gebe, die aber mit dem hier behandelten Gegenstande nicht unmittelbar zusammen hängen und desshalb als nicht hieher gehörig am gegenwärtigen Orte auch nicht mitgetheilt werden dürfen.

§. 60.

Um das in §. 57. gebrauchte Verfahren zur Entwicklung der Logarithmen der Functionen χx, ξx und $1-\varphi 2x$ anwenden zu können, ist es nothwendig, vorher die Summen der Potenzen aller reciproken Wurzeln der Gleichungen $\chi x=0$ und $\xi x=0$ zu bestimmen. Diess unterliegt so wenig einer Schwierigkeit, dass es vielmehr weit leichter ist, diese Summen als die einzelnen Wurzeln jener Gleichungen zu berechnen. Beginnen wir mit der Gleichung $\chi x=0$ und bringen wir sie, um die Wurzel 0 wegzuschaffen, auf die Form:

$$\frac{\chi x}{x}=1-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^8}{9!}-\frac{x^{12}}{13!}+\frac{x^{16}}{17!}-\ldots=0.$$

Die reellen Wurzeln dieser Gleichung sind, wie wir wissen,

$$\pm\alpha_1,\quad \pm\alpha_2,\quad \pm\alpha_3,\ \ldots\ \pm\alpha_n,\ \ldots,$$

die imaginären Wurzeln aber

$$\pm\alpha_1 i,\quad \pm\alpha_2 i,\quad \pm\alpha_3 i,\ \ldots\ \pm\alpha_n i,\ \ldots$$

Aus der Beschaffenheit dieser Wurzeln erkennt man auf der Stelle, dass die ungeraden Potenzen derselben einander paarweise gleich und im Vorzeichen entgegengesetzt, eben so auch die einfach geraden Potenzen der reellen denselben Potenzen der imaginären Wurzeln beziehungsweise gleich und entgegengesetzt sind. Zugleich ist klar, dass ganz das nähmliche auch von den reciproken Wurzeln gelten müsse. Hieraus folgt nun, dass die Summe der Potenzen aller Wurzeln oder auch der reciproken Wurzeln der Gleichung $\frac{\chi x}{x}=0$ jederzeit gleich 0

sein werde, sobald der Potenzexponent entweder eine ungerade oder eine einfach gerade Zahl von der Form $4n-2$ ist. Nur dann, wenn der Exponent doppelt gerade oder von der Form $4n$ ist, kann und muss jene Summe von 0 verschieden sein, weil in diesem Falle alle einzelnen Potenzen additiv sind, und daher sich gegenseitig nicht aufheben können. In diesem letzten Falle wird ferner die Summe der Potenzen aller reellen additiven der Summe derselben Potenzen aller reellen subtractiven und auch der imaginären sowohl mit dem Vorzeichen + als mit — genommenen Wurzeln gleich und folglich eine jede dieser vier Summen der vierte Theil von der Gesammtsumme der Potenzen aller Wurzeln oder reciproken Wurzeln der Gleichung sein. Bezeichnen wir demnach durch S_{4n} die Summe der $4n$ten Potenzen der reciproken reellen additiven Wurzeln unserer Gleichung, sei nähmlich:

$$S_{4n}=\frac{1}{\alpha_1{}^{4n}}+\frac{1}{\alpha_2{}^{4n}}+\frac{1}{\alpha_3{}^{4n}}+\ldots,$$

so muss die Summe der $4n$ten Potenzen für sämmtliche reciproke Wurzeln der Gleichung $4S_{4n}$ sein.

Diess vorausgesetzt gibt uns der bekannte Newton'sche Lehrsatz über das Verhalten der Coefficienten und der Summen der Potenzen der Wurzeln einer Gleichung in seiner Anwendung auf die reciproken Wurzeln unserer obigen Gleichung bestimmte Relationen zwischen den Summen $4S_4$, $4S_8$, $4S_{12}$, ... $4S_{4n}$, ... und den Coefficienten der Gleichung

$$-\frac{1}{5!},\ \frac{1}{9!},\ -\frac{1}{13!},\ \frac{1}{17!},\ -\frac{1}{21!},\ \ldots,$$

welche man nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors 4 folgender Maassen finden wird:

$$S_4-\frac{1}{5!}=0,$$

$$S_8-\frac{S_4}{5!}+\frac{2}{9!}=0,$$

$$S_{12}-\frac{S_8}{5!}+\frac{S_4}{9!}-\frac{1}{13!}=0,$$

allgemein

$$S_{4n}-\frac{S_{4n-4}}{5!}+\frac{S_{4n-8}}{9!}-\frac{S_{4n-12}}{13!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}S_4}{(4n-3)!}+\frac{(-1)^n.n}{(4n+1)!}=0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die durch S_4, S_8, S_{12},.. bezeichneten Summen ohne alle Schwierigkeit nach und nach berechnen und zwar findet man für dieselben offenbar durchgängig **rationelle** Werthe, ungeachtet wir die einzelnen Wurzeln α_1, α_2, α_3, ... nur näherungsweise anzugeben im Stande waren.

Man erhält z. B. auf diese Weise:

$$S_4 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120},$$

$$S_8 = \frac{1}{5!5!} - \frac{2}{9!} = \frac{116}{9!5} = \frac{29}{453600},$$

$$S_{12} = \frac{116}{9!5!5!} - \frac{1}{5!9!} + \frac{3}{13!} = \frac{15888}{13!5} = \frac{331}{648648000}.$$

§. 61.

Ganz das nähmliche Verfahren, welches so eben bei der Gleichung $\chi x = 0$ befolgt wurde, lässt sich auch auf die Gleichung $\xi x = 0$, oder eigentlich, um dabei die Wurzel 0 zu beseitigen und zugleich das erste Glied auf 1 zu bringen, auf die Gleichung

$$\frac{6\xi x}{x^3} = 1 - \frac{6x^4}{7!} + \frac{6x^8}{11!} - \frac{6x^{12}}{15!} + \frac{6x^{16}}{19!} - \ldots = 0$$

anwenden. Um die Summen der Potenzen ihrer reciproken Wurzeln zu finden, kommt es auch hier nur darauf an, diese Summen für die **reellen additiven** Wurzeln zu kennen und zwar nur für solche Potenzen, deren Exponenten durch 4 theilbar sind. Diess ist so einleuchtend, dass eine Wiederholung des in §. 60. Gesagten ganz überflüssig wäre. Bezeichnen wir diese Summen durch T_{4n}, sei nähmlich:

$$T_{4n} = \frac{1}{\beta_1^{4n}} + \frac{1}{\beta_2^{4n}} + \frac{1}{\beta_3^{4n}} + \ldots,$$

so wird man zur allmäligen Berechnung dieser Summen aus dem vorhin angeführten **Newton**'schen Lehrsatze folgende Gleichungen erhalten:

$$\frac{T_4}{3!} - \frac{1}{7!} = 0,$$

$$\frac{T_8}{3!} - \frac{T_4}{7!} + \frac{2}{11!} = 0,$$

$$\frac{T_{12}}{3!} - \frac{T_8}{7!} + \frac{T_4}{11!} - \frac{3}{15!} = 0,$$

allgemein

$$\frac{T_{4n}}{3!}-\frac{T_{4n-4}}{7!}+\frac{T_{4n-8}}{11!}-\frac{T_{4n-12}}{15!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}T_4}{(4n-1)!}+\frac{(-1)^n.n}{(4n+3)!}=0.$$

So ist z. B.

$$T_4=\frac{3!}{7!}=\frac{1}{840},$$

$$T_8=\frac{3!3!}{7!7!}-\frac{2.3!}{11!}=\frac{3!2}{11!7}=\frac{13}{11642400},$$

$$T_{12}=\frac{3!3!2}{7!11!7}-\frac{3!3!}{7!11!}+\frac{3.3!}{15!}=\frac{10656}{15!7}=\frac{37}{31783752000}.$$

§. 62.

Die in §. 60. und §. 61. aufgestellten Gleichungen zur recurrenten Berechnung der Summen S_4, S_8, S_{12}, ... und T_4, T_8, T_{12}, ... sind in mancher Beziehung denjenigen analog, welche in §. 59. für die geradstelligen Bernoulli'schen Zahlen gefunden wurden, und diese Analogie würde noch stärker hervortreten, wenn man die Quotienten $\frac{B_2}{4!}$, $\frac{B_4}{8!}$, $\frac{B_6}{12!}$, ... durch eigene Zeichen darstellen und diese anstatt der Zahlen B_2, B_4, B_6, ... in die letzteren Gleichungen einführen wollte. Dadurch kann man sich veranlasst sehen, die Frage aufzuwerfen, ob es für jene Summen nicht auch independente Darstellungsgesetze gebe, wie solche für die Bernoulli'schen Zahlen durch Laplace und Andere gefunden worden sind. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass diese Frage unbedingt bejaht werden müsse. Denn schon durch die Anwendung der vorhergehenden recurrenten Gesetze auf sich selbst, d. h. durch die allmälige Substitution der aus früheren Gleichungen abgeleiteten Werthe in den späteren ergeben sich nothwendig independente Ausdrücke, welche freilich im allgemeinen nur durch combinatorische Hilfsmittel eine leicht übersichtliche Form annehmen werden. Da aber derartige independente Entwicklungen jedenfalls zur wirklichen Berechnung der Werthe weniger bequem ausfallen würden, als die bereits vorhin angegebenen recurrenten Gleichungen, so habe ich geglaubt, mich der Mühe überheben zu dürfen, auf dem bezeichneten Wege independente Formeln für die Summen S_{4n} und T_{4n} zu suchen.

Die Analogie mit den Bernoulli'schen Zahlen weist noch auf einen anderen Weg hin, solche independente Formen für die

Summen S_{4n} und T_{4n} zu finden, nähmlich durch **bestimmte Differentialquotienten.** Diess unterliegt auch im allgemeinen keiner Schwierigkeit. Denn man wird sich aus den unmittelbar nachfolgenden Entwicklungen überzeugen, dass

$$S_{4n} = -\frac{d^{4n}\left(\dfrac{x\varphi x}{\chi x}\right)}{(4n)!4dx^{4n}} \quad \text{und} \quad T_{4n} = -\frac{d^{4n}\left(\dfrac{x\psi x}{\xi x}\right)}{(4n)!4dx^{4n}}$$

ist, wenn in diesen Differentialquotienten nach verrichteter Differentiation $x=0$ gesetzt wird. Allein die Quotienten $\frac{x\varphi x}{\chi x}$ und $\frac{x\psi x}{\xi x}$ gehen für $x=0$ in die unbestimmte Zahlform $\frac{0}{0}$ über, und diess ist auch bei allen daraus hergeleiteten Differentialquotienten der Fall. Man müsste daher entweder eine Umformung dieser letzteren zu bewirken suchen, aus welcher die **bestimmten** Werthe derselben sich ergeben, oder man müsste das nähmliche Ziel durch wiederholte Differentiation des Zählers und Nenners zu erreichen streben. Beides dürfte schon an sich nicht leicht auszuführen sein. Ueberdiess würden die auf solche Art etwa zum Vorscheine kommenden independenten Ausdrücke, wie das Beispiel der **Bernoulli**'schen Zahlen hinlänglich deutlich zu erkennen gibt, jedenfalls allzusehr verwickelt sich darstellen, um aus ihnen irgend einen wirklichen Nutzen bei der Berechnung der Werthe von S_{4n} und T_{4n} schöpfen zu können, wenngleich dieselben nicht nur an sich interessant sein möchten, sondern auch ohne Zweifel zur Vollständigkeit der Untersuchung gehören. Ich will daher auf diese Betrachtung nicht weiter mich einlassen, sondern mit den so eben darüber gegebenen Andeutungen mich begnügen.

§. 63.

Nachdem im Vorhergehenden die Mittel gezeigt worden sind, um die Werthe der Summen S_4, S_8, S_{12}, ... und T_4, T_8, T_{12}, ... zu finden, diese daher als bekannt angenommen werden dürfen, können nun mit ihrer Hilfe die **Logarithmen** der Functionen χx, ξx und $1-\varphi 2x$, welche in §. 57. einstweilen übergangen wurden, eben so in Reihen entwickelt werden, die nach steigenden Potenzen von x fortlaufen, wie diess bei den übrigen dort angeführten Functionen durch die **Bernoulli**'schen Zahlen geschehen ist. Man wird nähmlich durch dasselbe Verfahren, welches in §. 57. angewendet wurde, aus den in §. 55. und §. 56. gegebenen Zerlegungen der Functionen χx, ξx und $1-\varphi 2x$ die natürlichen Logarithmen derselben durch folgende Reihen ausgedrückt finden:

$$l\chi x = lx - S_4 \cdot \frac{x^4}{1} - S_8 \cdot \frac{x^8}{2} - S_{12} \cdot \frac{x^{12}}{3} - S_{16} \cdot \frac{x^{16}}{4} - \ldots,$$

$$l\xi x = 3lx - l6 - T_4 \cdot \frac{x^4}{1} - T_8 \cdot \frac{x^8}{2} - T_{12} \cdot \frac{x^{12}}{3} - T_{16} \cdot \frac{x^{16}}{4} - \ldots,$$

$$l(1-\varphi 2x) = 4lx + l2 - l3 - (S_4 + T_4) \cdot \frac{x^4}{1} - (S_8 + T_8) \cdot \frac{x^8}{2}$$
$$- (S_{12} + T_{12}) \cdot \frac{x^{12}}{3} - \ldots.$$

Hieraus lassen sich durch Differentiiren noch andere Entwicklungen herleiten. Denn es ist:

$$\frac{dl\chi x}{dx} = \frac{\varphi x}{\chi x}, \quad \frac{dl\xi x}{dx} = \frac{\psi x}{\xi x} \quad \text{und} \quad \frac{dl(1-\varphi 2x)}{dx} = \frac{2\xi 2x}{1-\varphi 2x};$$

daher erhält man:

$$\frac{\varphi x}{\chi x} = \frac{1}{x} - 4S_4 . x^3 - 4S_8 . x^7 - 4S_{12} . x^{11} - 4S_{16} . x^{15} - \ldots,$$

$$\frac{\psi x}{\xi x} = \frac{3}{x} - 4T_4 . x^3 - 4T_8 . x^7 - 4T_{12} . x^{11} - 4T_{16} . x^{15} - \ldots,$$

$$\frac{\xi 2x}{1-\varphi 2x} = \frac{2}{x} - 2(S_4 + T_4) . x^3 - 2(S_8 + T_8) . x^7 - 2(S_{12} + T_{12}) . x^{11} - \ldots$$

Durch die Multiplication der eben entwickelten beiden Quotienten $\frac{\varphi x}{\chi x}$ und $\frac{\psi x}{\xi x}$ mit den zwei bereits in §. 58. erhaltenen Werthen von $\frac{\xi x}{\varphi x}$ und $\frac{\chi x}{\psi x}$ können auch für die Quotienten $\frac{\xi x}{\chi x}$, $\frac{\varphi x}{\psi x}$, $\frac{\psi x}{\varphi x}$ und $\frac{\chi x}{\xi x}$ Reihenausdrücke gefunden werden, die freilich unmittelbar weit mehr zusammengesetzt ausfallen, als die bisher angeführten, und auch schwerlich einer hinreichend einfachen Darstellung fähig sein dürften. Desshalb will ich die dabei erforderliche Multiplication der Reihen nicht wirklich verrichten, sondern dieselbe nur anzeigen, und zwar zur Verkürzung der Ausdrücke mit Hülfe des bekannten Summenzeichens Σ, welches hier durchgängig in der Ausdehnung von $n=1$ bis $n=\infty$ genommen betrachtet werden soll, ohne diesen Umstand überall im einzelnen anzuzeigen. Unter dieser Voraussetzung ist nun:

$$\frac{\xi x}{\chi x}=\frac{\varphi x}{\chi x}\cdot\frac{\xi x}{\varphi x}=\left(\frac{1}{x}-4\Sigma S_{4n}\,.\,x^{4n-1}\right)\cdot\Sigma\frac{(2^{4n}-1)2^{2n+1}B_{2n}\,.\,x^{4n-1}}{(4n)!},$$

$$\frac{\varphi x}{\psi x}=\frac{\varphi x}{\chi x}\cdot\frac{\chi x}{\psi x}=\left(\frac{1}{x}-4\Sigma S_{4n}\,.\,x^{4n-1}\right)\cdot\left(\frac{2}{x}-\Sigma\frac{2^{2n+1}B_{2n}\,.\,x^{4n-1}}{(4n)!}\right),$$

$$\frac{\psi x}{\varphi x}=\frac{\psi x}{\xi x}\cdot\frac{\xi x}{\varphi x}=\left(\frac{3}{x}-4\Sigma T_{4n}\,.\,x^{4n-1}\right)\cdot\Sigma\frac{(2^{4n}-1)2^{2n+1}B_{2n}\,.\,x^{4n-1}}{(4n)!},$$

$$\frac{\chi x}{\xi x}=\frac{\psi x}{\xi x}\cdot\frac{\chi x}{\psi x}=\left(\frac{3}{x}-4\Sigma T_{4n}\,.\,x^{4n-1}\right)\cdot\left(\frac{2}{x}-\Sigma\frac{2^{2n+1}B_{2n}\,.\,x^{4n-1}}{(4n)!}\right).$$

Wegen der bedeutenden Verwicklung dieser Reihen dürfte ein wirklicher Gebrauch derselben kaum zu erwarten sein, es lässt sich jedoch eine Bemerkung daran knüpfen, um deren willen sie eigentlich hier beigefügt worden sind.

Wie man sogleich sehen wird, sind von diesen zuletzt gefundenen Ausdrücken der **erste** und **vierte** zu einander reciproke Werthe und daher ihr Product gleich 1. Von den beiden mittleren Ausdrücken gilt offenbar ganz dasselbe. Denkt man sich nun ein solches Product **wirklich entwickelt**, so müssen sich aus den einzelnen Coefficienten desselben gewisse Gleichungen zwischen den darin vorkommenden Zahlen S_4, S_8, S_{12}, ...; T_4, T_8, T_{12}, ... und B_2, B_4, B_6, ... ergeben, aus welchen ein Theil dieser Zahlen berechnet werden könnte, wenn die übrigen als bekannt angenommen werden. Die wirkliche Ausführung dieser Berechnung dürfte allerdings nur wenig bequem befunden werden, es schien mir jedoch bemerkenswerth zu sein, dass überhaupt solche Gleichungen existiren, durch welche ein **bestimmter Zusammenhang** zwischen diesen scheinbar so sehr von einander rücksichtlich ihres Ursprunges verschiedenen Zahlen nachgewiesen werden kann.

Zur Beurtheilung der Convergenz bei den hier entwickelten Reihen überzeugt man sich aus der Beschaffenheit der mit S_{4n}, T_{4n} bezeichneten Summen, dass die Gränzen, welchen sich die Quotienten

$$\frac{S_{4n+4}}{S_{4n}},\quad \frac{T_{4n+4}}{T_{4n}}\quad\text{und}\quad \frac{S_{4n+4}+T_{4n+4}}{S_{4n}+T_{4n}}$$

bei fortwährendem Wachsthume von n ohne Ende nähern, beziehungsweise

$$\frac{1}{\alpha_1^{\,4}},\quad \frac{1}{\beta_1^{\,4}}\quad\text{und}\quad\frac{1}{\alpha_1^{\,4}}$$

sind. Hieraus folgt vermöge des bekannten von Cauchy aufgestellten Kennzeichens, dass die Reihen für $l\chi x$, $\frac{\varphi x}{\chi x}$ und $\frac{\xi 2x}{1-\varphi 2x}$ convergiren, sobald $x<\alpha_1$, die Reihen für $l\xi x$ und $\frac{\psi x}{\xi x}$ hingegen, wenn $x<\beta_1$ ist.

§. 64.

Zwischen den Summen S_4, S_8, S_{12}, ...; T_4, T_8, T_{12}, ... und den Bernoulli'schen Zahlen scheint auch darin eine Art von Uebereinstimmung zu herrschen, dass sich für die ersten eben so wohl, wie diess von den letzten längst bekannt ist, mehrere von einander abweichende Systeme von recurrenten Gleichungen aufstellen lassen. Um diess zu zeigen, betrachten wir zunächst die in §. 63. gefundene Entwicklung des Quotienten $\frac{\xi 2x}{1-\varphi 2x}$. Indem man dieselbe mit dem Nenner $1-\varphi 2x$ multiplicirt, erhält man daraus:

$$\xi 2x$$
$$=(1-\varphi 2x)\left(\frac{2}{x}-2(S_4+T_4).x^3-2(S_8+T_8).x^7-2(S_{12}+T_{12}).x^{11}-..\right).$$

Nun ist aber vermöge §. 2.:

$$\xi 2x=\frac{2^3.x^3}{3!}-\frac{2^7.x^7}{7!}+\frac{2^{11}.x^{11}}{11!}-\frac{2^{15}.x^{15}}{15!}+\frac{2^{19}.x^{19}}{19!}-....,$$

$$\varphi 2x=1-\frac{2^4.x^4}{4!}+\frac{2^8.x^8}{8!}-\frac{2^{12}.x^{12}}{12!}+\frac{2^{16}.x^{16}}{16!}-....$$

Setzt man diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung, so wird man nach vollzogener Multiplication durch Gleichstellung der entsprechenden beiderseitigen Coefficienten folgende neue Relationen finden:

$$\frac{S_4+T_4}{4!}-\frac{1.2^4}{8!}=0,$$

$$\frac{S_8+T_8}{4!}-\frac{2^4(S_4+T_4)}{8!}+\frac{2.2^8}{12!}=0,$$

$$\frac{S_{12}+T_{12}}{4!}-\frac{2^4(S_8+T_8)}{8!}+\frac{2^8(S_4+T_4)}{12!}-\frac{3.2^{12}}{16!}=0,$$

allgemein

$$\frac{S_{4n}+T_{4n}}{4!}-\frac{2^4(S_{4n-4}+T_{4n-4})}{8!}+\frac{2^8(S_{4n-8}+T_{4n-8})}{12!}-\ldots$$

$$\ldots+\frac{(-1)^{n-1}2^{4n-4}(S_4+T_4)}{(4n)!}+\frac{(-1)^n.n.2^{4n}}{(4n+4)!}=0.$$

Ganz die nähmlichen Gleichungen lassen sich auch aus den beiden in §. 63. entwickelten Quotienten $\frac{\varphi x}{\chi x}$ und $\frac{\psi x}{\xi x}$ herleiten, indem man dieselben addirt. Hingegen ergeben sich daraus andere von den früheren wesentlich verschiedene Gleichungen, wenn man die eben bezeichneten Quotienten von einander subtrahirt. Denn es ist:

$$-\frac{\varphi x}{\chi x}+\frac{\psi x}{\xi x}=\frac{2}{x}+4(S_4-T_4).x^3+4(S_8-T_8).x^7+4(S_{12}-T_{12}).x^{11}+\ldots,$$

ferner

$$-\frac{\varphi x}{\chi x}+\frac{\psi x}{\xi x}=\frac{-\varphi x.\xi x+\chi x.\psi x}{\chi x.\xi x}=\frac{4(\chi x.\psi x-\varphi x.\xi x)}{1-\varphi 2x}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{4(\chi x.\psi x-\varphi x.\xi x)}{1-\varphi 2x}=\frac{2}{x}+4(S_4-T_4).x^3+4(S_8-T_8).x^7$$
$$+4(S_{12}-T_{12}).x^{11}+\ldots.$$

oder, wenn man mit dem Nenner $1-\varphi 2x$ multiplieirt, nach Weglassung des Factors 2,

$$2(\chi x.\psi x-\varphi x.\xi x)$$
$$=(1-\varphi 2x)\left(\frac{1}{x}+2(S_4-T_4).x^3+2(S_8-T_8).x^7+2(S_{12}-T_{12}).x^{11}+\ldots\right)$$

Wird hierin anstatt $\varphi 2x$ die vorhin angegebene, anstatt $\chi x.\psi x-\varphi x.\xi x$ die bereits in §. 59. gefundene Reihe substituirt, so ergeben sich nach verrichteter Multiplication durch Gleichstellung der auf beiden Seiten einander entsprechenden Coefficienten folgende Beziehungen:

$$\frac{S_4-T_4}{4!}-\frac{2^3-2.2}{8!}=0,$$

$$\frac{S_8-T_8}{4!}-\frac{2^4(S_4-T_4)}{8!}+\frac{2^7-3.2^3}{12!}=0,$$

$$\frac{S_{12}-T_{12}}{4!}-\frac{2^4(S_8-T_8)}{8!}+\frac{2^8(S_4-T_4)}{12!}-\frac{2^{11}-4.2^5}{16!}=0, \ldots$$

allgemein

$$\frac{S_{4n}-T_{4n}}{4!}-\frac{2^4(S_{4n-4}-T_{4n-4})}{8!}+\frac{2^8(S_{4n-8}-T_{4n-8})}{12!}-\ldots$$

$$\ldots+\frac{(-1)^{n-1}.2^{4n-4}(S_4-T_4)}{(4n)!}+\frac{(-1)^n.2^{4n-1}-(n+1)2^{2n-1}}{(4n+4)!}=0.$$

Aus diesen Gleichungen können die Werthe von S_4-T_4, S_8-T_8, $S_{12}-T_{12}$, ..., so wie aus den früheren jene von S_4+T_4, S_8+T_8, $S_{12}+T_{12}$, ... berechnet und daraus mit leichter Mühe sowohl S_4, S_8, S_{12}, ..., als auch T_4, T_8, T_{12}, ... hergeleitet werden. Es ist aber noch einfacher, diese beiden zuletzt gefundenen Systeme von Gleichungen nach der Ordnung paarweise zu addiren und auch zu subtrahiren. Dadurch erhält man die zur unmittelbaren Berechnung der Summen S_4, S_8, S_{12}, .. und T_4, T_8, T_{12}, ... geeigneten zwei neuen Systeme von Relationen, die von den in §. 60. und §. 61. aufgestellten wesentlich abweichen:

$$\frac{S_4}{4!}-\frac{3.2^2-2.2^0}{8!}=0,$$

$$\frac{S_8}{4!}-\frac{2^4S_4}{8!}+\frac{5.2^6-3.2^2}{12!}=0,$$

$$\frac{S_{12}}{4!}-\frac{2^4S_8}{8!}+\frac{2^8S_4}{12!}-\frac{7.2^{10}-4.2^4}{16!}=0,$$

allgemein

$$\frac{S_{4n}}{4!}-\frac{2^4S_{4n-4}}{8!}+\frac{2^8S_{4n-8}}{12!}-\frac{2^{12}S_{4n-12}}{16!}+\ldots-$$

$$\ldots+\frac{(-1)^{n-1}.2^{4n-4}S_4}{(4n)!}+\frac{(-1)^n.(2n+1)2^{4n-2}-(n+1).2^{2n-2}}{(4n+4)!}=0,$$

und ferner

$$\frac{T_4}{4!}-\frac{1.2^2+2.2^0}{8!}=0,$$

$$\frac{T_8}{4!}-\frac{2^4T_4}{8!}+\frac{3.2^6+3.2^2}{12!}=0,$$

$$\frac{T_{12}}{4!}-\frac{2^4T_8}{8!}+\frac{2^8T_4}{12!}-\frac{5.2^{10}+4.2^4}{16!}=0,$$

allgemein

$$\frac{T_{4n}}{4!} - \frac{2^4 T_{4n-4}}{8!} + \frac{2^8 T_{4n-8}}{12!} - \frac{2^{12} T_{4n-12}}{16!} + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^{n-1}.2^{4n-4} T_4}{(4n)!} + \frac{(-1)^n.(2n-1)2^{4n-2} + (n+1).2^{2n-2}}{(4n+4)!} = 0.$$

§. 65.

So wie aus den goniometrischen oder cyclischen Functionen die sogenannten hyperbolischen dadurch entstehend gedacht werden können, indem man in den Reihenausdrücken der ersteren die sämmtlichen Glieder anstatt der abwechselnden durchgängig mit einerlei Vorzeichen behaftet annimmt, eben so könnten durch die nähmliche Veränderung der Vorzeichen aus den hypercyclischen Functionen andere neue Functionen entspringend gedacht und dann einer besonderen Betrachtung unterzogen werden. Es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass die Werthe dieser neuen Functionen stets durch die hypercyclischen ausgedrückt werden können, und zwar nicht nur in imaginärer, sondern auch in einer durchaus reellen Form. Durch diesen letzten Umstand fällt die Nothwendigkeit gänzlich weg, diese neuen Functionen als selbständig anzusehen und zu behandeln, da ihre Eigenschaften aus jenen der hypercyclischen Functionen vollständig sich ableiten lassen müssen, weil sie in jedem Falle auf diese letzteren in reeller Form zurückgeführt werden können. Setzt man nähmlich in den Reihen des §. 2. xw anstatt x, so findet man wegen $w^{8n} = 1$ und $w^{8n-4} = -1$, dass

$$\varphi xw = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{12}}{12!} + \frac{x^{16}}{16!} + \dots,$$

$$\chi xw = w\left(\frac{x}{1} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{13}}{13!} + \frac{x^{17}}{17!} + \dots\right),$$

$$\psi xw = -i\left(\frac{x^2}{1} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{18}}{18!} + \dots\right),$$

$$\xi xw = -wi\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{19}}{19!} + \dots\right),$$

und folglich

$$1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{12}}{12!} + \frac{x^{16}}{16} + \dots = \varphi xw,$$

$$\frac{x}{1} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{13}}{13!} + \frac{x^{17}}{17} + \dots = wi\chi xw,$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{18}}{18!} + \ldots = i\psi x w,$$

$$\frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{19}}{19!} + \ldots = -w\xi x w$$

ist. Um diese Ausdrücke auf eine reelle Form zu bringen, dienen die Gleichungen des §. 20. Denn es ergibt sich daraus:

$$\varphi x w = \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{xi}{\sqrt{2}}\right) = \varphi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\varphi\frac{xi}{\sqrt{2}} + \chi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\xi\frac{xi}{\sqrt{2}} - \psi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\psi\frac{xi}{\sqrt{2}}$$

$$+\xi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\chi\frac{xi}{\sqrt{2}} = \varphi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\varphi\frac{x}{\sqrt{2}} - i\chi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\xi\frac{x}{\sqrt{2}} + \psi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\psi\frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$+i\xi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\chi\frac{x}{\sqrt{2}} = \left(\varphi\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\psi\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

ferner auf dieselbe Weise:

$$\chi x w = \chi\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{xi}{\sqrt{2}}\right) = w\sqrt{2}\left(\varphi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\chi\frac{x}{\sqrt{2}} + \psi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\xi\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\psi x w = \psi\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{xi}{\sqrt{2}}\right) = -i\left(\left(\chi\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\xi\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right),$$

$$\xi x w = \xi\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{xi}{\sqrt{2}}\right) = wi\sqrt{2}\left(\varphi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\xi\frac{x}{\sqrt{2}} - \chi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\psi\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Durch die Substitution dieser Werthe erhält man endlich:

$$1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{12}}{12!} + \frac{x^{16}}{16!} + \ldots = \left(\varphi\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\psi\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

$$\frac{x}{1} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{13}}{13!} + \frac{x^{17}}{17!} + \ldots = \sqrt{2}\left(\varphi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\chi\frac{x}{\sqrt{2}} + \psi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\xi\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{18}}{18!} + \ldots = \left(\chi\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\xi\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

$$\frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{19}}{19!} + \ldots = \sqrt{2}\left(\chi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\psi\frac{x}{\sqrt{2}} - \varphi\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\xi\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

§. 66.

Im Vorhergehenden habe ich versucht die vorzüglichsten und am leichtesten erkennbaren Eigenschaften der von mir mit dem

Namen der hypercyclischen belegten Functionen nachzuweisen. Es lag dabei gar nicht in meiner Absicht, diesen Gegenstand mit aller Ausführlichkeit und Vollständigkeit zu behandeln. Desshalb darf man sich nicht darüber verwundern, häufig nur theilweise und auf bestimmte Fälle beschränkte Entwicklungen oder auch blosse Hindeutungen auf andere weiter reichende Untersuchungen anzutreffen. Auch wird man finden, dass mehrere Gesichtspunkte, aus welchen die genannten Functionen hätten betrachtet und die daraus sich ergebenden Folgerungen hervorgehoben werden können und sollen, gänzlich mit Stillschweigen übergangen worden sind, weil sie entweder zu unerheblich und mit den übrigen in keiner nothwendigen Verbindung stehend erschienen, oder auch weil eine genügende Ausführung derselben eine grössere Weitläufigkeit erfordert haben würde, als ich mir erlauben zu dürfen glaubte. Der Zweck, welchen ich bei meiner Arbeit durchgängig vor Augen hatte, ist gleich anfänglich von mir angegeben worden, und ich hege die Hoffnung, dass das hier wirklich Beigebrachte vollkommen hinreichen wird, die grosse Menge und Verschiedenartigkeit der Eigenschaften, welche den hypercyclischen Functionen zukommen, zu zeigen und dabei zugleich erkennen zu lassen, dass eine weiter ausgedehnte und tiefer eindringende Untersuchung sie noch bedeutend vermehren müsse. Auch steht der hier behandelte Gegenstand, wie man zu bemerken Gelegenheit gehabt haben wird, zuweilen mit anderen in einer vorhinein nicht erwarteten Verbindung, woraus sich dann Beziehungen mit den schon bekannten Functionen ergeben, welche die darauf verwandte Mühe in keinem Falle als ganz unfruchtbar erscheinen lassen.

Bei dem ausgesprochenen Zwecke wird es wohl auch keiner besonderen Entschuldigung bedürfen, wenn man wahrnehmen sollte, dass hier nicht überall ein durchaus gleichförmiges streng systematisches Verfahren eingehalten wurde, indem meine Aufmerksamkeit nicht sowohl darauf, als vielmehr vorzugsweise auf den Umstand gerichtet war, jede einzelne zu erweisende Eigenschaft auf einem möglichst kurzen Wege herzuleiten. Dieses letztere ist zugleich die Ursache, wesshalb ich von den imaginären Zahlen einen so ausgedehnten Gebrauch gemacht habe. Ich glaube zwar erwarten zu dürfen, dass man an dieser Behandlungsart gegenwärtig weiter keinen Anstoss nehmen werde, nachdem man, zuerst angeregt durch Gauss, der die Tiefen der Wissenschaft eben so wohl als die mehr an der Oberfläche derselben befindlichen Gegenstände mit gleichem Scharfblicke zu durchschauen gewohnt war, die wahre Natur der sogenannten unmög-

lichen Zahlen genauer einzusehen angefangen hat. Sollte diess aber dennoch der Fall sein, und man einer von der Betrachtung der imaginären Zahlen unabhängigen wenn gleich etwas weitläufigeren Darstellung den Vorzug geben, so fällt es nicht schwer, einen Weg zu bezeichnen, auf welchem diess geleistet werden kann. Indem man nähmlich von den in §. 2. angeführten Reihen als Erklärung der hypercyclischen Functionen ausgeht, ergeben sich daraus unmittelbar die in §. 13. und §. 16. aufgestellten Differentialquotienten, mit deren Hilfe vermöge des Taylor'schen Lehrsatzes die hypercyclischen Functionen von $x+y$ und $x-y$ zuerst als Reihen, dann aber auch, wenn man die gehörigen Glieder der Reihen zusammenzieht, in geschlossener Form sich finden lassen. Auf diese Art gelangt man zu den Formeln des §. 20., aus welchen ferner die ganze Theorie dieser Functionen ohne Zuziehung der imaginären Zahlen hergeleitet werden kann, wobei allerdings in manchen Fällen eine bedeutend grössere Weitläufigkeit erforderlich sein wird, als im Vorhergehenden unter Mithilfe jener Zahlen nothwendig war, deren hauptsächlichster Nutzen eben darin besteht, dass durch dieselben häufig der Uebergang verschiedener Functionsformen in einander vermittelt und erleichtert wird.

XXXIX.

Ueber das allgemeine Gesetz für die Bildung der höhern Aenderungsgesetze einer doppelten Function.

Von

Herrn Professor *G. Decher*,

an der polytechnischen Schule zu Augsburg.

In einer früheren Abhandlung (Archiv Thl. XXI. Seite 423 u. f.) habe ich das allgemeine Gesetz für die Bildung der höhern Aenderungsgesetze einer doppelten Function $f(\varphi(x))$ unter folgender Form mitgetheilt:

$$\overset{x}{y}_n = \sum_{k=1}^{k=n} \overset{u}{y}_k \cdot \sum_{k=p+q+r+s+\text{etc.}}^{n=p+2q+3r+4s+\text{etc.}} \widehat{n}\,\frac{u_1^{p}\cdot u_2^{q}\cdot u_3^{r}\cdot u_4^{s}\ldots}{\widehat{p}\cdot\widehat{q}\cdot\widehat{2}^{q}\cdot\widehat{r}\cdot\widehat{3}^{r}\cdot\widehat{s}\cdot\widehat{4}^{s}\ldots},$$

worin $y = f(\varphi(x))$, $u = \varphi(x)$ ist, $\overset{x}{y}_n$ das Aenderungsgesetz der $n$ten Ordnung von y in Bezug auf x, $\overset{u}{y}_k$ das Aenderungsgesetz der $k$ten Ordnung von y in Bezug auf u bedeutet, und u_1, u_2, u_3, u. s. f. die Aenderungsgesetze der 1sten, 2ten, 3ten u. f. Ordnung von u in Bezug auf x vorstellen, endlich $\widehat{n}$, $\widehat{p}$, $\widehat{q}$, u. s. f. die Factoriellen $1.2.3\ldots.n$, $1.2.3\ldots.p$, $1.2.3\ldots.q$, u. s. f. ersetzen.

Dieses Gesetz lässt sich nun leicht unter anderen Formen darstellen, welche theils an sich interessant sind, theils aber auch in besonderen Fällen ganz einfach auf Ausdrücke führen, die man bis jetzt nur auf ziemlich beschwerlichem Wege ableiten konnte. Dazu wollen wir dasselbe zuerst unter die Form bringen:

$$\text{(A)}\qquad \overset{x}{y_n} = \sum_{k=1}^{k=n} \cdot \overset{u}{y_k} \sum_{S.p_r=k}^{S.rp_r=n} \cdot \widehat{n}\, \frac{u_1^{p_1}\left(\frac{u_2}{2}\right)^{p_2}\left(\frac{u_3}{3}\right)^{p_3}\cdots\left(\frac{u_r}{r}\right)^{p_r}}{\widehat{p_1}\cdot\widehat{p_2}\cdot\widehat{p_3}\cdots\widehat{p_r}},$$

worin $S.rp_r$ für $p_1+2p_2+3p_3+\text{etc.}+rp_r$, $S.p_r$ für $p_1+p_2+p_3+\ldots$ $\ldots+p_r$ steht, und deren Gesetz so besser in die Augen fällt. Fassen wir dann die Entwickelung des Polynoms

$$P^k = (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n)^k,$$

worin k eine ganze Zahl bedeutet, in einer ähnlichen Doppelsumme zusammen, so finden wir:

$$\text{(B)}\qquad P^k = \sum_{h=0}^{h=k} \cdot x^{k+h} \sum_{S.p_r=k}^{S.rp_r=k+h} \widehat{k}\, \frac{a_1^{p_1}\cdot a_2^{p_2}\cdot a_3^{p_3}\cdots a_r^{p_r}}{\widehat{p_1}\cdot\widehat{p_2}\cdot\widehat{p_3}\cdots\widehat{p_r}},$$

und die Vergleichung der innern Summen von (A) und (B) zeigt, dass der Coeffizient von $\overset{u}{y_k}$ in der Entwickelung von $\overset{x}{y_n}$ mit dem Coeffizienten von α^n in der Entwickelung der Potenz

$$\text{(C)}\qquad \frac{\widehat{n}}{\widehat{k}}\left(u_1\alpha + \frac{u_2}{2}\alpha^2 + \frac{u_3}{3}\alpha^3 + \ldots + \frac{u_n}{n}\alpha^n\right)^k$$

identisch ist; denn man hat bei dieser Vergleichung:

$$S.p_r = k,\quad S.rp_r = k+h = n,\quad a_1 = \frac{u_1}{1},\quad a_2 = \frac{u_2}{2},\quad a_3 = \frac{u_3}{3},\ \text{u. s. f.}$$

Darnach ist also die unabhängige Entwickelung von $\overset{x}{y_n}$ auf die unabhängige Bestimmung des Coeffizienten von x^n in der Entwickelung des Polynoms (C) zurückgeführt, und man kann dem allgemeinen Gesetze (A) nun die Form geben:

$$\text{(D)}\qquad \overset{x}{y_n} = \sum_{k=1}^{k=n} \cdot \overset{u}{y_k}\, \frac{\widehat{n}}{\widehat{k}\alpha^n}\left[u_1\alpha + \frac{u_2}{2}\alpha^2 + \frac{u_3}{3}\alpha^3 + \ldots + \frac{u_n}{n}\alpha^n\right]^k_{\alpha^n}$$

wenn man übereinkommt, den Coeffizienten von x^n in der Entwickelung von

$$(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n)^k$$

durch den Ausdruck:

$$\frac{1}{x^n}\left[a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n\right]^k_{x^n}$$

zu bezeichnen.

Aus dieser Form folgt, dass die bekannten Beziehungen zwischen den Coeffizienten a_1, a_2, a_3, u. s. f.; A_k, B_k, C_k, u. s. f. in der Gleichung:

$$(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{etc.})^k = A_k x^k + B_k x^{k+1} + C_k x^{k+2} + \text{etc.}$$

dazu dienen können, die Coeffizienten von $\overset{n}{y_k}$ darzustellen, indem man für k nach und nach alle Werthe von n bis 1 einführt; man wird leicht finden, dass die Coeffizienten von $\overset{n}{y_n}$, $\overset{n}{y_{n-1}}$, $\overset{n}{y_{n-2}}$, u. s. f. durch A_n, $\frac{\overset{\frown}{n}}{\overset{\frown}{n-1}} B_{n-1} = n B_{n-1}$, $\frac{\overset{\frown}{n}}{\overset{\frown}{n-2}} C_{n-2} = n(n-1) C_{n-2}$, u. s. f. ausgedrückt erscheinen, und dass man hat:

$$(\text{E}) \left\{ \begin{aligned} A_n &= u_1{}^n; \\ A_{n-1} &= u_1{}^{n-1}, \\ u_1 B_{n-1} &= (n-1)\frac{u_2}{2} A_{n-1}; \\ A_{n-2} &= u_1{}^{n-2}, \\ u_1 B_{n-2} &= (n-2)\frac{u_2}{2} A_{n-2}, \\ 2u_1 C_{n-2} &= (n-3)\frac{u_2}{2} B_{n-2} + 2(n-2)\frac{u_3}{3} A_{n-2}; \\ A_{n-3} &= u_1{}^{n-3}, \\ u_1 B_{n-3} &= (n-3)\frac{u_2}{2} A_{n-3}, \\ 2u_1 C_{n-3} &= (n-4)\frac{u_2}{2} B_{n-3} + 2(n-3)\frac{u_3}{3} A_{n-3}, \\ 3u_1 D_{n-3} &= (n-5)\frac{u_2}{2} C_{n-3} + (2n-7)\frac{u_3}{3} B_{n-3} + 3(n-3)\frac{u_4}{4} A_{n-3} \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned} \right.$$

Beachtet man endlich, dass der Coeffizient von x^n in der Entwickelung des unbegrenzten Polynoms

$$(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \text{etc.})^k$$

derselbe ist, wie bei der des begrenzten Polynoms

$$(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n)^k,$$

so lange k kleiner ist als n, wie es in unserem Falle immer stattfindet, so kann man auch in dem Werthe (D) für das eingeklammerte begrenzte Polynom das unbegrenzte

$$\frac{u_1}{1}\alpha + \frac{u_2}{2}\alpha^2 + \frac{u_3}{3}\alpha^3 + \text{etc.}$$

einführen, welches nach dem Taylor'schen Satze die Entwickelung der Differenz $\varphi(x+\alpha) - \varphi(x)$ vorstellt, d. h. die Aenderung des Werthes unserer Function $u = \varphi(x)$, wenn man x in $x+\alpha$ übergehen lässt. Damit nimmt also unser allgemeines Gesetz die einfache und gewiss bemerkenswerthe Form an:

$$\text{(F)} \qquad y_n^x = \sum_{k=1}^{k=n} \cdot y_k^u \frac{\widehat{n}}{\overline{k}} \frac{1}{\alpha^n} \Big[\varphi(x+\alpha) - \varphi(x)\Big]^k_{\alpha^n},$$

deren Bezeichnung indessen immer noch voraussetzt, dass die eingeklammerte Grösse nach Potenzen von α geordnet und der Coefficient von α^n herausgenommen werde.

Nehmen wir als Anwendung $u = x^\lambda$, $y = f(x^\lambda)$, so folgt:

$$\varphi(x+\alpha) - \varphi(x) = (x+\alpha)^\lambda - x^\lambda = x^\lambda[(1+\frac{\alpha}{x})^\lambda - 1],$$

und damit wird zuerst

$$D_x{}^n f(x^\lambda) = \sum_{k=1}^{k=n} . D_u{}^k f(u) . x^{k\lambda} \frac{\widehat{n}}{\overline{k}} \frac{1}{\alpha^n} \Big[(1+\frac{\alpha}{x})^\lambda - 1\Big]^k_{\alpha^n};$$

das mit α^n behaftete Glied hat also immer die Form $N\frac{\alpha^n}{x^n}$, und der vorstehende Werth kann desshalb auch in den folgenden umgewandelt werden:

$$D_x{}^n f(x^\lambda) = \sum_{k=1}^{k=n} . \frac{\widehat{n}}{x^n}(-1)^k \frac{u^k}{\overline{k}} D_u{}^k f(u) \frac{1}{\alpha^n} \Big[1 - (1+\alpha)^\lambda\Big]^k_{\alpha^n}.$$

Entwickelt man sodann das eingeklammerte Binom, so ergibt sich

$$[1-(1+\alpha)^\lambda]^k = 1 - k(1+\alpha)^\lambda + [k]_2(1+\alpha)^{2\lambda} - [k]_3(1+\alpha)^{3\lambda} + \text{etc.} \pm (1+\alpha)^{k\lambda},$$

und mit der Beachtung, dass man hat:

$$\frac{1}{\alpha^n}[(1+\alpha)^\mu]_{\alpha^n} = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots n} = [\mu]_n,$$

findet man sofort:

$$\frac{1}{\alpha^n}\Big[1-(1+\alpha)^\lambda\Big]^k_{\alpha^n} = -k[\lambda]_n + [k]_2[2\lambda]_n - [k]_3[3\lambda]_n + \text{etc.} \pm [k\lambda]_n$$

$$= \sum_{i=1}^{i=k}(-1)^i[k]_i[i\lambda]_n;$$

folglich wird auch:

$$D_x{}^n f(x^\lambda) = \frac{\widehat{n}}{x^n}\sum_{k=1}^{k=n}.(-1)^k\frac{u^k}{\widehat{k}}D_u{}^k f(u)\sum_{i=1}^{i=k}.(-1)^i[k]_i[i\lambda]_n.$$

Ebenso einfach ist die Ableitung von $\overset{x}{y}_n$, wenn $u=e^x$, $y=f(e^x)$ genommen wird; man hat dann nach (F):

$$D_x{}^n f(e^x) = \sum_{k=1}^{k=n}.D_u{}^k f(u)\frac{\widehat{n}}{\widehat{k}}\frac{1}{\alpha^n}\Big[e^{x+\alpha}-e^x\Big]^k_{\alpha^n}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n}.D_u{}^k f(u)e^{kx}\frac{\widehat{n}}{\widehat{k}}\frac{1}{\alpha^n}\Big[1-e^\alpha\Big]^k_{\alpha^n}(-1)^k;$$

entwickelt man das Binom, so ergibt sich zunächst:

$$(1-e^\alpha)^k = 1-ke^\alpha + [k]_2 e^{2\alpha} - [k]_3 e^{3\alpha} + \ldots \pm e^{k\alpha};$$

es ist aber auch

$$e^{i\alpha} = 1 + \frac{i\alpha}{\widehat{1}} + \frac{i^2\alpha^2}{\widehat{2}} + \frac{i^3\alpha^3}{\widehat{3}} + \ldots + \frac{i^n\alpha^n}{\widehat{n}} + \text{etc.},$$

also

$$\frac{1}{\alpha^n}[e^{i\alpha}]_{\alpha^n} = \frac{i^n}{\widehat{n}},$$

und damit findet man:

$$\frac{1}{\alpha^n}\Big[1-e^\alpha\Big]^k_{\alpha^n} = -k\frac{1}{\widehat{n}} + [k]_2\frac{2^n}{\widehat{n}} - [k]_3\frac{3^n}{\widehat{n}} + \text{etc.} \pm \frac{k^n}{\widehat{n}}$$

$$= \frac{1}{\widehat{n}}\sum_{i=1}^{i=k}(-1)^i[k]_i\, i^n;$$

folglich hat man auch:

$$D_x{}^n f(e^x) = \sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k\frac{u^k}{\widehat{k}}D_u{}^k f(u)\sum_{i=1}^{i=k}(-1)^i[k]_i i^n.$$

Für die Entwickelung von $D_x{}^n f(\log x)$ bietet die Form (F) unseres allgemeinen Gesetzes keinen besondern Vortheil; man muss für diese nothwendig auf (D) zurückgehen und die Hülfstafeln (E) benützen, durch welche man auch für einige besondere Werthe von λ in $y=f(x^\lambda)$ sehr leicht die einfachsten Entwickelungen von $\overset{x}{y}_n$ findet.

XL.

Ein Satz vom zweitheiligen Hyperboloid.

Von

Herrn *Franz Unferdinger,*

Lebensversicherungs-Calculator der k. k. p. Azienda Assicuratrice zu Triest.

In Thl. XXVII. S. 51. dieses Archives habe ich bewiesen, dass das von den Asymptoten und einer beliebigen Tangente der Hyperbel formirte Dreieck einen constanten Flächenraum hat und dass der Berührungspunkt stets im Mittelpunkt des von den Asymptoten begrenzten Stückes der Tangente liegt. Ein analoger Satz gilt auch vom zweitheiligen Hyperboloid, dessen Asymptotenfläche und dessen tangirender Ebene.

Legen wir durch den Mittelpunkt des zweitheiligen Hyperboloides, dessen drei Axen $2c$, $2\sqrt{-b^2}$, $2\sqrt{-a^2}$ sind, ein rechtwinkeliges Coordinatensystem der x, y, z, so dass die Axe der z in die Richtung der reellen Axe $2c$ und die Axen der y und x in die Richtungen der Axen $2\sqrt{-b^2}$, $2\sqrt{-a^2}$ zu liegen kommen, so ist die Gleichung des zweitheiligen Hyperboloides:

$$(1) \qquad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,$$

und die Gleichung der Asymptotenfläche:

$$(2) \qquad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=0.$$

Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines Punktes des Hyperboloides, so dass auch

$$(3) \qquad \frac{z_1^2}{c^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{x_1^2}{a^2}=1,$$

so ist die Gleichung der, in diesem Punkt das Hyperboloid tangirenden Ebene:

$$(4) \qquad z=\frac{c^2x_1}{a^2z_1}.x+\frac{c^2y_1}{b^2z_1}.y+\frac{c^2}{z_1}.$$

Es kommt nun darauf an, das Volumen desjenigen Kegels zu bestimmen, welchen die berührende Ebene (4) von der Asymptotenfläche (2) abschneidet. Lassen wir die Gleichungen (2) und (4) gleichzeitig bestehen, d. h. beziehen sich in beiden Gleichungen die Coordinaten x, y, z auf dieselben Punkte des Raumes, so bezeichnen die beiden Gleichungen die Durchschnittslinie der berührenden Ebene mit der Asymptotenfläche, d. i. diejenige krumme Linie, welche die Grundfläche des gesuchten Kegels begrenzt. Bezeichnen wir den Flächenraum dieser Grundfläche mit F und das vom Anfangspunkt auf die tangirende Ebene gefällte Perpendikel mit p und das Volumen des Kegels mit V, so ist

$$(5) \qquad V=\tfrac{1}{3}F.p.$$

Insofern sich nun die Lage des durch x_1, y_1, z_1 bezeichneten Punktes ändert, ändert sich auch die Lage der durch (4) dargestellten tangirenden Ebene und mit ihr der Flächenraum F und das Perpendikel p. Es ist also, um über die Grösse des Volumen V entscheiden zu können, nothwendig F und p oder doch das Product $F.p$ als Function von x_1, y_1, z_1 darzustellen. Um dieses auf die einfachste Art zu bewerkstelligen, eliminiren wir aus den Gleichungen (2) und (4) die Coordinate z und erhalten:

$$(6) \qquad a^2b^2z_1^2.(a^2y^2+b^2x^2)=c^2.(b^2x_1.x+a^2y_1.y+a^2b^2)^2,$$

eine Gleichung, welche die Projection der Durchschnittslinie der tangirenden Ebene mit der Asymptotenfläche auf die Ebene der xy bezeichnet. Wird diese Gleichung nach x und y entwickelt und geordnet, so findet man:

$$b^4(a^2z_1^2-c^2x_1^2).x^2+a^4(b^2z_1^2-c^2y_1^2).y^2-2a^2b^2c^2x_1y_1.xy$$
$$-2a^2b^4c^2x_1.x-2a^4b^2c^2y_1.y-a^4b^4c^2=0$$

oder weil aus (3) folgt:

$$a^2z_1^2-c^2x_1^2=a^2c^2.(1+\frac{y_1^2}{b^2}),\quad b^2z_1^2-c^2y_1^2=b^2c^2.(1+\frac{x_1^2}{a^2}),$$

$$b^4.(a^2z_1^2-c^2x_1^2)=a^2b^2c^2.(b^2+y_1^2),$$

$$a^4.(b^2z_1^2-c^2y_1^2)=a^2b^2c^2.(a^2+x_1^2),$$

wenn man diese Form der Coefficienten von x^2 und y^2 adoptirt und alsdann durch den gemeinschaftlichen Factor $a^2b^2c^2$ abkürzt:

(7)

$$(b^2+y_1^2).x^2+(a^2+x_1^2).y^2-2x_1y_1.xy-2b^2x_1.x-2a^2y_1.y-a^2b^2=0.$$

Um die besondere Beschaffenheit dieses Kegelschnittes kennen zu lernen, folgen wir der von Herrn Grunert in Thl. XXV. p. 146. gegebenen „Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen" und setzen:

$$a'=b^2+y_1^2,\quad b'=a^2+x_1^2,\quad c'=-x_1y_1,\quad d'=-b^2x_1,$$
$$e'=-a^2y_1,\quad f'=-a^2b^2,$$

wodurch die Gleichung (7) übergeht in

$$a'x^2+b'y^2+2c'xy+2d'x+2e'y+f'=0,$$

und berechnen die beiden Ausdrücke:

$$a'b'-c'^2 \quad \text{und} \quad a'e'^2+b'd'^2+f'c'^2-a'b'f'-2c'd'e'.$$

$$a'b'-c'^2=(b^2+y_1^2)(a^2+x_1^2)-x_1^2y_1^2=a^2b^2+b^2x_1^2+a^2y_1^2;$$

weil aber nach der Gleichung (3) $a^2b^2+b^2x_1^2+a^2y_1^2=\frac{a^2b^2}{c^2}.z_1^2$, so ist auch:

$$(9)' \qquad a'b'-c'^2=\frac{a^2b^2}{c^2}.z_1^2.$$

Ebenso erhält man:

$$\begin{aligned} a'e'^2 &= a^4b^2y_1^2+a^4y_1^4,\\ +b'd'^2 &= a^2b^4x_1^2+b^4x_1^4,\\ +f'c'^2 &= -a^2b^2x_1^2y_1^2,\\ -a'b'f' &= +a^2b^2(b^2+y_1^2)(a^2+x_1^2),\\ -2c'd'e' &= +2a^2b^2x_1^2y_1^2; \end{aligned}$$

mithin, wenn man diese Gleichungen addirt und die Glieder der zweiten Theile derselben entsprechend zusammenfasst:

$$a'e'^2+b'd'^2+f'c'^2-a'b'f'-2c'd'e'$$
$$=a^4b^2y_1^2+a^2b^4x_1^2+(a^4y_1^4+b^4x_1^4+2a^2b^2x_1^2y_1^2)$$
$$+a^2b^2.[(b^2+y_1^2)(a^2+x_1^2)-x_1^2y_1^2],$$
$$=a^2b^2.(a^2y_1^2+b^2x_1^2)+(a^2y_1^2+b^2x_1^2)^2+a^2b^2.\frac{a^2b^2}{c^2}.z_1^2;$$

nun ist aber, nach (3):

$$a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2 . \left(\frac{z_1^2}{c^2} - 1\right)$$

und

$$a^2b^2 . (a^2y_1^2 + b^2x_1^2) = a^4b^4 . \left(\frac{z_1^2}{c^2} - 1\right);$$

also

$$a'e'^2 + b'd'^2 + f'c'^2 - a'b'f' - 2c'd'e'$$

$$= a^4b^4 . \left(\frac{z_1^2}{c^2} - 1\right) + a^4b^4 . \left(\frac{z_1^2}{c^2} - 1\right)^2 + \frac{a^4b^4}{c^2} . z_1^2$$

$$= a^4b^4 . \left(\frac{z_1^2}{c^2} - 1 + \frac{z_1^4}{c^4} - 2\frac{z_1^2}{c^2} + 1 + \frac{z_1^2}{c^2}\right) = \frac{a^4b^4}{c^4} . z_1^4$$

oder

$$(10) \quad a'e'^2 + b'd'^2 + f'c'^2 - a'b'f' - 2c'd'e' = \left(\frac{a^2b^2}{c^2} . z_1^2\right)^2.$$

Weil sowohl die Grössen a', b', als auch die beiden Ausdrücke (9) und (10) positiv sind, so bezeichnet die Gleichung (8) oder jene (7) eine Ellipse, mithin ist auch die in der tangirenden Ebene liegende Grundfläche des Kegels V eine Ellipse. Bezeichnet man die beiden Halbaxen der durch die Gleichung (7) dargestellten Projections-Ellipse mit A und B, so ist

$$A^2B^2 = \frac{(a'e'^2 + b'd'^2 + f'c'^2 - a'b'f' - 2c'd'e')^2}{(a'b' - c'^2)^2},$$

also in dem vorliegenden Falle:

$$A^2B^2 = \frac{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} . z_1^2\right)^4}{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} . z_1^2\right)^3} = \frac{a^2b^2}{c^2} . z_1^2$$

oder

$$AB = \frac{ab}{c} . z_1 .$$

Bezeichnen wir den Flächenraum dieser Ellipse mit F_1, so ist

$$F_1 = AB . \pi = \frac{ab}{c} . z_1 . \pi .$$

F_1 ist der Flächenraum der Projection der Durchschnitts-Ellipse auf die Ebene der xy; ist also γ der Winkel, welchen die tangigirende Ebene (4) mit der Ebene der xy bildet, so ist:

$$F_1 = F.\mathrm{Cos}\gamma, \quad F = \frac{F_1}{\mathrm{Cos}.\gamma},$$

also

$$V = \tfrac{1}{3}AB.\pi.\frac{p}{\mathrm{Cos}.\gamma} = \tfrac{1}{3}.\frac{ab}{c}.z_1.\pi.\frac{p}{\mathrm{Cos}.\gamma};$$

γ ist aber auch der Winkel, welchen das Perpendikel p mit der Axe der z einschliesst, mithin ist nach den Lehren der analytischen Geometrie $\frac{p}{\mathrm{Cos}.\gamma}$ gleich dem von x, y, z freien Gliede in der Gleichung (4) der tangirenden Ebene, d. i.:

$$\frac{p}{\mathrm{Cos}.\gamma} = \frac{c^2}{z_1}, \quad \text{also} \quad V = \tfrac{1}{3}\frac{ab}{c}.z_1.\pi.\frac{c^2}{z_1} = \tfrac{1}{3}abc.\pi.$$

Das Volumen des gedachten Kegels ist also von den Coordinaten x_1, y_1, z_1 unabhängig und für alle Puncte des Hyperboloides constant.

Die Gleichung (7) der Projections-Ellipse kann mit Leichtigkeit auch auf die Form gebracht werden:

$$(11) \quad (y_1x - x_1y)^2 - b^2x(2x_1 - x) - a^2y(2y_1 - y) - a^2b^2 = 0.$$

Verbinden wir den Punct (xy) dieser Ellipse mit dem Punkte (x_1y_1) und verlängern die Verbindungslinie über (x_1y_1) hinaus soweit, bis die Verlängerung gleich der Distanz $(xy)(x_1y_1)$ wird; heissen die Coordinaten des Endpunktes der Verlängerung ξ und η, so muss, weil der Punkt (x_1y_1) im Mittelpunkt der Distanz $(xy)(\xi\eta)$ liegt,

$$x_1 = \frac{x+\xi}{2}, \quad y_1 = \frac{y+\eta}{2}$$

sein, oder es ist

$$x = 2x_1 - \xi, \qquad y = 2y_1 - \eta;$$

setzen wir diese Werthe von x und y in die Gleichung (11) und bedenken, dass

$$y_1x - x_1y = x_1\eta - y_1\xi,$$

so wird

$$(y_1\xi - x_1\eta)^2 - b^2\xi(2x_1 - \xi) - a^2\eta(2y_1 - \eta) - a^2b^2 = 0.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von jener (11) nur dadurch, dass ξ an der Stelle von x und η an der Stelle von y steht; die Gleichung (11) besteht also fort, wenn man in ihr ξ und η mit x und y vertauscht, folglich bezeichnen auch die Coordinaten ξ und η einen Punkt der Kurve. Da nun die von dem beliebigen Punkt (xy) der Kurve durch (x_1y_1) gezogene Sehne, stets durch diesen letzteren Punkt halbirt wird, so ist jene Sehne ein Durchmesser und der Punkt (x_1y_1) der Mittelpunkt jener Ellipse; mithin, nach der Lehre von den Projectionen der Punkt $(x_1y_1z_1)$ der **Mittelpunkt** der Durchschnitts-Ellipse.

Fasst man die Ergebnisse dieser kleinen Untersuchung zusammen, so erhält man folgenden

Lehrsatz.

Jede, ein zweitheiliges Hyperboloid berührende Ebene schneidet von dessen Asymptoten-Fläche Kegel von constantem Inhalt ab und der Berührungspunkt liegt stets im Mittelpunkt seiner elliptischen Grundfläche.

XLI.

Uebungsaufgabe für Schüler.

Von Herrn Franz Unferdinger, Lebensversicherungs-Calculator der k. k. p. Azienda Assecuratrice zu Triest.

Wenn a, b, c und A, B, C ihre gewöhnliche Bedeutung bei einem ebenen Dreieck haben, und Δ dessen Flächeninhalt bezeichnet, so ist

$$\Delta^2 = \tfrac{1}{8}abc(a\operatorname{Cos}A + b\operatorname{Cos}B + c\operatorname{Cos}C).$$

XLVI.

Miscellen.

A l'occasion de l'identité

$$\text{(a)}\quad 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}=m_1-\frac{m_2}{2}+\frac{m_3}{3}+\ldots\pm\frac{m_m}{m}$$

dont il a été question dans le T. XXVI. pag. 109. de l'Archiv, il est à propos de remarquer qu'elle n'est en effet qu'un cas particulier d'une autre que voici:

$$\text{(A)}\quad \mathop{S}_{i=1}^{i=m}\frac{(1+x)^i-1}{i}=m_1x+\frac{m_2}{2}x^2+\frac{m_3}{3}x^3+\ldots+\frac{m_m}{m}x^m,$$

de laquelle, si l'on pose successivement $x=-1$, $x=+1$, on obtient immédiatement l'identité (a) et cette autre:

$$\mathop{S}_{i=1}^{i=m}\frac{2^i-1}{i}=m_1+\frac{m_2}{2}+\frac{m_3}{3}+\ldots+\frac{m_m}{m}.$$

Quant à la formule générale (A), elle s'ensuit très-simplement de l'identité

$$\mathop{S}_{i=1}^{i=m}\frac{(1+x)^i}{i}=\mathop{S}_{i=1}^{i=m}\frac{1+i_1x+i_2x^2+\ldots+i_ix^i}{i}$$

$$=\mathop{S}_{i=1}^{i=m}\frac{1}{i}+mx+\frac{x^2}{2}\mathop{S}_{i=2}^{i=m}(i-1)_1+\frac{x^3}{3}\mathop{S}_{i=3}^{i=m}(i-1)_2+\ldots+\frac{x^m}{m},$$

vu qu'en vertu de la loi générale des nombres figurés (Voy. Cauchy, Cours d'Anal. not. VI. Theor. 1.), on a

$$\underset{i=2}{\overset{i=m}{S}}(i-1)_1 \text{ ou } \underset{i=1}{\overset{i=m-1}{S}} i_1 = m_2,$$

$$\underset{i=3}{\overset{i=m}{S}}(i-1)_2 \text{ ou } \underset{i=1}{\overset{i=m-2}{S}}(i+1)_2 = m_3,$$

$$\underset{i=4}{\overset{i=m}{S}}(i-1)_3 \text{ ou } \underset{i=1}{\overset{i=m-3}{S}}(i+2)_3 = m_4,$$

etc.

Westerås, le 27. Août. 1856.

E. G. Björling.

Die folgenden Worte hat Augustin Cauchy an des trefflichen Binet Grabe gesprochen, in denen er in würdiger, einem solchen Anlasse ganz entsprechender Weise, weniger Binet's grosse wissenschaftliche Verdienste, als die Tiefe seines religiösen Bewusstseins hervorhebt. Der Herr Herausgeber der ausgezeichneten Annali di scienze matematiche e fisiche, aus denen ich diese Worte entlehne (Giugno. 1855. p. 220.), Herr Barnaba Tortolini in Rom, sagt als Einleitung zu denselben:

I sentimenti di cattolica fede e di pietà sincera sono espressi dal Sig. Cauchy in questo discorso, non meno che in altre sue produzioni. Degnissimi di esser letti sono i due seguenti Opuscoli:

1°. Alquante parole rivolte agli uomini di buon senso e di buona fede da Luigi Agostino Cauchy, uno dei Precettori del Duca di Bordeaux. Traduzione dal Francese. Modena. Dalla Reale Tipografia Eredi Soliani, 1834, in 8°.

2°. Considérations sur les Ordres Réligieux, adressées aux amis des Sciences, par le Baron Augustin Cauchy, Membre de l'Académie des Sciences de Paris, de la Société Italienne, de la Société Royale de Londres, des Académies de Berlin, de Saint-Pétersbourg, de Prague, de Stockholm, de Goettingue, de la Société Américaine, etc. Paris, Librairie de Poussielgue-Rusand, rue Hautefeuille, n. 9. A Lyon, Chez L. Lesne, 1844, in 8°. In un capitolo di quest'operetta intitolato: Chapitre VIII. Le Révérend Père de la Compagnie de Jesus (pag. 36.) sono posti in piena luce gli eminenti vantaggi resi alla società dalla Compagnia di Gesù.

Discours de M. Augustin Cauchy.

Messieurs,

La mort vient de ravir à l'Académie des sciences son président; aux membres de l'Institut, aux professeurs du Collége de

France, un excellent confrère; à une femme, à des enfants, à une famille éplorée, un père tendrement aimé et digne de l'être; à moi-même, un ancien condisciple et un ami. Binet a quitté ce monde pour un monde meilleur. En présence de la tombe qui reçoit sa dépouille mortelle, je n'essayerai pas de rappeler les importants travaux par lesquels il a contribué aux progrès de la géométrie et de l'analyse mathématique; il sera plus digne pour lui, plus consolant pour nous d'arrêter notre esprit sur une pensée bien capable d'adoucir nos regrets. Binet n'était pas seulement un géomètre distingué, doué d'une haute intelligence: avec les plus beaux génies des siécles passés et des temps présents, avec les Descartes et les Fermat, avec les Haüy, les Ampère, les Laennec, il aimait à remonter de la connaissance des vérités scientifiques au Principe éternel de toute vérité. La méditation des lois sublimes qui régissent le cours des astres, qui entretiennent l'ordre et l'harmonie dans l'univers, lui offrait sans cesse de nouveaux motifs de bénir et d'adorer l'auteur de tant de merveilles. La foi vive de notre confrère, son ardent amour pour le Dieu auquel il rendait gloire par ses talents et ses vertus, par son vaste savoir et son inépuisable charité, doivent nous inspirer la douce confiance qu'aujourd'hui, plus heureux que nous, plus éclairé que nous, Binet est allé puiser la lumière à la source de toute lumière, apprendre des sécrets que nous sommes appelés nous-mêmes à connaître un jour, en marchant dans la voie qu'il a suivie. Absorbé par ces hautes pensées, vous me pardonnerez, Messieurs, d'en abréger l'expression. La vraie douleur s'exprime en peu de paroles; et, à la vue de la croix posée sur cette tombe en signe d'espérance, je me tais, je vous laisse franchir en esprit l'intervalle immense qui sépare les sciences de la terre, si limitées, si bornées en tous sens, même quand elles sont cultivées par des hommes d'un mérite supérieur, des vérités sublimes, de la divine science, qui nous seront révélées dans les cieux.

Berichtigungen zu Theil XXV.

Seite 285 Zeile 15 u. 16 statt $\frac{\omega \operatorname{Sin} 2\varphi}{m \operatorname{Sin} 1''}$ lies $\frac{\omega \operatorname{Sin} 2\varphi}{2m \operatorname{Sin} 1''}$.

" 288 " 9 v. u. " dx " $d\alpha$.

" 290 " 10 v. o. " indicibus " radicibus.

" 300 " 1 v. u. " $\sqrt{l+\frac{59}{52441}}$ lies $\sqrt{1+\frac{59}{52441}}$.

Berichtigung zu Theil XXVI.

Seite 224 Zeile 4 v. u. statt $\frac{e^x - e^{-x}}{x-1}$ setze man $\frac{e^x - e^{-x}}{x}$.

Literarischer Bericht

CV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Della vita e delle opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo; notizie raccolte da **Baldassarre Boncompagni.** (Dagli Atti dell' Accademia Pontificia de' nuovi Lincei Anno V. Sessioni I, II e III. (1851—1852.) Roma. 1852. 4°.

Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese, traduttore del secolo duodecimo, e di Gherardo da Sabbionetta, astronomo del secolo decimoterzo; notizie raccolte da **Baldassarre Boncompagni.** (Dagli Atti dell' Accademia Pontificia de' nuovi Lincei Anno IV. Sessione VII. del 27. Giugno 1851. Roma. 1851. 4°.

Delle versioni fatte da Platone Tiburtino, traduttore del secolo duodecimo, notizie raccolte da **B. Boncompagni.** Roma. 1851. 4°.

Das grosse, im Jahre 1854 erschienene, für die Geschichte der Mathematik ungemein wichtige Werk über Leonardo von Pisa von Herrn Baldassarre Boncompagni in Rom ist von uns im Literar. Berichte. Nr. XCIX. S. 1. angezeigt und den Lesern des Archivs als ein sehr wichtiger Beitrag zur Geschichte der Mathematik empfohlen worden. Alle Arbeiten des Herrn Boncompagni sind für einen Jeden, der dem Studium der Geschichte unserer Wissenschaft seine Zeit und seine Kräfte widmen will, ganz unentbehrlich, so dass wir es für unsere Pflicht halten, die drei obigen Schriften, wenn sie auch schon früher erschienen sind, jetzt noch anzuzeigen und unsern Lesern gleichfalls zur sorgfältigsten Beachtung zu empfehlen, indem wir nur lebhaft

bedauern, dass die nothwendige Kürze dieser literarischen Berichte uns nicht gestattet, noch näher auf diese wichtigen Schriften einzugehen.

So wie das im Jahre 1854 erschienene grössere Werk über Leonardo von Pisa sich vorzugsweise mit der genauen Charakterisirung einiger besonderen Schriften desselben beschäftigt: so beschäftigt sich die obige, im Jahre 1852 erschienene Schrift mehr im Allgemeinen mit dem Leben dieses italienischen Mathematikers, seinen Schriften überhaupt und den auf den verschiedenen italienischen Bibliotheken sich findenden Codices derselben, wobei wir wieder die vielfachste Gelegenheit gehabt haben, nicht nur der grossen literarischen und historischen Gelehrsamkeit des Herrn Boncampagni, sondern auch der wahrhaft aufopfernden Hingebung, mit welcher er seine Forschungen auf einer grossen Anzahl von Bibliotheken angestellt hat, unsere lebhafteste Bewunderung zu zollen. Beide Schriften über Leonardo von Pisa ergänzen sich daher gegenseitig, und nur aus der genauen Kenntniss beider wird man ein vollständiges Bild von der grossen Bedeutung dieses Mathematikers gewinnen können.

Die beiden anderen oben genannten Schriften des Herrn Boncompagni beschäftigen sich mit einem Astronomen aus dem 13ten Jahrhundert und zwei Uebersetzern mathematischer und anderer Werke aus dem 12ten Jahrhunderte, wobei jeder Kenner der Geschichte der Mathematik sich erinnern wird, wie wichtig gerade in der damaligen Zeitperiode Uebersetzungen classischer mathematischer Werke waren. Von den beiden letzteren sagt Libri in seiner „Histoire des sciences mathématiques en Italie. T. I. p. 168, 169:"

„Platon de Tivoli et Gérard de Crémone sont les plus célèbres parmi les traducteurs italiens du douzième siècle. On doit à Gérard la première version de l'Almageste, et à Platon de Tivoli la connaissance de plusieurs ouvrages de géométrie."

Von der grossen Fruchtbarkeit des Gherardo Cremonese werden sich die Leser einen Begriff machen können, wenn wir ihnen sagen, dass Herr Boncompagni auf S. 4. 5. 6. 7. seiner Schrift etwa 80 von demselben übersetzte Schriften aus den verschiedensten Zweigen des Wissens anführt, unter denen sich allerdings auch das Almagest, mehrere Bücher des Euclides u. s. w. finden. Platon von Tivoli übersetzte u. A. auch die Sphaerica des Theodosius.

Wir müssen uns mit diesen kurzen Notizen über die vorliegenden wichtigen Schriften des Herrn Boncompagni hier leider begnügen,

sind aber auch der Meinung, dass dieselben hinreichend sein werden, um die Leser auf die grosse Wichtigkeit derselben hinzuweisen und ihre Unentbehrlichkeit für einen Jeden, der dem Studium der Geschichte der Mathematik seine Musse zu widmen gedenkt, nachzuweisen. Dass der Herr Verfasser auf dieser so rühmlichen Bahn der Bereicherung der Geschichte unserer Wissenschaft fortfahren und dass ihm die Vorsehung dazu Kraft und Ausdauer schenken möge, wünschen wir im Interesse der Wissenschaft sehr. G.

Mechanik.

So wie ich bei einem so wichtigen Gegenstande, wie Poinsot's Theorie der Drehung ist, mich für verpflichtet gehalten habe, die von Herrn Saint-Guilhem in den Nouvelles Annales de Mathématiques. T. XV. Février. 1856. p. 63. gegen die Strenge derselben erhobenen Einwürfe im Archive der Mathematik und Physik. Thl. XXVI. Literar. Ber. Nr. CII. S. 11. mitzutheilen: eben so würde ich mich zur Mittheilung der von Herrn Bertrand in den Nouvelles Annales. T. XV. Mai. 1856. p. 187. gegen diese Einwürfe des Herrn Saint-Guilhelm gemachten Bemerkungen auch dann für verpflichtet gehalten haben, wenn ich nicht von Herrn Bertrand selbst in einem sehr freundlichen und gütigen Briefe (ohne Datum), für den ich ihm hier zugleich verbindlichst danke, aufgefordert worden wäre, diese Mittheilung im Archive zu machen. Ich lasse daher das von Herrn Bertrand an Herrn Terquem gerichtete Schreiben, nebst der Note des letzteren, hier folgen:

Lettre sur la rotation d'un corps solide.

„Mon cher monsieur Terquem."

Lorsque je reçus, il y a une quinzaine de jours, la nouvelle livraison des Nouvelles Annales, je vous écrivis immédiatement pour protester au nom des géomètres contre les objections absolument dénuées de fondement que l'on élevait sur la théorie de la rotation donnée par M. Poinsot. N'ayant pas alors sous les yeux le Mémoire de l'illustre géomètre, je me bornais à deviner d'après mes souvenirs, par quel malentendu l'auteur de la Note avait pu se méprendre sur les sens des expressions employées et trouver une erreur où chacun n'avait aperçu jusqu'ici qu'un modèle de rigueur et d'élégance. Je viens de relire les premières pages de ce beau travail, et j'avoue qu'il me semble

suffisant de conseiller à vos lecteurs d'en faire autant; c'est seulement pour ceux qui n'auraient pas le moyen de recourir au texte que je vous demande place pour quelques explications.

J'ouvre le Journal de M. Liouville t. XVI. p. 43, et je trouve un paragraphe intitulé: Des forces centrifuges qui n'aissent de la rotation. C'est celui-là qu'il faut lire pour apprécier la valeur des objections dont je parle.

On y trouvera d'abord la démonstration géométrique d'un théorème bien connu dont l'énoncé se lit page 44 (lignes 14 à 16):

„La force centripète nécessaire pour qu'un point puisse tour-„ner en cercle avec une vitesse u est exprimée par le carré de „cette vitesse divisé par le rayon du cercle."

M. Poinsot ajoute, il est vrai: „La même expression con-„vient à un mouvement curviligne quelconque .... en prenant pour „r le rayon du cercle osculateur à la courbe décrite au point que „l'on considère."

Cette remarque, inutile pour ce qui va suivre, est placée là pour l'instruction du lecteur, mais vous connaissez l'adage: Quod abundat, non vitiat. Elle est donc parfaitement légitime, et cependant, s'il fallait absolument conjecturer, je me hasarderais à dire que c'est à cause d'elle que M. Poinsot, malgré toute sa clarté, n'a pas été compris par tout le monde.

Je lis plus loin, page 45: „Dans la question qui nous occupe .... il n'y a pas de force centripète qui intervienne pour faire tourner librement chaque molécule autour de l'axe (instantané) OZ, mais je considère que si cette force n'y est point, rien n'empêche de la supposer, pourvu qu'on en suppose une égale et contraire."

Cette force centripète que rien n'empêche de supposer, est, on le voit, celle qui ferait décrire à la molécule un cercle rigoureux. Rien n'empêche évidemment de la supposer, pourvu qu'on introduise une force égale et contraire qui est la force centrifuge.

Maintenant l'objection de M. S.-G. se réduit à ceci:

Pourquoi introduisez vous la force nécessaire pour faire tourner la molécule en rigueur autour de l'axe instantané? Je préférerais vous voir calculer la force centripète réelle, et, pour cela, déterminer le rayon de courbure de la trajectoire, très différent de celui du cercle dont vous parlez.

A ceci on peut répondre: M. Poinsot introduit cette force

parce que c'est celle-là qui est commode pour son raisonnement tel qu'il veut le faire, et que rien n'empêche d'introduire dans un système deux forces égales et contraires quelles qu'elles soient. Ceci est si vrai, que l'on pourrait, si on le désirait, introduire la force que M. S.-G. nomme la véritable force centrifuge; mais je n'aperçois pas à quoi cette introduction pourrait servir, et il semble que la chaine des raisonnements, rompue alors dès le début, ne pourrait plus se renouer. J. Bertrand.

Note du Rédacteur.

M. Poinsot, malgré toute sa clarté, n'a pas été compris de tout le monde. L'explication n'est donc pas superflue, vu que ce tout le monde comprend des esprits distingués. La force centripète que M. Poinsot évalue est une force artificielle pour ainsi dire, très-commode pour l'objet que l'illustre géomètre avait en vue, mais ce n'est pas la force centripète réelle ou telle qu'elle existe réellement. M. Poinsot fait bien allusion à cette distinction. La discussion actuelle montre bien que cette allusion n'est pas suffisante. L'axe instantané de rotation instantanée ne serait-il pas plus convenablement désigné sous le nom de droite de repos instantané? car, à vrai dire, il n'y a pas de rotation. Chaque point tourne autour d'une droite élevée au centre de courbure perpendiculairement au plan osculateur relatif à la trajectoire décrite par ce point. L'ensemble de ces perpendiculaires est la surface gauche de rotation instantanée pour ce point. Chacun a la sienne. Dans un corps solide en mouvement, trois de ces surfaces déterminent toutes les autres.

Astronomie.

Drei Quellen über den Kometen von 1556. Von Karl v. Littrow, wirkl. Mitgliede der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. (Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissensch. April. 1856.)

Bei der Bestimmung der Elemente des grossen Kometen von 1556, den wir bekanntlich mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit zwischen 1856 und 1860 wieder zu erwarten haben, vermissten alle neueren Rechner die Originalbeobachtungen des damaligen kaiserlichen Mathematikus Paul Fabricius. Herr Prof. v. Littrow hat sich daher durch seine eifrigen und mühevollen Nachforschungen nach diesen Beobachtungen ein neues grosses Verdienst um die Wissenschaft erworben, wofür er den besten Dank dadurch geerntet

hat, dass es ihm allerdings gelungen ist, einige sehr wichtige Documente über diesen Kometen herbeizuschaffen, welche er in dieser sehr interessanten Abhandlung mittheilt. Das erste dieser Documente ist ein in einem Baude kaiserlicher Patente des ständischen Archivs zu Wien befindliches, nach Art eines Placates gedrucktes Blatt in Grossfolio mit der Ueberschrift: „Der Comet im Mertzen des LVI. Jars in Osterreich erschinen“ mit einer den Lauf des Kometen darstellenden Karte, zu dessen Kenntniss Herr v. Littrow durch die Güte des Herrn C. Denhart gelangte. — Das zweite ist ein sogenanntes Judicium (prophetische Deutung), gleichfalls mit einer Karte, das die Ueberschrift hat: „Cometa Visus Mense Martio LVI. Anno“, das sich in dem Besitze des Herrn F. Roeth in Augsburg fand. — Das dritte endlich ist eine in der Bibliothek zu Wolfenbüttel befindliche Schrift unter dem Titel: „Practica auf das M. D. LVII. Jar, sampt Anzeygung und ercleruug, Was die erscheinung, und Bewegung, des vergangenen und zuvor angezeygten Cometen. Im sechs und funfftzigsten Jar gewesen, und bedeutet habe,.... gestellet durch M. Joachim Heller verordneten Astronomum zu Nürnberg.“ Das aus diesen Schriften von Herrn v. Littrow Mitgetheilte ist in historischer Rücksicht im höchsen Grade interessant, und die gleichfalls mitgetheilte Karte über den Lauf des Kometen ist natürlich für Jeden, der sich mit dessen Berechnung beschäftigen will, von grosser Wichtigkeit.

Ueber lichte Fäden im dunkeln Felde bei Meridian-Instrumenten. Von Karl v. Littrow, wirklichem Mitgliede der Kaiserl. Akademie der Wissensch. zu Wien. (Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie. März 1856.)

In dieser Abhandlung beschreibt Herr v. Littrow ein neues Mikrometer mit lichten Fäden im dunkeln Felde, welches neuerlich im Wiener Mittagsrohre angebracht worden ist, und sich durch seine Leistungen schon vortrefflich bewährt hat. Wenn auch zur Erfindung dieses Mikrometers das bekannte Punkt-Mikrometer des Herrn Director Reslhuber in Kremsmünster die nächste Veranlassung gegeben haben mag, so hat Herr Director v. Littrow doch so viele neue Einrichtungen angebracht, dass die jetzige Vorrichtung hauptsächlich als seine Erfindung zu betrachten ist. Begreiflicherweise können wir uns auf eine ausführlichere Beschreibung dieses neuen Apparats nicht einlassen, sondern müssen deshalb auf die interessante, sehr deutlich verfasste und durch sehr anschauliche Zeichnungen erläuterte Abhandlung selbst

verweisen, halten aber den neuen Apparat jedenfalls für einen Fortschritt in der beobachtenden Astronomie.

Nautik.

M. Lartigne (Schiffscapitain, Ritter der Ehrenlegion): Das Windsystem oder die Luftbewegung an der Erdoberfläche und in den höheren Regionen der Atmosphäre. Nach der zweiten Ausgabe deutsch bearbeitet von Dr. G. Tröbst. Weimar. Voigt. 1856. 8. 15 Sgr.

Die Deviation der Compassnadel so wie Regeln für die Aufstellung und Untersuchung des Compasses an Bord. Von J. C. Tuxen, Pr.-Lieutenant in der Marine und Lehrer an der Seekadetten-Akademie in Copenhagen. In das Deutsche übertragen von H. Graff, Navigationslehrer in Grabow bei Stettin. Stettin. Von der Nahmer. 1856. 8. 12 Sgr. 6 Pf.

Diese beiden kleinen Schriften verdienen der Beachtung des nautischen Publikums empfohlen zu werden.

Physik.

Studien aus der höheren Physik. Von Dr. August Kunzek, k. k. Professor der Physik an der Universität zu Wien u. s. w. Mit 64 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Wien. Braumüller. 1856. 8.

Das „Lehrbuch der Physik mit mathematischer Begründung zum Gebrauche in den höheren Schulen und zum Selbstunterrichte. Wien 1853.“ desselben Herrn Verfassers haben wir im Literar. Ber. Nr. LXXXVI. S. 11. angezeigt und unsere Leser darauf hinzuweisen uns erlaubt, mit welcher Gründlichkeit in diesem trefflichen Werke die Physik bloss mit Hülfe elementar-mathematischer Lehren dargestellt ist. Natürlich aber kann die Elementar-Mathematik ohne zu grosse Weitläufigkeit den Schüler der Physik immer nur bis zu einer gewissen Stufe führen, er wird sich häufig nur mit einer gewissen, bloss näherungsweisen Entwickelung und Darstellung der Naturgesetze begnügen müssen und kann sich nicht immer bis zu deren allgemeinstem Ausdrucke erheben. Dadurch ist der Herr Verfasser

veranlasst worden, diesem früheren elementar gehaltenen Werke die oben genannten „**Studien aus der höheren Physik**" folgen zu lassen, in denen er kein von der höheren Mathematik dargebotenes Hülfsmittel unbenutzt lässt, mit dessen Hülfe eine vollständige Einsicht in die verschiedenen Naturgesetze mit der grössten Bestimmtheit bis auf die kleinsten Nüancen gewonnen werden kann und dieselben sich zugleich zur grössten Allgemeinheit erheben lassen. Er hat aber, ungeachtet des sehr bescheidenen Titels „**Studien**", noch mehr gethan als dieses, indem er dem Lehrlinge auch vollständig die Mittel in die Hände geliefert hat, welche ihn zu, den neueren Ansprüchen der Wissenschaft genügenden Arbeiten auf dem Felde der Physik befähigen, wohin wir vorzüglich die sehr vollständige Darstellung der verschiedenen Interpolationsmethoden; die Entwickelung der mathematischen Ausdrücke, die zur Darstellung des Gesetzes, welches den Gang einer periodischen Erscheinung bestimmt, insbesondere auch die schönen, von Herrn Ministerialrath **Marian Koller** gegebenen, hierher gehörenden Entwickelungen; und die mit grosser Deutlichkeit auf das kleinste Detail eingehende Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate rechnen. So wie hier, zeichnet sich in **allen** Kapiteln die Darstellung durch Eleganz, Einfachheit, Deutlichkeit und Bestimmtheit aus, wobei zugleich jeder Kenner finden wird, dass von dem Herrn Verfasser mehrere Partieen seines Buchs, namentlich die Lehre vom Lichte, in welcher mit grosser Umsicht das ausgewählt worden ist, was für den Schüler der Physik besonders wichtig ist, um eine deutliche, wissenschaftlich vollständig begründete Einsicht in diesen interessanten Theil der neueren Physik zu gewinnen, einer ihm eigenthümlichen Bearbeitung unterzogen worden sind. Nach diesen Bemerkungen wird man unser Urtheil gerechtfertigt finden, wenn wir dasselbe dahin aussprechen, dass wir das von dem Herrn Verfasser früher herausgegebene „**Lehrbuch der Physik mit mathematischer Begründung**" und die hier besprochenen „**Studien aus der höheren Physik**", in Verbindung mit einander, für eins der besten Hülfsmittel auf dem Gebiete der deutschen Literatur halten, um der Physik in ihrer weitesten Ausdehnung ein wahrhaft gründliches Studium widmen zu können, wozu freilich, namentlich was die „**Studien**" betrifft, ein ziemliches Maass von Vorkenntnissen aus den verschiedenen Theilen der niederen und höheren Mathematik erforderlich ist, ohne dass jedoch der Herr Verfasser, was wir gleichfalls für sehr zweckmässig halten, in dieser Beziehung über das hinausgegangen ist, was sich in den besseren und vollständigeren Lehrbüchern der höheren Analysis findet. Bücher, wie die vorliegenden, begrüssen

wir immer mit besonders grosser Freude und besonders grossem Interesse, weil wir, wie den Lesern hinreichend aus unsern verschiedenen Anzeigen in diesen Literarischen Berichten bekannt ist, ohne dem Experiment im Geringsten seinen grossen, unbestreitbaren, von Niemand mehr als uns selbst anerkannten Werth nehmen zu wollen, immer hauptsächlich der strengen mathematischen Begründung der Physik das Wort geredet haben, und darin vorzugsweise das wirklich bildende Element für die Schüler der höheren Lehranstalten finden. Dass aber in dieser Beziehung der Herr Verfasser des vorliegenden Werkes in neuerer Zeit sich ganz besonders mit dem grössten Danke anzuerkennende Verdienste um die Wissenschaft und das Lehrwesen erworben hat, unterliegt am wenigsten jetzt, wo das hier näher besprochene Werk erschienen ist, noch einem Zweifel.

Der Raum erlaubt uns nur noch die Angabe der Ueberschriften der einzelnen Abschnitte, um dem Leser dadurch einen Ueberblick des reichen Inhalts und der von dem Herrn Verfasser mit grosser Umsicht getroffenen Auswahl zu verschaffen: I. Abschnitt. Verfahren, aus Beobachtungen gewisser Naturerscheinungen Gesetze zu ermitteln, nach denen sich diese Erscheinungen entwickeln. II. Abschnitt. Methode der kleinsten Quadrate. III. Abschnitt. Statik. IV. Abschnitt. Dynamik. (In beiden vorhergehenden Abschnitten haben vorzüglich auch die allgemeinsten statischen und dynamischen Gesetze Berücksichtigung gefunden, welche in den häufigsten Fällen am Leichtesten zu dem Ansatz der Gleichungen führen, durch welche die Auflösung der verschiedenen, in der Mechanik auftretenden Aufgaben vermittelt wird, was diesem Buche gleichfalls besonderen Werth verleihet.) V. Abschnitt. Gleichgewichts- und Bewegungsgesetze flüssiger Körper. VI. Abschnitt. Optische und einige akustische Lehren. (Dass dieser Abschnitt mit besonderer Eigenthümlichkeit und Umsicht in der Heraushebung des Wichtigsten aus dem so unendlich reichen Material bearbeitet worden ist, haben wir schon oben bemerkt.)

Dass dieses Werk in Verbindung mit dem früher erschienenen, mehr elementar gehaltenen Lehrbuch der mathematischen Physik zu einer immer grösseren Verbreitung dieser allein wahrhaft streng wissenschaftlichen Behandlung der genannten herrlichen Wissenschaft beitragen möge, wünschen wir sehr, und empfehlen beide Werke nochmals als ganz vorzügliche Hülfsmittel dazu aus vollkommener Ueberzeugung. Wer freilich nicht mit schon früh geübtem und gewecktem Sinn für wirkliche mathematische Strenge und Evidenz an das Studium dieser Werke herantritt, wird vielleicht wieder lieber zu manchen anderen, bei gewissen

Leuten beliebten, weit weniger streng wissenschaftlich gehaltenen Lehrbüchern zurückkehren; dergleichen Jünger halten wir aber für keinen Verlust für die Wissenschaft. Die äussere Ausstattung des Werks ist so elegant, wie sie nur gewünscht werden kann.

Das Zodiacallicht. Uebersicht der seitherigen Forschungen nebst neuen Beobachtungen über diese Erscheinung in den Jahren 1843 bis 1855. Von J. F. Julius Schmidt, Astronomen der Sternwarte des Prälaten E. Ritter von Unkrechtsberg zu Olmütz. Braunschweig. Bruhn. 1856. 8. 22 Sgr.

Die sehr vielen eigenen genauen und sorgfältigen Beobachtungen des Herrn Verfassers über das Nordlicht machen diese Schrift für einen Jeden, wer sich mit Untersuchungen über dieses noch in vielen Beziehungen so dunkele Phänomen beschäftigen will, zu einer wichtigen und unentbehrlichen Erscheinung. Ausserdem aber ist dieselbe auch in allgemein wissenschaftlicher Beziehung interessant, wegen der sehr genauen Beschreibung aller einzelnen bei dem Phänomen vorkommenden Vorgänge, und der Zusammenstellung der Ergebnisse aller früheren Arbeiten von einiger Wichtigkeit, und der vielfachen historischen Erörterungen, wobei die Darstellung ganz populär gehalten ist. Wir wünschen dem Herrn Verfasser von Herzen Ausdauer und Kraft, sich, wie er verspricht, auch fernerhin der unausgesetzten Beobachtung dieser wichtigen Erscheinung zu widmen, aus der jedenfalls der Wissenschaft ein namhafter Gewinn erwachsen wird. Der Hauptinhalt ist folgender: I. Beschreibung des Zodiacallichts; Rückblick auf die seitherigen Beobachtungen desselben. II. Eigene Beobachtungen über das Zodiacallicht von 1843 bis 1855. III. Berechnung der Beobachtungen. IV. Vermuthungen über das Zodiacallicht und über den möglichen Zusammenhang desselben mit einem widerstehenden Mittel im Sonnensysteme.

Das Normalverhältniss der chemischen und morphologischen Proportionen. Von Adolf Zeising. Leipzig. Weigel. 1856. 8.

Der Herr Verfasser führt in dieser Schrift einen grossen Theil der in der Natur vorkommenden Zahlenverhältnisse, namentlich auch die in dem Planetensystem herrschenden Verhältnisse, auf das Verhältniss des aus der Geometrie bekannten sogenannten goldenen Schnitts zurück. Wir können ihm in diesen Betrachtungen hier nicht folgen, sondern müssen lediglich den Lesern

überlassen, sich aus der Schrift selbst ein Urtheil zu bilden, in wie weit sie den Betrachtungen des Herrn Verfassers beizustimmen geneigt sind oder nicht.

Vermischte Schriften.

Annali di scienze matematiche e fisiche, compilati da Barnaba Tortolini, Professore di Calcolo Sublime, e Membro del Collegio Filosofico all 'Università Romana, Professore di Fisica Matematica nel Collegio Urbano e nel Pontificio Seminario Romano, Socio ordinario della Pontificia Accademia de' Nuovi Lincei, etc. etc.

Von diesem trefflichen Journal, durch dessen Herausgabe Herr Professor B. Tortolini in Rom sich sehr grosse Verdienste um die Förderung des Studiums der Mathematik und Physik in Italien erwirbt, sind bereits sechs Theile erschienen, und vier Hefte des mit diesem Jahre begonnenen siebenten Bandes liegen uns gegenwärtig vor. Da es sehr zu wünschen ist, dass diese ausgezeichnete Zeitschrift ihres wichtigen Inhalts wegen namentlich auch in Deutschland allgemeiner bekannt werde und einen möglichst grossen Kreis von Lesern finde, so wollen wir im Folgenden den Inhalt der uns bis jetzt vorliegenden Hefte des siebenten Theils mittheilen, und werden damit fortfahren, so wie uns die einzelnen Hefte zugeben.

Gennajo 1856. Sul discriminante delle funzioni omogenee a due indeterminate e sull' equazioni ai quadrati delle differenze. Nota di F. Brioschi. p. 5. — Sulle funzioni omogenee di terzo grado a due indeterminate. Nota di F. Brioschi. p. 15. — Mémoire sur le mouvement de la terre autour de son centre de gravité, Par le P. M. Jullien S. J. p. 21.

Febbrajo 1856. Mémoire sur le mouvement de la terre autour de son centre de gravité. Par le P. M. Jullien S. J. (Continuazione e fine.) p. 33. — Sur l'association de plusieurs condensateurs entre eux pour manifester les faibles doses d'électricité. (Lettre de Mr. P. Volpicelli, à Mr. Pouillet.) p. 44. — Ricerche sopra il pianeta Giove fatte coll' equatoriale di Merz all' Osservatorio del Collegio Romano durante l'anno 1855 dal P. A. Secchi d. C. d. G. p. 51. — Sopra le forme omogenee a due indeterminate. Nota di F. Brioschi. p. 60. — Sopra una trasformatione delle equazioni caratteristiche per un discriminante. Nota di F. Brioschi. p. 64. —

Ricerche analitiche sulle forme omogenee a due indeterminate. Nota di F. Brioschi. p. 69. — Sulle funzioni isobariche. Nota di Faà di Bruno. p. 76.

Marzo 1856. Sulle funzioni isobariche. Nota di Faà di Bruno. (Continuazione e fine.) p. 81. — Sul teorema fondamentale dell' Induzione Elettrostatica. Nota di A. Nobile. p. 89. — Intorno ad un teorema di Abel. Nota di Luigi Cremona. p. 99. — Sur Leonard Bonacci de Pise, et sur trois écrits de cet auteur publiés par Balthasar Boncompagni. Article de M. O. Terquem. p. 100.

Aprile 1856. Sur Léonard Bonacci de Pise, et sur trois écrits de cet auteur publiés par Balthasar Boncompagni. Article de M. O. Terquem. (Continuazione e fine.) p. 129. — Sulla direzione degli aerostati. Memoria di Carlo Gabussi. p. 148.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Nr. 348—359. (Vergl. Literar. Ber. XCIX. S. 16.)

Die obigen Nummern enthalten einen Aufsatz von Herrn Th. Zschokke über das Grundeis auf der Aare, mehrere Aufsätze von Herrn R. Wolf astronomischen, meteorologischen und physikalischen Inhalts, namentlich in Nr. 356. eine grössere Abhandlung: Beobachtungen der Sonnenflecken in der ersten Hälfte des Jahres 1855, und Nachträge zur Untersuchung ihrer Periodicität, mit besonderer Berücksichtigung der Astronomie populaire von Arago. Ausserdem theilt Herr Wolf wieder mehrere interessante Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz mit. So erzählt er z. B. S. 199. von dem verdienten Tralles Folgendes: „Johann Georg Tralles, von Hamburg, Professor der Mathematik und Physik an der alten Berner Akademie, erhielt am 18. October 1800 mit Genehmigung des vollziehenden Raths von der Gesetzgebung wegen seiner ausgezeichneten wissenschaftlichen Kenntnisse und Helvetien bereits geleisteter Dienste das Helvetische Bürgerrecht, und nahm es mit Dank an. — Im März 1803 sandte Tralles von Neuenburg aus, wohin er sich während der bei'm Sturze der Helvetik entstandenen Unruhen zurückgezogen hatte, sein Entlassungsgesuch von der Professur ein, — man glaubte in Folge eines vortheilhaften Rufes nach Amerika." — (Tralles ward bekanntlich später Professor und Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Berlin. G.)

Literarischer Bericht
CVI.

Necrolog.

Johann Michael Joseph Salomon,

correspondirendes Mitglied der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, Doctor der Philosophie und wirkliches Mitglied des philosophischen Doctoren-Collegiums an der Wiener Universität, ordentl. öffentl. Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute, Mitglied der k. k. Prüfungs-Commission über Lehramtskandidaten für Ober-Realschulen, Gründer und General-Sekretär der allgemeinen wechselseitigen Capitalien- und Renten-Versicherungs-Anstalt in Wien,

geboren 1793, gestorben 1856.

(Mitgetheilt von Herrn Professor Rogner in Gratz.)

Indem ich die Feder ergreife, den Blättern der Geschichte das Andenken an einen Mann einzureihen, dessen Namen Tausende mit inniger Dankbarkeit, mit aufrichtiger Hochachtung und Verehrung nennen, dessen grosse Verdienste um die Wissenschaft und deren Verbreitung, deren Anwendung zum Wohle der Menschen weitaus über die Grenzen des Gewöhnlichen reichen, — will ich nichts weniger, als eine kritische Beleuchtung und Zergliederung der rastlosen Thätigkeit des Verblichenen geben; — dazu fühle ich weder die Kraft in mir, noch erkenne ich meinen Standpunkt als angemessen: — es seien diese Zeilen bloss kurz zusammengefasste Hauptmomente und Resultate eines Lebens, wie es der Wechsel und die Flucht der Erscheinungen selten darbieten, und das in seinen Skizzen schon die Theilnahme des Gebildeten gesichert haben mag; — Zeilen, niedergelegt als Dankesopfer auf das Grab des unvergesslichen Lehrers, Freundes, Vaters! —

„J. M. J. Salomon wurde (wie ich autobiographischen Notizen des Dahingeschiedenen entnehme und die ich, so weit sie reichen, durch keinerlei Weise vertauschen will) am 22. Februar 1793 zu Oberdürrbach, einem von Würzburg ein kleines Stündchen entfernten Oertchen, geboren, wo sein Vater Gegenschreiber (Controlor) bei der dortigen Vogtei des Julius-Hospitals war. Den ersten Elementar-Unterricht erhielt S. von seinem Vater selbst, den er schon als Knabe auf seinen kleinen Geschäftsreisen begleitete, und während derselben wurde sein Sinn für die Schönheiten der Natur und seine Neigung zum Studiren mächtig angeregt. Bei der im Jahre 1804 eingetretenen neuen Organisation des damaligen Bisthums Würzburg übersiedelte er mit seinem Vater in die Stadt Würzburg, wo unter der kurzen Regierung des damaligen Kurfürsten Maximilian von Baiern Realschulen und zwei Progymnasien errichtet wurden. In den Studienjahren 1805—6 und 1806—7 absolvirte S. das Progymnasium, welches unter der Leitung des ausgezeichneten Lehrers Rieger einen ehrenvollen Ruf erworben hatte, und kam dann im Jahre 1807 an das akademische Gymnasium, an welchem er die sogenannten Grammatical- und Humanitäts-Classen mit dem glücklichsten Fortgange absolvirte und sich vorzüglich in der Mathematik und in der griechischen Sprache auszeichnete. Im Jahre 1812 bezog er die Universität und studierte zunächst die beiden philosophischen Jahrgänge, wo er sich gleich im ersten Semester des ersten Jahrganges in der Mathematik so auszeichnete, dass er im zweiten Semester statt des ordentlichen Professors, des Herrn Dr. Schön, und unter seiner unmittelbaren Anleitung, die öffentlichen Vorlesungen über die Elementar-Geometrie halten durfte und seinen eigenen Mitschülern ein Privatissimum über Geometrie gab. In Folge dieser Auszeichnung wurde S. während der nächsten Ferien zum Lehrer der Geometrie bei der polytechnischen Schule in Würzburg ernannt. Im zweiten philosophischen Jahrgange beschäftigte er sich vorzugsweise mit dem Studium der höheren Mathematik und der Astronomie, unterzog sich am Schlusse des Jahres 1814 den öffentlichen strengen Prüfungen, und wurde als der Erste seiner Classe anerkannt. In Folge dieser wiederholten Auszeichnungen wurde er zum öffentlichen Repetitor für die Gymnasial-Classen des akademischen Gymnasiums ernannt, welche Stelle er neben der oben erwähnten bis zu seiner Abreise nach Wien bekleidete. — Nach Vollendung der philosophischen Studien wollte sich S. ausschliessend den mathematisch-physikalischen Wissenschaften widmen, allein sein wahrhaft väterlicher Freund, Herr Professor Dr. Schön, machte ihn aufmerksam, dass im Grossherzogthum Würzburg die Aussicht auf eine einstige Pro-

fessur in weite Ferne gerückt sei, und dass er wegen seiner Verbindungen mit den angesehensten und einflussreichsten Familien der damaligen Residenzstadt auf der juridischen Laufbahn ein rascheres Emporkommen mit der grössten Wahrscheinlichkeit hoffen könne, und so gab er dem Drängen seines besorgten Freundes nach und widmete sich im Jahre 1814 u. f. den Rechtswissenschaften, wo er in den geistreichen Vorträgen eines Rudhart, Schmidtlein, Kleinschrod und Beer für seine aufgegebene Neigung im reichen Maasse Entschädigung fand. Als jedoch S. im Jahre 1816 aus den öffentlichen Blättern erfuhr, dass in Wien ein grossartiges polytechnisches Institut mit wahrhaft kaiserlicher Munificenz errichtet werde, da erwachte seine lang unterdrückte Lieblingsneigung für die mathematischen Studien, und es reifte in ihm der feste Entschluss, seinem inneren Drange zu folgen. Sorgfältig verschwieg er sein Vorhaben, aus Besorgniss, sein Freund Dr. Schön könnte ihn neuerdings von der Ausführung abhalten, und reiste nach Vollendung des Sommerkurses anfangs September nach Wien, wo er sich bemühte, die Mittel zur Deckung seiner Subsistenz zu finden, und war so glücklich, durch die Empfehlung des damaligen Vicedirectors der Realschule als Hofmeister der beiden Söhne des k. k. Obersten und Militär-Referenten beim k. k. Hofkriegsrathe, Herrn Karl Ritter von Mertens aufgenommen zu werden, welche Stelle er Ende October 1816 mit einiger Bangigkeit übernahm, weil er das alte Sprichwort: „quem Dii odere, magistrum fecere“ aus der praktischen Erfahrung bereits kannte. Allein, sehr bald erkannte er, dass seine Besorgniss völlig unbegründet sei, denn er verlebte in einer höchst achtbaren Familie nicht als Diener, sondern als wahrer Freund des Hauses vier volle Jahre in den angenehmsten Verhältnissen, und wird die dankbare Erinnerung an diese Periode seines Lebens ewig in seinem Herzen bewahren. Im Studienjahre 1816—17 besuchte S. am k. k. polytechnischen Institute die Vorlesungen über die höhere Mathematik und Physik, und wurde am Schlusse des Schuljahres von der Direction der genannten Anstalt zum Assistenten und öffentlichen Repetitor für die höhere Mathematik ernannt und von der k. k. n. ö. Landesregierung als solcher bestätigt.“

So weit reden Aufzeichnungen seiner Handschrift; — betrafen diese die Zeit des Strebens und Ringens einer nach allen Richtungen wahrhaft männlichen Kraft, die trotz mannigfaltiger Hindernisse mit dem ehrenvollsten Erfolge zur Thatsache bringt, was sie von Innen aus thun muss, so leitet uns die Betrachtung ihres ferneren Wirkens und Schaffens in die Tage ihrer denkwürdigsten Thätigkeit, die sich nach Errungenschaft einer festen Lebensstellung, die zugleich die schönsten Wünsche erfüllte, auf das Glän-

zendste entfaltete. — Nach vier Jahren, d. i. im Jahre 1821, wurde S. in Folge abgelegter Concursprüfung auf Vorschlag seiner Studiendirection von Sr. Majestät Kaiser Franz I, dem erhabenen Gründer des polytechnischen Institutes in Wien, zum o. ö. Professor der Elementar-Mathematik ernannt. Vom Jahre 1825 bis 1831 lehrte er gleichzeitig die Elementar-Mathematik in der zweiten Abtheilung des ersten philosophischen Jahrganges an der k. k. Wiener Hochschule, und im April 1838 wurde er zum Professor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute befördert. — In welcher Art er in dieser Stellung seiner Wissenschaft gedient hat, ist keinem Fachmanne fremd, und weiter gedrungen, als das Gebiet des Kaiserstaates einnimmt; ein Verzeichniss seiner im Drucke erschienenen wissenschaftlichen Arbeiten wird schon allein durch den Zeitaufwand, den sie verrathen, Bewunderung abnöthigen. Professor Salomon's Schriften sind:

1) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, in 5 Auflagen; 1. Aufl. 1821. — 5. Aufl. 1852.
2) Lehrbuch der Elementar-Geometrie, in 3 Auflagen; 1. Aufl. 1822. — 3. Aufl. 1847.
3) Metrologische Tafeln über Masse, Gewichte und Münzen verschiedener Staaten. 1823.
4) Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie in 3 Auflagen. 1. Aufl. 1824. — 3. Aufl. 1856.
5) Sammlung von Formeln, Beispielen und Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra in 4 Auflagen. 1. Aufl. 1825. — 4. Aufl. 1853.
6) Logarithmisch-trigonometrische Tafeln in deutscher und französischer Ausgabe. 1827.
7) L. Euler's vollständige Anleitung zur Integralrechnung in deutscher Uebersetzung zu 4 Bänden; I. Bd. 1828, II. Bd. 1829, III. und IV. Bd. 1830.
8) Sammlung geometrischer Aufgaben und Lehrsätze aus der Planimetrie. 1832.
9) Ueber Lebensversicherungs-Anstalten überhaupt etc. in 2 Auflagen; 1. Aufl. 1839. — 2. Aufl. 1840.
10) Sammlung von Formeln, Aufgaben und Beispielen aus der Goniometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie. 1843.
11) Grundriss der höheren Analysis. 1844.
12) Die österreichischen Staatspapiere und insbesondere die Staats-Lotterie-Anlehen. 1846.
13) Die Kegelschnittslinien oder Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. 1851.
14) Lehrbuch der Elementar-Mathematik für Ober-Realschulen, I. Bd. Algebra. 1853. II. Bd. Geometrie. 1854.

15) **Eine inhaltsreiche Reihe von Aufsätzen aus verschiedenen Wissenschaften in dem Kalender „Austria“ vom Jahre 1839—1856 und anderen Orten enthalten.**

Was er als Lehrer geleistet, davon zeugen seine Schüler, die bis heute zu Tausenden in allen Weltgegenden zerstreut und grössten Theils in solider, angenehmer und für die menschliche Gesellschaft nutzen- und segenbringender Stellung leben, und, ich darf es mit voller Sicherheit behaupten, von welchen Allen er die Thränen dankbarster Erinnerung in sein Grab nahm. — Wenn das k. k. polytechnische Institut in Wien seit seiner Entstehung von Jahr zu Jahr grösseren und wohlthätigeren Einfluss auf die technischen und industriellen Interessen der Monarchie gewann und in Kurzem zur technischen Lehranstalt ersten Ranges in Europa sich erhob und „so seiner Zeit vorauseilte, dass man namentlich in Deutschland kaum noch jetzt zu begreifen anfängt, was es lange vorher bezweckte und ausführte“, so gebührte der Ruhm wohl vor Allem dem grossartigen, seltenen Geiste seines Leiters, und zunächst dem gesammten Lehrkörper, allein der Theil, der davon auf S. entfällt, ist nicht der geringste, und, wenn das k. k. polytechnische Institut „nicht minder auch Pflanzschule zur Ausbildung vieler ausgezeichneter Lehrkräfte wurde, die auf den zahlreichen, später zur Errichtung gelangten verschiedenen technischen Lehranstalten des In- und Auslandes durch Wort und Schrift zur Hebung der technischen Wissenschaften gedeihlich wirkten“, so gebührt wieder nicht der mindere Antheil an diesem rühmlichen Erfolge seiner wohlberechneten, vortrefflichen Methode. — Aber nicht bloss als Gelehrten, der die Wissenschaft ihrer selbst willen hegt und pflegt, und dadurch hebt und namhaft erweitert, nicht bloss als Lehrer, der mit Begeisterung zur Begeisterung hinreisst und der Art Saamen ausstreut, dass im weiten Umkreise und in späten Jahren noch erquickende Saaten aufsprossen werden, sehen wir ihn unermüdlich wirken, — eine neue Folge der Zeit bringt ihm einen neuen Wirkungskreis, dem er nicht mindere Anstrengung weihet, in dem er nicht minder zum Wohle seiner Mitmenschen thätig ist. Das segensreiche Institut der Lebensversicherung, in England bereits zur Blüte gereift, begann nach und nach auch in Deutschland Wurzel zu fassen, und Wien war in den dreissiger Jahren ernstlich beschäftigt, die Monarchie mit der Errichtung eines solchen zu beglücken. Das Jahr 1839 liess in Wien die „allgemeine, wechselseitige Kapitalien- und Renten-Versicherungs-Anstalt“ in's Leben treten; Professor S. übernahm neben seinem Lehramte daselbst die Stelle des General-Sekretärs, nachdem er früher schon die Riesenarbeit der Berechnung der nöthigen Tabellen dieses Institutes voll-

brachte, — nachdem er manchen heissen Kampf gekämpft und endlich mit anerkennungswerthester Aufopferung der vortheilhaftesten Verhältnisse, die ihm und seiner bereits zahlreichen Familie die sorgenfreieste Zukunft geboten haben, den zum allgemeinen Wohle von ihm so sehnlich gewünschten Sieg davon trug, dass das Institut keiner Actiengesellschaft anheim fiel, sondern das auf echte Philantropie basirte und für die Mitglieder vortheilhafteste Princip der Gegenseitigkeit zur Grundlage seines Bestehens bekam. Dieser Anstalt lebte S. bis zu seinem Tode mit der Hingebung eines Menschenfreundes, der in den Dankesthränen von Wittwen und Waisen stets nur neue Kraft für immer neue Mühen fand. Es war eine natürliche und nächste Folge, dass er als eigentlicher Organisator dieses Institutes und in Folge seines wissenschaftlichen Rufes, den er erlangte, bald vielseitig in ähnlicher Beziehung zu Rathe gezogen wurde, und wir finden ihn dadurch bei der Organisation mehrer neuen und Reorganisation von älteren ähnlichen Humanitätsanstalten thätig mitwirkend; sein Scharfsinn, seine gründliche, umfassende Sachkenntniss, seine Wahrheits- und Gerechtigkeitsliebe errichteten ihm dabei manches unvergängliche Denkmal. — Ungeachtet dieser ausgebreiteten Nebenbeschäftigungen, die ihre Anziehungsgewalt durch ihre letzte unerlässliche Begründung in der Wissenschaft und ihre unbeschreiblich wohlthätigen Folgen ausübten, überliefert der Welt seine Feder Jahr um Jahr ein anderes wissenschaftliches Werk; nur wenige Zeit seines Lebens war ihm zur Erholung gegönnt, noch weniger benutzte er dazu; — eine im J. 1847 unternommene Rundreise durch Steiermark und Italien, mit einem längeren Aufenthalte in Rohitsch und Venedig, so wie eine darauffolgende grössere Reise nach Deutschland, waren allein namhafterer Art, um seine vielseitig und rastlos angestrengten Kräfte zu stärken und zu erfrischen, und dienten zu seiner Freude, um manchen nachhaltigen Bund mit dem einen oder anderen Gelehrten zu knüpfen, wie sie einander bisher bloss aus „ihren Werken“ gekannt hatten. — Erst im J. 1848, und zwar durch eine unliebsame Veranlassung von Aussen sich gedrungen fühlend, zog der bescheidene anspruchslose Mann sein 30 Jahre lang verschwiegenes, unbenutztes Diplom der philosophischen Doctor-Würde an den Tag; — in kurzer Zeit darnach wurde er seiner vielen Verdienste um die Wissenschaft wegen mit Nachsicht aller Taxen zum wirklichen Mitgliede des Doctoren-Collegiums der k. k. Wiener-Universität ernannt, — die kaiserliche Akademie der Wissenschaften sandte ihm ihre Ernennung zum correspondirenden Mitgliede derselben zu; — das hohe k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht ernannte ihn zum Mitgliede der hohen Prüfungs-

Commission über Lehramtskandidaten für Ober-Realschulen. — So ehrenvoll diese von ihm keineswegs gesuchten Auszeichnungen für ihn waren, so erspriesslich die Wahl für die beabsichtigten Zwecke gewesen ist, für Salomon waren sie gewiss nicht das Vortheilhafteste. — Das Uebermaass von Kraftaufwand, die übermässige Anstrengung, die seine in Arbeit und Mühe vorgerückten Jahre im Ganzen zu überwinden hatten, der Schmerz über durch den Tod entrissene Familienglieder, waren Umstände, die sein gewaltiger Geist wohl noch Jahre hindurch ohne merklichen Einfluss auf sein körperliches Wohlbefinden überwältigte, allein in ihnen mag der Grund zu suchen sein, der bis jetzt in Schlummer gelegene Krankheitskeime endlich zum Ausbruche brachte.

Der April d. J. liess S. in ein Unwohlsein verfallen, dessen Symptome alsogleich die grösste Besorgniss erregen mussten; — — am 2. Juli war es die zehnte Morgenstunde, die seine Seele in's bessere Jenseits trug!

Wirft man noch einen Blick auf seinen Charakter als Mensch, als Patriot, als Gatte und Vater, so kann man ihn nicht minder eine seltene Erscheinung nennen, welche die innigste Hochachtung abzwingt und die um so lauter zu zollen Pflicht ist, je weniger Beispiele solcher Art die Zeit aufzuweisen anfängt. Uneigennützkeit, die oft bis zur Selbstaufopferung ging, echtes wahres Humanitätsgefühl, ein strenger, unerschütterlicher Gerechtigkeitssinn nach allen Seiten hin kennzeichneten jede seiner Handlungen, die eine Bescheidenheit und Anspruchslosigkeit begleiteten, wie nur wahrer innerer Grösse eigen ist; — seine Vaterlandsliebe und Ergebenheit für das Kaiserhaus bewährte sich in den Zeiten der Noth trotz dem Schwanken und Irren der Tage und der Umgebung, und gaben den überzeugendsten Beweis, dass es Worte seines Herzens waren, wenn er dem Freunde in traulicher Stunde erzählte, wie seine Liebe zu Oesterreichs Herrscherhaus und dessen Tugenden es auch vornehmlich war, die ihn nach Oesterreich führte, ohngeachtet ein neues Anstellungs-Decret ihn zum Bleiben bestimmen wollte. — Seine tiefe Religiösität, die ihn stets mit inniger Ehrfurcht den Namen des Urhebers aller Dinge nennen liess, war ein greller Gegensatz zu manchem geistlosen Freigeiste, der im Wahne, wahre Wissenschaft zu betreiben, das Höchste und Heiligste der menschlichen Seele, den Glauben an Gott und Unsterblichkeit zu erschüttern sucht. — Ein solcher in aller Hinsicht grosser Charakter konnte als Lehrer auch wieder Charakter bilden, und bleibende männliche Gesinnung und Haltung waren Eigenschaften, welche seine Einwirkung auf jedes bessere, empfängliche jugendliche Gemüt seiner Leitung zur Folge

haben musste. — Nach diesen Grundzügen seines inneren Wesens darf es nicht befremden, dass man S. auch als Familienvater als liebevollsten, besten, hingebendsten nennen muss; — er hatte frühe geheurathet, und bald umrang eine Schaar blühender Kinder seinen häuslichen Heerd; vier derselben gingen ihm voran —, vier und seine trauernde Lebensgefährtin beweinen seinen Tod. —

„Sie haben einen braven Mann begraben, — mir aber, mir war er mehr!" — Er ruhe sanft, in Frieden!

Geschichte der Mathematik und Physik.

Almanach der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Sechster Jahrgang. 1856. Wien. 8.

Wir haben schon früher (m. s. Literar. Ber. Nr. XCVII.) auf die Wichtigkeit und den interessanten Inhalt dieses regelmässig erscheinenden Almanachs einer der ersten und bedeutendsten Akademien der Wissenschaften, die, ungeachtet ihres kurzen Bestehens, schon eine grosse Zahl höchst wichtiger und mannigfaltiger literarischer Arbeiten geliefert, und darin schon manche der älteren Akademien überflügelt hat, hingewiesen. Auch dieser Jahrgang enthält wieder vieles Interessante und Wichtige. Ausser dem höchst interessanten Bericht des General-Sekretairs der Akademie, Professors Dr. Schrötter, über die Wirksamkeit der Akademie, der wieder ein sehr anziehendes Bild von der ungemein grossen Thätigkeit dieser berühmten gelehrten Körperschaft liefert, enthält dieser Jahrgang des Almanachs einen sehr interessanten Vortrag des Präsidenten der Akademie, Herrn Freiherrn v. Baumgartner, über „die Macht der Arbeit", eben so wie der vorhergehende Jahrgang die so ungemein anziehende und lehrreiche, im Archiv Thl. XXV. S. 57. mitgetheilte Rede dieses berühmten Gelehrten über: „den Zufall in den Naturwissenschaften" enthielt. Diese populären Vorträge des Herrn Freiherrn v. Baumgartner erinnern uns jederzeit lebhaft an Arago's berühmte Arbeiten dieser Art und stehen denselben in Rücksicht auf wahre Popularität, Reichthum an interessanten Thatsachen und eine Fülle lehrreicher Bemerkungen aller Art keineswegs nach, sondern übertreffen dieselben nach unserer Meinung noch in manchen Beziehungen, indem sie uns namentlich noch mehr als diese den Beweis zu liefern scheinen, dass sich mit einem wahrhaft populären Vortrage doch auch Schärfe der Begriffe und wissenschaftliche Strenge sehr wohl vereinigen lassen. Wir hoffen den auch in physikalischer und mechanischer Rücksicht

mehrfach interessanten Vortrag über „die Macht der Arbeit" den Lesern des Archivs wieder in einem der nächstfolgenden Hefte mittheilen zu können, wozu wir, wenn wir auch nicht selbst von der Vortrefflichkeit dieses Vortrags so sehr überzeugt wären, schon darin Veranlassung finden würden, weil uns zu unserer grössten Freude für die Mittheilung des Vortrags „über den Zufall in den Naturwissenschaften" von so vielen Seiten her der wärmste Dank gesagt worden ist, selbst von hochgestellten Männern, die sich nicht Mathematiker oder Physiker nennen. Auch der: „Gold, Kupfer, Eisen" überschriebene Vortrag des Herrn Akademikers Zippe ist sehr lesenswerth und verdient den Lesern des Archivs empfohlen zu werden. Ausserdem enthält dieser Jahrgang des Almanachs noch das Leben Prechtl's (schon mitgetheilt im Archiv Thl. XXVI. S. 391.) und biographische Notizen über Paul Heinrich Fuss (S. 119.) und Gauss (S. 123.)

Vermischte Schriften.

Annali di scienze matematiche e fisiche, compilati da Barnaba Tortolini. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CV. S. 11.)

Maggio 1856. Sulla direzioni degli aerostati. Memoria di Carlo Gabussi (Continuazione e fine). p. 161. — Notizia sulle più recenti scoperte fatte intorno agli anelli di Saturno. Nota del P. A. Sechi. p. 194.

Giugno 1856. Notizia sulle più recenti scoperte fatte intorno agli anelli di Saturno. Nota del P. A. Secchi (Continuazione e fine) p. 209. — Sopra una formola di trasformazione per le serie doppiamente infinite. Nota di F. Brioschi. p. 214. — Discorso de Sig. Agostino Cauchy, in occasione de funerali de Sig. Binet. p. 220. — Sulla risultante di un numero qualunque d'equazioni algebriche. Teorema generale di F. Faà di Bruno. p. 222. — Intorno la integrazione delle funzioni irrazionali. Nota di F. Casorati. p. 223. — Ricerche algebriche sulle forme Binarie. Memoria di F. Brioschi. p. 231.

Luglio 1856. Ricerche algebriche sulle forme Binarie. Memoria di F. Brioschi (Continuazione e fine). p. 241. — Calcul des expressions générales, qui donnent la valeur des divers éléments de l'ellipse et de l'hyperbole. Par Georges Dostor. p. 249. —

Calcul des expressions générales, qui donnent la valeur des divers éléments de la parabole. Par Georges Dostor. p. 269.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Literar. Ber. Nr. CII. S. 15.)

Jahrgang 1855. Band XVIII. Heft 1. S. 87. Fritsch: Ueber die Vorausbestimmung der Lufttemperatur aus dem Verhalten des Barometers. — S. 110. Haidinger: Ein optisch-mineralogischer Aufschraube-Goniometer. — S. 143. Knochenhauer: Ueber die gemeinsame Wirkung zweier electrischer Ströme.

Jahrgang 1855. Band XVIII. Heft 2. S. 274. Zenger: Ueber die Anwendung von Multiplicatoren als Mess-Instrumente continuirlicher Ströme in einer abgeänderten Construction. — S. 311. Seidl: Ableitung der Cassinoide aus dem Schnitte eines Rotationskörpers. — S. 365. Zantedeschi: Serie di memorie risguardanti la statica e la dinamica fisico-chemica molecolare; dei S^t. Professore Zantedeschi e D^r. Ingegnere Luigi Borlinetto, assistente alla Cattedra di Fisica nell' J. R. Università di Padova. — S. 369. A. v. Ettingshausen: Ueber die neueren Formeln für das an einfach brechenden Medien reflectirte und gebrochene Licht. (Sehr zu beachtende Abhandlung.)

Jahrgang 1856. Band XIX. Heft 1. S. 1. Grunert: Neue näherungsweise Auflösung der Kepler'schen Aufgabe. — S. 195. Hirsch: Vorausberechnung der totalen Sonnenfinsterniss am 18. Juli 1860. — S. 226. Grailich: Brechung und Reflexion des Lichtes an Zwillingsflächen optisch-einaxiger Krystalle.

Jahrgang 1856. Band XIX. Hft. 2. S. 237. Zantedeschi: Del Densiscopio differentiale di alcuni liquidi. — S. 374. Böhm: Ueber Gaslampen und Gasöfen zum Gebrauche in chemischen Laboratorien.

Jahrgang 1856. Band XX. Heft 1. S. 167. Fialkowski: Bestimmung der Axen bei den Ellipsen. — S. 225. Müller: Ueber diejenigen Kugeln, welche die Kanten eines beliebigen Tetraeders berühren. — Littrow: Ueber lichte Fäden im dunklen Felde bei Meridian-Instrumenten.

Nova Acta Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae Vol. I. Upsaliae. 1855. 4.

In diesem neuesten Bande der Schriften der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Upsala, mit welchem

diese berühmte gelehrte Körperschaft eine neue Reihe der kostbaren Sammlung ihrer Schriften beginnt, befinden sich die folgenden trefflichen und wichtigen mathematischen und physikalischen Abhandlungen, auf die wir unsere Leser ganz besonders aufmerksam zu machen nicht verfehlen:

I. Sur les conditions d'intégrabilité de l'équation différentiel du second ordre

$$\varphi_2(x)+\varphi_2(x)\frac{\partial y}{\partial x}+\varphi(x)=0,$$

$\varphi_n(x)$ désignant une fonction entière de x du degré n, par **Ad. Ferd. Svanberg.** pag. 1. (Sehr beachtenswerthe Abhandl.)

III. De functione quadam transcendente. Auctore **Chr. Freder. Lindmann,** Lectore Stregnesensi. pag. 137.

(Die Function, mit welcher sich diese schöne Abhandlung beschäftigt, ist:

$$H(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot axdx.)$$

IV. **Mémoire sur la temperature de la terre, à différentes** profondeurs à Upsal, par **Andr. J. Ångström.** pag. 147.

(Diese wichtige Abhandlung ist schon im Literar. Ber. Nr. LXXVI. S. 958. angezeigt worden.)

VII. Sur l'intégration des équations différentielles du second ordre, par **Ad. Ferd. Svanberg.** p. 261.

(Die Differentialgleichungen, mit deren Integration sich der Herr Vf. in dieser ausgezeichneten Abhandlung beschäftigt, sind unter der allgemeinen Form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f\left(\frac{y}{x^2},\ \frac{\partial y}{x\partial x}\right),$$

wo f eine beliebige Function bezeichnet, enthalten.)

Literarischer Bericht

CVII.

Wilhelm Gotthelf Lohrmann,

Director der Königlich Sächsischen Cameral-Vermessung,

geboren am 31. Januar 1796 }
gestorben am 20. Februar 1840 } zu Dresden.

(Dem Archiv gütigst mitgetheilt von Herrn Director v. Littrow in Wien, nach ihm von Herrn J. W. Glier in Dresden gemachten schriftlichen Mittheilungen. Herrn v. Littrow dafür unsern verbindlichsten Dank. G.)

Lohrmann's Vater, der Bürger und Ziegelmeister Wilhelm Gotthelf Lohrmann, war ein sehr achtbarer und in seinem Geschäfte erfahrener Mann, welcher für die Erziehung seines Sohnes nach besten Kräften wirkte, um ihn einst zu einem tüchtigen und dem Staate nützlichen Manne heranzubilden; seine Mutter Sophie, geb. Michaelis, suchte schon früh in ihm strenge Religiosität und einen kindlich frommen Sinn zu wecken. Von 1802 an besuchte Lohrmann die damals in vorzüglichem Rufe stehende Garnisonschule; unter Leitung ihres würdigen Rectors, des Cantors Pfeilschmidt, genoss er vortrefflichen Unterricht und erwarb sich sehr bald die höchste Zufriedenheit seiner Lehrer; geistig und körperlich reich verliess er im Jahre 1810 diese Schule und ward im März dieses Jahres in der Kreuzkirche confirmirt. Von 1811 an besuchte Lohrmann seinen und seines Vaters Wünschen gemäss die Bauschule zu Dresden; ein ausserordentliches mathematisches Talent, das sich schon früher in dem Knaben offenbarte, entwickelte sich hier noch mehr, und wie er in der Schule ein vorzüglicher Schüler gewesen, so zeigte sich auch hier sein ausserordentlicher Fleiss und erwarb ihm auch

hier, wo er bis 1814 mit regem Eifer für seine Zukunft wirkte, die höchste Zufriedenheit seines Lehrers, des Hofbaumeisters Professor Hölzer, und die besondere Zuneigung des Akademie-Directors, des berühmten Professors Seydelmann.

Lohrmann's brave Leistungen erregten bald Aufmerksamkeit, und ihnen verdankte er, dass er schon 1815 eine Anstellung als Landmesser erhielt und ihm vom Ministerio des Innern der Auftrag ward, sein Vaterland zu bereisen und den Plan zu einer Landesvermessung zu entwerfen, wobei sowohl sein Ruf immer mehr wuchs, als sich auch seine Gesundheit durch Gewöhnung an Strapazen kräftigte. — Das Jahr 1817 war für Lohrmann von besonderer Wichtigkeit, denn am 1. April ward er als Conducteur bei der Landesvermessung angestellt; wie aber das Glück dem Menschen nie ungetrübt wird, so auch hier; am 24. December dieses Jahres verlor er durch den Tod auch seinen Vater, dem die Mutter schon früher vorangegangen war. Anstrengende Berufsarbeiten liessen Lohrmann sehr wenig Mussestunden, in diesen beschäftigte er sich mit dem Studium der Astronomie und namentlich mit der topographischen Darstellung der sichtbaren Mondoberfläche; diese letztgenannte, im höchsten Grade mühsame, bis jetzt unübertroffene Arbeit unternahm er im Jahre 1821 hauptsächlich nach einer ihm von Encke mitgetheilten Methode, und vollendete sämmtliche Zeichnungen in einem Zeitraume von fünfzehn Jahren. Mit der Redaction des erläuternden Textes, an dessen Bearbeitung Lohrmann durch dringende Berufsgeschäfte verhindert ward, ist gegenwärtig für die Barth'sche Verlagshandlung in Leipzig Herr Julius Schmidt beschäftigt, und kann man demnach das völlige Erscheinen dieses wichtigen Werkes, dessen Publikation schon Lohrmann begann und das sich selbst neben Mädler's trefflicher Selenographie behauptet, in nächster Zukunft erwarten. Zwei kleine Schriften: „Das Planetensystem der Sonne; Dresden in der Rittner'schen Kunsthandl. 1822" und „Beschreibung des mathematischen Salons; Dresden bei Arnold" haben Lohrmann ebenfalls zum Verfasser. Am 3. Juli 1822 unternahm er eine Reise durch Deutschland und die Schweiz, von welcher er am 4. September zurückkehrte. Am 14. Februar 1823 ward Lohrmann zum Vermessungs-Inspector befördert.

Am 28. Januar 1827 sah Lohrmann wiederum sein sonst so ungestörtes häusliches Leben durch den Tod seiner Gattin, mit welcher er sich im Jahre 1819 verheirathet hatte, die ihm acht Jahre lang liebend zur Seite gestanden und eine sorgende Mutter ihrer Kinder gewesen war, deren sie ihm während einer

glücklichen Ehe sechs geschenkt hatte, getrübt; so hart ihn dieser Schlag traf, übte er doch keine nachtheiligen Folgen auf sein Berufsleben, und als Beweis der hohen Zufriedenheit, die ihm seine Leistungen fortwährend erwarben, ward er am 28. November desselben Jahres zum Ober-Inspector des mathematischen Salons ernannt. — Im folgenden Jahre übernahm er die ehrenvolle Stelle als Vorsteher der technischen Bildungsanstalt und verheirathete sich wieder am 17. Februar mit der zweiten Tochter des verstorbenen Generalstabs-Medicus Dr. Raschig. Nach 5 Jahren, welche er in seiner vielfachen Berufsthätigkeit in allgemeiner Anerkennung zubrachte, trat er auch öffentlich mit mündlichem Vortrage vor ein gebildetes und aus den höheren Ständen bestehendes Publikum, indem er am 9. März 1833 seine Vorlesungen über Astronomie eröffnete.

Aus seinem ruhigen, durch keine Störung bis jetzt unterbrochenen Amtsleben rief ihn 1836 eine an ihn ergangene Aufforderung nach England zu reisen, um daselbst die vorzüglichsten Eisenbahnen zu besuchen, die ausgeführten oder in Ausführung begriffenen derartigen Bauwerke in Augenschein zu nehmen und die Erfahrungen, die man bei Eisenbahnbauten in England gemacht hat, so wie die Grundsätze kennen zu lernen, die man bei dergleichen Unternehmungen zu befolgen sich veranlasst findet. Er unternahm diese Reise mit dem Kaufmann Wieck aus Harthau bei Chemnitz und erhielt durch gute Empfehlungen Eintritt in die Institution of the Civil Engineers in London, so wie auch bei dem berühmten Mechaniker Robert in Manchester. Auch bei den vielfältigen Versuchen unserer Zeit, Eisenbahnen zu bilden, wussten die Vorsteher solcher Vereine die gründlichen Kenntnisse und den erfindungsreichen Geist Lohrmann's gar wohl zu würdigen, indem sie bei der Errichtung der Leipzig-Dresdener Eisenbahn ihn zu Rathe zu ziehen nicht versäumten und ihn im Jahre 1838 mit der Leitung der Anlage einer solchen Bahn in die Oberlausitz und das Erzgebirge beehrten. Im Jahre 1836 hatte er seine Arbeit über den Mond beendigt und liess nun eine Uebersichtskarte in kleinerem Maassstabe erscheinen, nachdem Mädler ihn mit der Herausgabe einer vollständigen Topographie unseres Satelliten völlig überholt hatte.

Nachdem er schon längere Zeit schätzbare Beiträge zu den Mittheilungen des statistischen Vereins geliefert hatte, übernahm er nach des verdienten Directors und Kammerraths von Schlieben Tode die Herausgabe der beiden letzten Lieferungen erwähnten Werkes. Am 17. Januar 1840 ward ihm ein neuer Beweis des vollsten Zutrauens und der grössten Zufriedenheit seiner Be-

bürden zu Theil, indem man ihn zum Director der Cameral-Vermessung ernannte. Nach dem Rathschlusse des Himmels sollte dies der letzte und höchste Punkt seiner irdischen Laufbahn sein; wenig Tage nach dem Antritt seines 44sten Lebensjahres ward er den 11. Februar von dem damals in Dresden heftig wüthenden Nervenfieber befallen, und kaum 1 Monat nach Antritt seiner neuen Stellung unterlag er am 20. Februar 1840 der furchtbaren Krankheit. Fünf Kinder und eine trauernde Gattin verloren in ihm einen sorgenden, liebevollen Vater und treuen Gatten; unzählige Mittellose und Arme einen Helfer und Wohlthäter; fünf Kinder waren ihm bereits vorausgegangen in die Ewigkeit, und noch wenige Monate vor seinem Tode betrauerte er den Verlust eines Sohnes; in der Fülle seiner Gesundheit ahnte er nicht, dass er so bald wieder mit ihm vereint sein würde. Am 23. Februar, Nachmittags 3 Uhr, ward seine sterbliche Hülle unter Begleitung sämmtlicher Verwandten und Freunde und einer grossen Zahl seiner Verehrer, so wie auch sämmtlicher Schüler und Lehrer der polytechnischen neuen Anstalt auf dem Eliaskirchhofe bei Dresden dem Staube zurückgegeben. Ein schmuckloser Stein deckt seine irdischen Ueberreste. — „Sanft ruhe hier was sterblich in ihm war, der uns auf so manchem ernsten Berufswege als Führer voranging; als ein Vermächtniss von ihm bleibe uns sein Berufseifer.“ — Dies sind die letzten an ihn gerichteten Worte seines langjährigen Freundes und Amtsgenossen Professor Dr. Löwe. — Körperlich war Lohrmann ein grosser, wohlgebauter Mann von frischem Aussehen; sein freundliches, bescheidenes und oft kindliches Betragen zog Jedermann an. Dem Vernehmen nach wird der „Topographie der Mondoberfläche“, von welcher wir nur die 1. Abtheilung, beiläufig ein Fünftheil des Ganzen, noch von Lohrmann selbst erhielten, sein wohlgetroffenes Bildniss beigegeben werden.

Johann Friedrich Pfaff in seinem Verhältnisse zu Gauss bei des letzteren Aufenthalte in Helmstädt.

In der ohnlängst mir zu Händen gekommenen Schrift: „Gauss von W. v. Sartorius“ finden sich einige Erklärungen, worin der Verfasser jener Schrift das Verhältniss meines verewigten Vaters Johann Friedrich Pfaff zu Carl Friedrich Gauss auf eine von meiner Auffassung dieses Verhältnisses, wie ich in meiner Biographie Joh. Friedr. Pfaff's sie gegeben habe, in wesentlichen Punkten sehr abweichende Weise darstellt.

Herr v. Sartorius weigert sich nicht, die historischen Umstände, worauf es dabei ankommt, vollständig als wahr anzuerkennen. Er räumt ein

1) dass Gauss, nachdem er seine Universitätsstudien in Göttingen beendigt hatte, nach Helmstädt ging, um dort einen Aufenthalt zu machen;

2) dass Gauss während dieses Aufenthalts in Helmstädt in Pfaff's Hause gewohnt hat;

3) dass Gauss von der Facultät in Helmstädt seine Promotion nachgesucht und erhalten hat;

4) dass Gauss's Inaugural-Dissertation in Helmstädt gedruckt ist.

Während aber S. diese thatsächlich feststehenden Punkte einräumt, sucht er das geistige, literarische Verhältniss, wie es diesen Schritten, welche Gauss in seiner Lebensstellung damals that, entsprechend wäre, zu leugnen oder doch dieses Verhältniss auf eine dasselbe herabsetzende Weise darzustellen.

Herr v. Sartorius sträubt sich hauptsächlich dagegen, das Verhältniss Pfaff's zu Gauss als das eines Lehrers zu seinem Schüler anzuerkennen: er bemüht sich, dasselbe, als ob er in Gauss's Namen zu sprechen habe, von diesem abzuwälzen. Wesentlich ist jedoch hierbei, dass S. insofern keine Opposition macht gegen meine Auffassung und Darstellung des erwähnten Verhältnisses, als er nicht einen andern ausgezeichneten Mathematiker aus jener Zeit als eigentlichen und hauptsächlichen Lehrer des verstorbenen Gauss substituirt, sondern das, worauf es ankommt, vollständig zugiebt.

Als Beweis seiner dessen ohngeachtet abweichenden Ansicht sucht Herr v. Sartorius besonders hervorzuheben die Originalität der Entdeckungen und neuen Untersuchungen, mit welchen Gauss die Wissenschaft fortwährend erweitert habe: und dass Gauss damals schon, als er nach Helmstädt kam, eigenthümliche Forschungen unternommen habe. Daraus aber, dass Gauss nach Beendigung seiner academischen Studien in Göttingen, nachdem er eine Zeit lang in Braunschweig wieder sich aufgehalten hatte, diesen seinen Wohnort verliess und nochmals eine Universität zu besuchen für gut fand, daraus wird es doch glaublich, dass Gauss damals ein Bedürfniss in sich spürte, noch mit einem hervorragenden, genialen Mathematiker sich in Verkehr zu setzen: und dass er dazu anstatt Göttingen Helmstädt wählte, dies beweist doch wohl, dass er zu Pfaff's Persönlichkeit und zu des-

ven Behandlung der Wissenschaft ein entschiedenes Zutrauen hegte. Wäre dies nicht der Fall gewesen, so würde Gauss wohl in Braunschweig geblieben oder nochmals nach Göttingen oder nach Halle oder auf eine andere Universität sich begeben haben. Pfaff war damals, nachdem sein „Versuch einer neuen Summationsmethode" im Jahre 1788 erschienen war, Verfasser der im Jahre 1797 bekannt gemachten Disquisitiones Analyticae, und dass Gauss einige Jahre darauf zu Pfaff nach Helmstädt ging und in dessen Hause wohnte, macht es glaublich und erklärlich, dass er Pfaff in literarischer Hinsicht als sein Muster und Vorbild gern betrachten wollte und dass er kein Bedenken trug, durch die That dies auch anzuerkennen und zu gestehen.

Wenn aber Herr v. Sartorius S. 18. seiner Schrift so weit geht, in Hinsicht der Zeit, wo Gauss im Jahre 1799 in Helmstädt in Pfaff's Hause wohnte, zu behaupten: „Dann pflegten sie — — — sich über mathematische Gegenstände ausführlich zu unterhalten; bei solchen gegenseitigen Gedankenaustausch glaubt jedoch Gauss mehr gegeben als empfangen zu haben", so muss bei einer näheren Betrachtung der thatsächlichen Umstände, welche bei der Gestaltung des äusseren, sowie des geistigen Verhältnisses beider Gelehrten obgewaltet haben, jedem Unbefangenen es einleuchtend werden, dass die gedachte Andeutung des Herrn v. S. jedenfalls eine übelwollende Uebertreibung enthält und nur aus einer von ihm unrichtig aufgefassten Aeusserung des verstorbenen Gauss erklärlich wird.

Wir aber unsererseits finden uns nicht ohne grosses und schmerzliches Bedauern genöthigt, als unsere Ueberzeugung es zu behaupten, dass diese erwähnte Aeusserung des Herrn v. Sartorius auf eine unwürdige Weise den Werth Pfaff's als Mathematiker überhaupt und insbesondere in seinem Verhältniss zu Gauss herabzusetzen sucht.

Wenn auch zugegeben werden muss, dass Gauss's mathematische Entdeckungen originell und ein Product seines mathematischen Talentes sind, so folgt daraus keineswegs, dass Pfaff nicht als sein Lehrer zu betrachten sei, dass Gauss nicht des um zwölf Jahre älteren Pfaff's Nähe aufgesucht habe, um durch ihn eine höhere wissenschaftliche Anregung zu empfangen, durch ihn über sich selbst, über das Maass seiner Fähigkeiten, seines Wissens und seiner Leistungen in's Klare zu kommen.

Inwiefern jedoch in der Richtung im Ganzen, in welcher Gauss's Forschungen und Entdeckungen sich bewegt haben, insbesondere in der stillschweigenden Opposition gegen manche von ihm wohl für verkehrt gehaltene Tendenzen in dem literarischen

Treiben seiner Zeit ein Einfluss der damals emporblühenden Französischen analytischen Schule zu finden sei, inwiefern aber Pfaff in der damaligen Zeit unter den Mathematikern in Deutschland jene Französische analytische Schule repräsentirte und, nach A. G. Kästner's doch im Ganzen noch mehr elementarischer Behandlung der mathematischen Wissenschaften, zu seiner Zeit als der erste in Deutschland mit der neuen Behandlung mathematischer Untersuchungen hervortrat und durch die Art, wie er mit seinen eigenthümlichen Untersuchungen und mit seinen neuen Entdeckungen auf eine ruhmwürdige Weise unter den Deutschen als der erste seiner Zeit die neue Bahn betrat, sein mathematisches Genie beurkundete, dies werden einsichtsvolle Mathematiker der geschichtlichen Wahrheit gemäss entscheiden und darüber Zeugniss geben. Es werden unparteiische Mathematiker darüber urtheilen, inwiefern, den hier erläuterten historischen Thatsachen gemäss, Gauss nicht nur als in Pfaff's Schule zur Reife gediehen, sondern auch als aus der damals in Deutschland durch Pfaff repräsentirten analytischen Schule hervorgegangen zu betrachten sei.

Wenn wir auch einräumen, dass Gauss's mathematische Entdeckungen durchaus originell und selbständig sind, so folgt doch daraus nicht, dass er nicht einen Lehrer gehabt habe, durch dessen Unterricht er die Kenntniss der bis dahin aufgefundenen mathematischen Lehrsätze und Methoden erlangt habe, durch dessen Einwirkung er den Zustand der Wissenschaft, die Richtung, in welcher die neuere Mathematik ihre Forschritte machte, die Stufe der Entwickelung, auf welcher die mathematische Productivität sich bewegte, kennen zu lernen gesucht habe. Wenn wir auch zugeben, dass Gauss aus seinem eigenen mathematischen Genie, aus seiner aus sich selbst schaffenden Ursprünglichkeit seine wissenschaftlichen Leistungen hervorgebracht habe, so folgt doch daraus nicht, dass er nicht einen Lehrer gehabt habe, von dem er den Beweis des Pythagorischen Lehrsatzes gelernt habe, dass er nicht einen Lehrer gehabt habe, von dem er die Deduction der Formel, dass $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, gelernt habe. Und so folgt auch aus Gauss's Originalität nicht, dass er nicht einen Lehrer zu finden gewünscht und gesucht habe, durch dessen wissenschaftlichen Umgang und Unterricht er auf die Höhe gelehrter Forschungen, welche die Wissenschaft zu seiner Zeit erreicht hatte, hingeführt würde, durch dessen wohlwollend eingehendes Urtheil über ihn selbst, durch dessen Gedankenmittheilung er das Maass der Kräfte, welches die Natur in seine, des Schülers, geistige Fähigkeiten gelegt habe, zu prüfen und kennen zu lernen in den Stand gesetzt würde. Und dass für Gauss, indem er Kästner's academische Vorlesungen als Student gehört,

hatte; ein solcher Lehrer Pfaff war und vermöge seiner geistigen Eigenthümlichkeit vor andern zu sein befähigt war, das ist unter den Mathematikern eine historisch beglaubigte bekannte Thatsache. Dass aber Herr v. Sartorius diese Thatsache leugnet, indem er absichtlich die Punkte, worauf es dabei ankommt, auf eine verdrehte Weise darstellt, ist unverkennbar aus Eitelkeit und Anmaassung hervorgegangen.

Ein Beweis von Pfaff's grossartiger Humanität ist es jedenfalls, dass er Gauss, nachdem dieser, obschon er Braunschweigischer Landes-Eingeborener war, im J. 1798 in Göttingen, also auf einer fremden Universität, seine academischen Studien beendigt hatte, auf eine wohlwollende Weise bei sich und in seinem Hause aufnahm, dass er ihm dazu behülflich war, als absens (was eigentlich gegen die strenge academische Observanz war) im darauf folgenden Jahr 1799 seine Promotion glücklich durchzuführen. Es ist wohl zu vermuthen, dass Kästner oder auch andere Göttingische Gelehrte sich nicht bereit gezeigt haben würden, zu ihnen als den Lehrern ein Verhältniss anzunehmen, bei welchem der Schüler glauben würde mehr zu geben als zu empfangen, dass sie einen Schüler, welcher solches Verhältniss würde geltend zu machen suchen, wohl nicht neben sich geduldet haben würden. Wie hätte auch für den Lehrer ein Verhältniss befriedigend sein können, wenn dieser hätte denken können, dass der Schüler, seine Vaterstadt und seinen bisherigen Wohnort verlassend, auch die von ihm bisher frequentirte Universität umgehend, den neuen Lehrer aufsucht, in dem Bewusstsein, einer höheren wissenschaftlichen Anregung zu bedürfen sich ihm zuwendet, dann aber doch glaubt, in diesem Verhältniss zu dem Lehrer mehr gegeben als empfangen zu haben und in solcher Einbildung sich befugt glaubt, dem Lehrer es abzustreiten, dass er (der Schüler) jemals seiner bedurft, dass er jemals seine Lehre verlangt, dass der Lehrer jemals sein Lehrer gewesen sei.

Wenn nun aber Sartorius S. 18. seiner Schrift geradezu sagt, Gauss sei nach Helmstädt gekommen, nicht um dort zu studieren, sondern um die dortige Bibliothek zu benutzen, so sieht dies (nach dem, was wir hier schon erörtert haben) einer unwahren Entschuldigung doch gar zu ähnlich. Der wesentliche Punkt aber, auf den es dabei ankommt, welches nehmlich die Motive gewesen seien, wodurch Gauss bestimmt wurde, nicht nach Göttingen oder nach Wolfenbüttel (was doch, besonders in Hinsicht der dasigen Bibliothek, welche damals, wie jetzt weit bedeutender, reichhaltiger und berühmter war als die Helmstädter Bibliothek, ihm viel näher gelegen hätte) oder nach Halle, sondern gerade nach Helmstädt zu gehen, dieser Punkt wird durch jene

unwahre Entschuldigung durchaus nicht beseitigt. Wunderbar bleibt es, dass Gauss in Helmstädt gerade in Pfaff's Hause wohnen wollte, wenn er nach Helmstädt ging nicht um Pfaff's willen, nicht um in Helmstädt zu studieren, sondern um die dortige (und zwar die Helmstädter und nicht die Wolfenbütteler) Bibliothek zu benutzen.

Um so mehr ist eine Ablehnung eines erwähnten Verhältnisses zwischen beiden Gelehrten von Seiten des Herrn Sartorius zu verwundern und zu bedauern, da Gauss anderweitig die entschiedenste Anerkennung der Höhe zu erkennen gegeben hat, welche Pfaff's neue und eigenthümliche Entdeckungen in der höheren Analysis erreicht haben. S. sagt selbst: „Gauss hat zwar in sehr anerkennender Weise Pfaff's mathematisches Talent und sein gründliches Eingehen in die Wissenschaft verehrt" u. s. w.

Aus den mannichfachen Aeusserungen Theils von Seiten meines verewigten Vaters, Theils von Seiten anderer ausgezeichneter mir nahe stehender Gelehrter, durch welche in meinem Bewusstsein das Verhältniss meines Vaters zu Gauss als das des älteren Freundes und Lehrers sich festgestellt hat, will ich nur Eine Thatsache hier erwähnen, deren ich mich aber mit völliger Sicherheit und Zuverlässigkeit erinnere. In den Tagen, als im April des Jahres 1825 mein Vater mit Tode abgegangen war, kam unter mehreren Universitätslehrern auch der Hochverehrte, selige August Hermann Niemeyer (obschon mit ihm mein Vater zwar in entferntem geselligen Verkehr, nicht aber in nahem freundschaftlichen Umgang gestanden hatte) in das Haus meiner Mutter, um ihr einen Condolenz-Besuch zu machen. Bei diesem Besuch, erinnere ich mich deutlich und bestimmt, dass Niemeyer die Worte sprach: „Gauss war auch sein (d. h. Pfaff's) Schüler." In Halle, in Niemeyer's Nähe als Lehrer am Pädagogium gekommen, würde als dessen Gewährsmann in dieser Hinsicht besonders Mollweide zu erwähnen sein, welcher auch in jener Zeit (zwischen den Jahren 1800 und 1803) in Helmstädt unter Pfaff's Leitung dem Studium der Mathematik sich gewidmet hatte und auf Pfaff's Empfehlung nach Halle an das Pädagogium berufen worden ist. Jedenfalls hat Niemeyer durch Mollweide's Mittheilungen eine Bestätigung der gedachten Notiz über Gauss erhalten, welche er in den erwähnten Worten zu erkennen gab: „Gauss war auch sein (d. i. Pfaff's) Schüler."

Wie ich in der biographischen Einleitung zu der von mir herausgegebenen Briefsammlung meines Vaters angedeutet habe, pflegte Pfaff seit den frühesten Zeiten seiner academischen Wirksamkeit, wie in Halle so auch schon in Helmstädt ausser den eigentlichen Universitäts-Vorlesungen noch besonders privatissima

zu lesen und zwar dieses nur für Einen oder höchstens für zwei der Mathematik vorzugsweise sich widmende Studierende. Dass häufig auch aus entfernten Ländern, insbesondere aus Russland, so wie aus allen Theilen Deutschlands, jüngere Mathematiker zu **Pfaff**, wie früher nach Helmstädt so auch nach Halle kamen, um in solchen privatissimis, d. h. Vorlesungen im engsten Kreise, durch ihn zum eigenen Studium der Mathematik angeleitet zu werden, dies ist in meiner Biographie schon erwähnt worden. Mehrere sehr ausgezeichnete Gelehrte, welche als tüchtige Mathematiker, als Lehrer an Universitäten und Gymnasien nachmals sich geltend gemacht haben, könnten wir hier nahmhaft machen, für welche **Pfaff** eine solche Vorlesung gehalten hat, und welche mit dem lebhaftesten Wohlgefallen der heilsamen Anregung sich erinnern, welche durch ein Verhältniss, an das der nähere persönliche Umgang mit **Pfaff** sich leicht anschloss, ihnen erwachsen ist.

Dass mein verewigter Vater ein solches collegium privatissimum über höhere Mathematik in Helmstädt für **Gauss** gelesen hat, ist mir aus den Erzählungen meines Vaters sowie aus gelegentlichen Mittheilungen anderer mir befreundeter Gelehrter als feststehende Thatsache im Gedächtniss geblieben. Ich kann es nicht für glaublich halten, dass **Gauss** gegen **Sartorius** eine hiervon abweichende, diesen Umstand leugnende Mittheilung jemals gemacht haben sollte.

Heldrungen in Thüringen den 2. November 1856.

Dr. Carl **Pfaff.**

Nachschrift des Herausgebers.

In meiner im **Literarischen** Ber. Nr. CIV. S. 1. abgdruckten Anzeige der Schrift des Herrn v. **Sartorius** über **Gauss** habe ich gesagt, dass diese **historische** Skizze des grossen Verblichenen durch die Hingebung und Wärme des Gefühls, mit welcher sie geschrieben, jedes fühlende Herz ergreifen müsse, und habe dieselbe, mit ausdrücklicher Hindeutung darauf, dass darin nur ein allgemeines Bild des unvergesslichen Mannes entworfen, nicht seine wissenschaftlichen Entdeckungen geschildert werden sollten, den Lesern des Archivs aus Ueberzeugung zur Beachtung empfohlen. Die das Verhältniss von J. F. **Pfaff** zu **Gauss** bei des letzteren Aufenthalte in **Helmstädt** betreffende Stelle hat mich, als ich die Schrift las, **freilich auch sehr unangenehm berührt**, und zwar natürlich um so mehr, weil die Leser des Archivs aus den früheren Bänden dieser Zeitschrift sich gewiss noch erinnern werden, wie sehr von mir selbst J. F. **Pfaff** verehrt wird, und wie viel ich demselben als Schüler verdanke. Ich betrachtete aber jene Stelle damals eben als **aus dem ungemein warmen Gefühl für Gauss und dem noch ganz frischen und lebhaften Eindrucke von dem grossen Verluste, den durch seinen Tod die Wissenschaft erlitten**, unter welchem die Schrift geschrieben, hervorgegangen, und hielt es daher auch, um den wohlthuenden Eindruck, den die Schrift im Ganzen auf mich gemacht, in mir selbst nicht zu verwischen und zu trüben, für das Beste, über jene Stelle ganz zu schweigen, und zwar um so mehr, weil man, wenn ich mich über dieselbe geäussert hätte, mir gewiss entgegnet haben würde, dass ich mit dem erwähnten Verhältnisse beider Männer nicht näher bekannt sein könne, was ich auch zuzugeben gezwungen gewesen sein würde. Um so lieber ist es mir aber jetzt, dass der von den beiden Söhnen des seeligen **Pfaff** noch lebende würdige Sohn desselben, Herr Dr. Carl **Pfaff** in **Heldrungen**, über jenes Verhältniss in den obigen, von mir gern in das Archiv aufgenommenen Zeilen nähere Aufklärung gegeben hat. G.

Literarischer Bericht

CVIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Opuscoli di Leonardo Pisano, publicati da **Baldassarre Boncompagni** secondo la lezione di un codice della Bibliotheca Ambrosiana di Milano. Seconda Edizione. Firenze. Tipografia Galileiana. 1856. 8.

Wir haben schon in verschiedenen, in den Literarischen Berichten gelieferten Anzeigen unsere wärmste Anerkennung der grossen Verdienste, welche Herr **Baldassarre Boncompagni** in Rom sich durch seine Arbeiten auf dem im Ganzen noch so wenig angebauten Gebiete der Geschichte der Mathematik erwirbt, ausgesprochen. Diesen grossen Verdiensten fügt er durch die vorliegende Schrift, deren erste Auflage uns nicht bekannt geworden ist, ein neues hinzu; indem er in derselben zwei für die Geschichte der Mathematik sehr wichtige Schriften des **Leonardo** von **Pisa** veröffentlicht. Die erste dieser Schriften ist überschrieben: **Incipit flos Leonardi bigolli pisani super solutionibus quarundam questionum ad numerum et ad geometriam uel ad utrumque pertinentium**, und enthält folgende Unterabtheilungen: **Explicit prologus incipit tractatus einsdem. — De tribus hominibus pecuniam communem habentibus. — De quinque numeris reperiendis ex proportionibus datis. — De quatuor hominibus et bursa ab eis reperta questio notabilis. — De eadem re. — De quatuor hominibus bizantios habentibus. — De quatuor hominibus qui invenerunt bizantios. — Questio similis suprascripte de tribus hominibus. — Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum, phylo-**

sophum domini Imperatoris. — De auibus emendis secundum proportionem datam. — De eodem. — Item de auibus. — De compositione pertagonj equilateri in triangulum equicrurum datum. — Methodus alius soluendi similes questiones. — Inventio unde procedat inuentio suprascripta.

Die zweite Schrift ist überschrieben: **Incipit liber quadratorum compositus à leonardo pisano. Anni. M.CC.XXV.** und enthält folgende Unterabtheilungen: Hec questio predicta in prologo libri huius. — Questio mihi proposita a magistro Theodoro domini imperatoris phylosopho. —

Ganz besonders machen wir auch noch auf die Vorrede zu dieser höchst verdienstlichen Schrift des Herrn Baldassarre Boncompagni aufmerksam, die, mit der grössten Gelehrsamkeit geschrieben, eine ungemein grosse Anzahl der wichtigsten und interessantesten literarischen und historischen Notizen enthält. Wir bedauern immer lebhaft, dass die Natur unserer literarischen Berichte uns gebietet, auch bei so wichtigen und interessanten Schriften, wie die vorliegende, uns mit blossen Inhaltsanzeigen begnügen und nicht näher auf deren Gegenstand eingehen zu können. Was die vorliegende Schrift des Leonardo von Pisa insbesondere betrifft, so würden wir eine deutsche Behandlung der in derselben enthaltenen Aufgaben, natürlich mit besonderer Rücksicht auf die gleich nachher angezeigte Schrift des Herrn Angelo Genocchi, im Geiste und für die Zwecke der neueren Algebra, auch zum Gebrauche in der Schule, für verdienstlich halten, und würden zu einer solchen im Archive zu veröffentlichenden Arbeit, zu der uns selbst hinreichende Zeit und Musse fehlt, mit dem grössten Vergnügen ein Exemplar der in Deutschland wohl nicht leicht zu habenden, so sehr verdienstlichen Schrift des Herrn Baldassarre Boncompagni verabfolgen, wenn uns ein desfallsiger Wunsch ausgesprochen werden sollte. Wir halten dergleichen Arbeiten für verdienstlicher, als manche andere, in verschiedenen Schriften jetzt uns zu Gesicht kommende, und möchten gern zur Unternehmung derselben aufmuntern. Das Archiv wird denselben bereitwillig seine Spalten öffnen.

Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre Boncompagni. Note analitiche di Angelo Genocchi. Roma. 1855. 8.

Der am Ende der vorhergehenden Anzeige von uns ausge-

sprochene Wunsch ist für Italien allerdings schon in ausgezeichneter Weise durch die vorhergehende treffliche Schrift des Herrn **Angelo Genocchi** erfüllt worden, welche als ein sehr schöner Commentar zu den von Herrn **Baldassarre Boncompagni** veröffentlichten Schriften des **Leonardo von Pisa** zu betrachten ist. Dies hindert aber nicht, jenen Wunsch in Beziehung auf Deutschland hier nochmals zu wiederholen, und zwar um so mehr, weil uns eben diese Schrift von Herrn **Angelo Genocchi** überzeugt hat, wie gerechtfertigt dieser Wunsch ist und wie vielen Nutzen die gewünschte deutsche Bearbeitung der vielfach interessanten und lehrreichen Probleme unserem Schulunterrichte bringen würde, wobei es sich von selbst versteht, dass eine solche deutsche Bearbeitung durch die Schrift des Herrn **A. Genocchi** sehr wesentlich unterstützt und erleichtert werden würde. Nachdem wir auf diese Weise die Tendenz dieser Schrift im Allgemeinen deutlich genug bezeichnet zu haben glauben, erlauben wir uns noch in Kurzem deren Inhalt etwas genauer anzugeben: I. Nach einer mehr im Allgemeinen gehaltenen Einleitung über die **Flos Leonardi Bigolli pisani etc.** werden die folgenden Aufgaben im Sinne der neueren Algebra behandelt: 1°. **De tribus hominibus pecuniam communem habentibus.** 2°. **De quinque numeris reperiendis ex proportionibus datis.** 3°. **De quatuor hominibus et bursa ab eis reperta, questio notabilis.** 4°. **De eadem re.** 5°. **Super inventionem trium numerorum.** 6°. **De quatuor hominibus bizantios habentibus.** 7°. **De quatuor hominibus qui invenerunt bizantios.** 8°. **Questio similis suprascripte de tribus hominibus.** — II. 1°. **De avibus emendis secundum datam proportionem.** 2°. **De eodem.** 3°. **Item de avibus.** 4°. **Aves 15 pro denariis 16.** 5°. **Aliam huiusmodi proponam questionem.** 6°. **Item passeres.** — III. **Libro de 'quadrati.** 1°. **Trovar due quadrati la somma de 'quali sia un quadrato.** 2°. **Altro principio che serve a sciogliere lo stesso problema.** 3°. **Demostrazione del principio ora riferito.** 4°. **Altra soluzione dell 'equazione** $x^2+y^2=z^2$, **tolta dal decimo Libro della Geometria d'Euclide.** 5°. **Demostrazione del principio esposto al num. 1°.** 6°. **Data una soluzione dell 'equazione** $x^2+y^2=a^2$, **trovarne un 'altra.** 7°. **Teoremi sopra la moltiplicita degli spezzamenti d'un prodotto in quadrati.** 8°. **Le formole del numero precedente conducono ad altre maniere di sciogliere l'equazione** $x^2+y^2=z^2$. 9°. **Data una soluzione** $x=g$, $y=d$ **dell 'equazione** $x^2+y^2=c$, **dove** c **è un numero non quadrato, trovarne un 'altra.**

10. Somma della progressione naturale de' numeri quadrati. — IV. Teorica dei congrui. Es würde zu weit führen, aus einander zu setzen, was hier unter „congrui" verstanden wird; wir können aber den Lesern die Versicherung geben, dass dieser Theil der Schrift des Herrn A. Genocchi zu den interessantesten gehört. — **V. Questioni diverse intorno ai numeri quadrati.** Risolvere l'egualita duplicata $x^2+x=y^2$, $x^2-x=z^2$. — Risolvere l'egualita duplicata più generale $x^2+mx=y^2$, $x^2-mx=z^2$. — Differenze nelle serie di numeri quadrati. — Risolvere l'equazione indeterminata $z^2-y^2=\frac{b}{a}(y^2-x^2)$. — Render eguali a numeri quadrati le $n-1$ somme $x_1^2+x_2^2$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2$,...., $x_1^2+x_2^2+....+x_n^2$. — Questio mihi proposita a Magistro Theodoro domini imperatoris philosopho. — Auflösung der Gleichungen $x+y+z+x^2=t^2$, $x+y+z+x^2+y^2=u^2$, $x+y+z+x^2+y^2+z^2=v^2$. — Lemmi che occorrono per la soluzione della question precedente.

Die Leser werden aus dieser ziemlich ausführlichen Inhaltsanzeige ersehen, wie vieles Interessante in dieser für die Algebra und deren Geschichte wichtigen Schrift enthalten ist, und gewiss unserem obigen Wunsche, dass eine deutsche Bearbeitung, mit Rücksicht auf den Schulgebrauch, unternommen werden möge, beistimmen.

Ganz verwandten Inhalts ist die folgende, ebenfalls sehr empfehlungswerthe Schrift:

Interno ad alcuni problemi trattati da Leonardo Pisano nel suo liber quadratorum, brani di littere dal Sig. Angelo Genocchi a D. Baldassarre Boncompagni. Roma. 1855. 8.

Da diese Schrift mit der vorhergehenden in naher Verbindung steht, vielfach auf dieselbe Bezug nimmt und sich weiter über die besprochenen Gegenstände äussert, so muss hier noch ganz besonders auf dieselbe hingewiesen werden.

Arithmetik.

Theorie der Determinanten und ihre hauptsächlichsten Anwendungen von Dr. Francesco Brioschi, ordentlichem Professor der angewandten Mathematik

an der Universität zu Pavia. Aus dem Italienischen übersetzt. Mit einem Vorworte von Professor Schellbach. Berlin. (Duncker und Humblot.) 1856. 4.

Die Theorie der Grössenformen, welche man in verschiedenen Gestalten unter dem Namen Determinanten in die Analysis eingeführt hat, ist ein Instrument der analytischen Untersuchung, dessen grosse Wichtigkeit wir nicht besser und kürzer als Herr Professor Schellbach in seinem Vorwort zu bezeichnen wüssten, dass dasselbe nämlich den Mathematikern das Mittel darbiete, „ganze Reihen von Begriffen und Gedanken auf einmal in ihre Operationen einzuführen.“ Wegen der grossen Wichtigkeit dieser Theorie haben wir schon längst die Absicht gehabt, nach und nach eine Darstellung derselben nach ihrem neuesten Zustande in dem Archive zu liefern, wozu uns schon eine ziemlich grosse Anzahl von Vorarbeiten zu Gebote steht. Wenn wir nun hier unumwunden erklären, dass wir diese Arbeit, als jetzt nicht mehr nöthig, nicht liefern werden, so sprechen wir dadurch zugleich aus, wie sehr wir überzeugt sind, dass durch die vorliegende höchst verdienstliche Uebersetzung des trefflichen Werkes Brioschi's dem Bedürfniss vollständig abgeholfen ist, und für wie zeitgemäss wir dieselbe in jeder Beziehung halten. Wie wir hören, ist Herr Oberlehrer Bertram in Berlin der Herausgeber dieser allen Anforderungen an eine solche Arbeit vollkommen entsprechenden Uebersetzung, dem wir daher für dieselbe unseren aufrichtigsten Dank zollen, so wie auch namentlich Herrn Professor Schellbach, der doch gewiss mit die Veranlassung zu derselben gegeben und dadurch gezeigt hat, wie richtig er das Bedürfniss, dem durch diese Uebersetzung in so ausgezeichneter Weise entsprochen wird, zu würdigen verstand. Die Wichtigkeit der Schrift, die wir zur allgemeinsten und sorgfältigsten Beachtung dringend empfehlen, veranlasst uns, ihren Inhalt, so wie folgt, vollständig anzugeben. §. 1. Definitionen und Bezeichnungen. §. 2. Bildungsgesetz der Determinanten. §. 3. Allgemeine Eigenschaften der Determinanten. §. 4. Von der Auflösung der linearen algebraischen Gleichungen *). §. 5. Multiplication der

---

*) In der Vorrede bemerkt Herr Brioschi ganz mit Recht, dass als der erste Anfang der Theorie der Determinanten die von Cramer und Bezout gegebenen Regeln zur Auflösung der linearen algebraischen Gleichungen zu betrachten sind, und schenkt auch den bekannten Arbeiten von Vandermonde, Laplace u. s. w. die verdiente Beachtung. Da das Klügel'sche mathematische Wörterbuch, in dessen Supplementen im Artikel Elimination auch der Herausgeber des Archivs einen

Determinanten und deren Erhebung zu Potenzen. §. 6. Determinanten mit reciproken Elementen oder Determinanten von Determinanten. §. 7. Von Eigenschaften der Unterdeterminanten. §. 8. Von den überschlagenen und symmetrischen Determinanten. §. 9. Von den Determinanten der Wurzeln der algebraischen Gleichungen und den Determinanten der partikulären Integrale der linearen Differentialgleichungen. §. 10. Von den Functional-Determinanten. §. 11. Hesse's Determinante.

Wir empfehlen diese ausgezeichnete Uebersetzung des schönen Werks des trefflichen Brioschi nochmals zur sorgfältigsten Beachtung aus vollkommener Ueberzeugung. G.

Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der besonderen und allgemeinen Arithmetik, so wie aus der Lehre von den Gleichungen oder Algebra. Von Albert Dilling, Dr. phil. und Gymnasiallehrer zu Mühlhausen. Braunschweig (C. A. Schwetschke und Sohn. M. Bruhn.) 1857. 8.

Diese Aufgabensammlung unterscheidet sich von den meisten ihrer Schwestern dadurch, dass sie die gemeine und allgemeine Arithmetik und die Algebra in gleicher Weise berücksichtigt. Dieselbe enthält einen sehr grossen Reichthum von Aufgaben, namentlich auch in der Buchstabenrechnung, gegen deren Zweckmässigkeit, so weit sich aus einer blossen Ansicht, ohne das Buch selbst längere Zeit gebraucht zu haben, wonach bei einem solchen Buche erst ein wirklich gültiges Urtheil gefällt werden kann, urtheilen lässt, wir im Allgemeinen durchaus nichts zu erinnern wüssten. Wir glauben daher keinen Anstand nehmen zu dürfen, das Buch als ein zweckmässiges Hülfsmittel beim Unterrichte zu empfehlen.

---

eigenthümlichen Beweis der in Rede stehenden Regeln gegeben hat, in Italien nicht sehr bekannt sein dürfte, so darf sich der unterzeichnete Herausgeber wohl erlauben, bei dieser Gelegenheit an jenen von ihm gegebenen Beweis zu erinnern, und zwar um so mehr, weil derselbe in den meisten der vorzüglichsten deutschen Lehrbücher der Algebra und algebraischen Analysis Aufnahme gefunden hat, wie man z. B. in den durch wahre mathematische Strenge ausgezeichneten, und bei dieser Gelegenheit von Neuem Empfehlung verdienenden Grundzügen der algebraischen Analysis von Dr. J. Dienger, Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe. Karlsruhe, 1851. 8. S. 204 — S. 207. und dem Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik von J. H. T. Müller. Halle 1838. S. 329 — S. 335., so wie an anderen Orten, sehen kann. G.

Geometrie.

De affectione curvarum additamenta quaedam. Auctore F. S. H. Schwarz (Abhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen und Thüringen in Halle Vol. I.). Berolini. Boselmann. 1856. 4°.

Diese Empfehlung zu sorgfältiger Beachtung verdienende Schrift beschäftigt sich mit verschiedenen sehr allgemeinen, grösstentheils neuen Eigenschaften der Curven, lässt sich aber hier nicht näher anzeigen, indem wir uns mit der folgenden Angabe der Ueberschriften der einzelnen Paragraphen begnügen müssen: §. 1. De aequatione curvae n^{ti} ordinis universali. §. 2. De punctis multiplicibus pauca. §. 3. De contactu secundi ordinis. §. 4. De contactu tertii ordinis. §. 5. De singulari aequationis n^{tae} dimensionis transformatione. §. 6. De flexus contrarii punctis, quae curvis tertii ordinis insunt. §. 7. Alterа Plückeri theorematis demonstratio. §. 8. Theoremata de curvis tertii et cujus libet ordinis demonstratio.

Die Leser werden hieraus schon den Geist, in welchem diese Schrift gehalten ist, hinreichend erkennen, und Jeder, wer sich für solche ganz allgemeine Untersuchungen und Sätze interessirt, wird dieselbe nicht ohne Belehrung aus der Hand legen.

Astronomie.

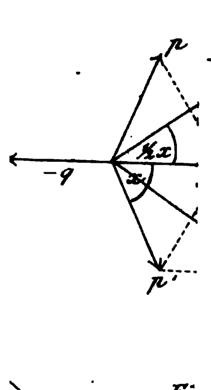
Der Jahrgang 1857 des Kalenders für alle Stände, herausgegeben von Herrn Director v. Littrow in Wien, auf dessen in mehrfacher Beziehung interessanten und lehrreichen Inhalt wir schon öfters in diesen literarischen Berichten (m. s. z. B. Nr. XCV. S. 6.) aufmerksam gemacht haben, enthält wieder einen recht verdienstlichen Aufsatz: „Ueber die neuesten Fortschritte der Astronomie“, der gewissermassen als eine Fortsetzung der in den früheren Jahrgängen gelieferten Aufsätze: „Ueber die Fortschritte der Astronomie in dem letzten Decennium“ betrachtet werden kann. Die Gegenstände, mit denen sich dieser Aufsatz in lehrreicher Weise beschäftigt, sind die folgenden: „Durchmesser und Massen der Asteroiden. — Satellit des Neptun. — Kometen. — Veränderliche Sterne. — Geschichte der beobachtenden Astronomie. (Nach R. Grant History of physical Astronomy.)“ — Als Beilage enthält der Aufsatz eine überaus vollständige „Uebersicht des Sonnensystems“ unter den beiden Abtheilungen:

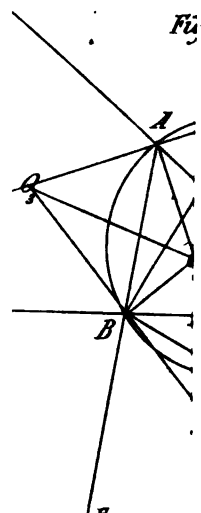
„Asteroiden“ und „Elemente sämmtlicher Planetenbahnen“, eine Uebersicht, die in solcher Vollständigkeit und in dem neuesten Zustande der Wissenschaft so vollkommen entsprechender Weise in diesem Augenblicke schwerlich an irgend einem anderen Orte anzutreffen sein möchte. Möge daher das anspruchslose Büchlein, durch dessen Herausgabe sich aber jedenfalls Herr v. Littrow fortwährend ein anerkennungswerthes Verdienst um die Verbreitung der Resultate der herrlichsten der Wissenschaften unter einem grösseren Publikum erwirbt, auch in seinem neuesten Jahrgange die wohl verdiente Beachtung finden.

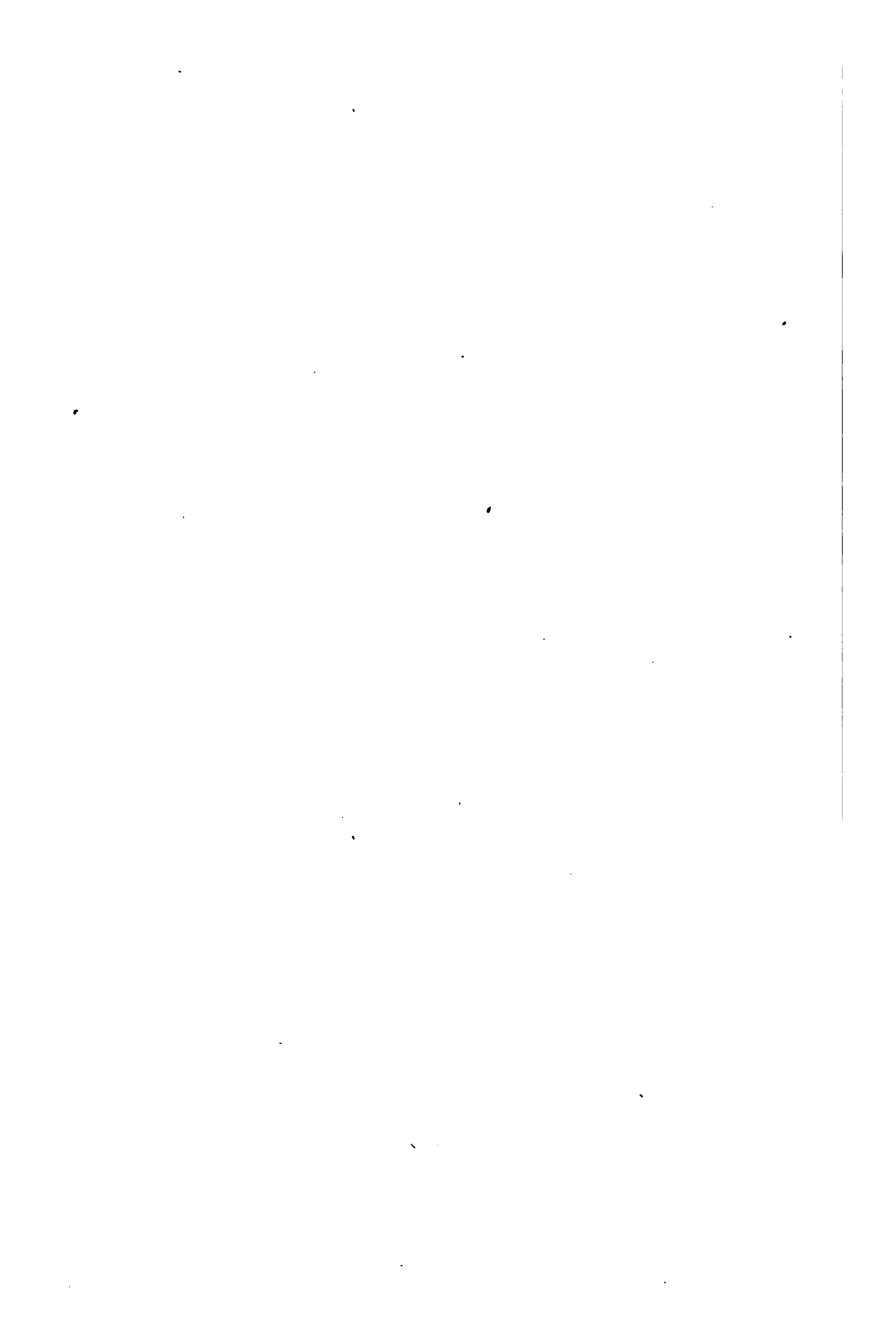
Nautik.

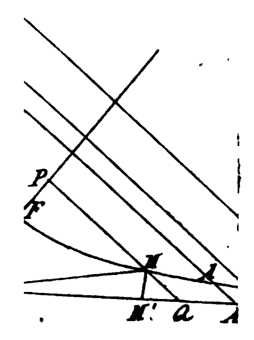
Guida allo studio dell' Astronomia nautica del Dr. F. Schaub, Professore di Astronomia nautica nell' I. R. Accademia di commercio e nautica e nell' I. R. Accademia della marina, Direttore dell' I. R. osservatorio astronomico in Trieste. Trieste. 1856. 8.

Wir haben im Literar. Ber. Nr. LXXXV. S. 1. auf die grosse Vorzüglichkeit und Zweckmässigkeit des Leitfadens für den Unterricht in der nautischen Astronomie von Herrn Professor Dr. Schaub in Triest aufmerksam gemacht und das Buch namentlich auch seiner Deutlichkeit und strengen Wissenschaftlichkeit wegen allen nautischen Lehranstalten empfohlen. Ein deutlicher Beweis für die Richtigkeit unsers Urtheils wird jetzt dadurch geliefert, dass von dem Buche unter obigem Titel so eben eine italienische Uebersetzung veranstaltet worden ist, die wir daher auch hier kurz anzuzeigen für unsere Pflicht halten, und zwar um so mehr, weil diese Uebersetzung auch einige Zusätze erhalten hat, über die wir Folgendes bemerken. Zuerst ist die „Mitternachtsverbesserung“ beigefügt worden; dann die von Herrn Dr. Bremiker in Berlin im astronomischen Jahrbuche für 1857 gegebene Formel für Monddistanzen, welche eine bequeme Anwendung gestattet, wenn der Höhenunterschied der beiden Gestirne sehr klein ist; endlich eine Modification der Littrow'schen Methode zur Auffindung der Breite und Zeit durch zwei Höhen ausser dem Meridiane, welche auch deutsch in der österreichischen Marine-Zeitschrift abgedruckt ist und hier zu besonderer Beachtung empfohlen wird; so wie wir denn überhaupt diese italienische Uebersetzung des seinem Zwecke in ausgezeichneter Weise entsprechenden Buchs der Aufmerksamkeit unserer Leser für sehr werth halten.


p
½x
−q
x
p'


A
B
F





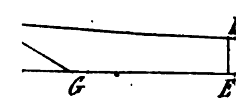


Fig. 4.

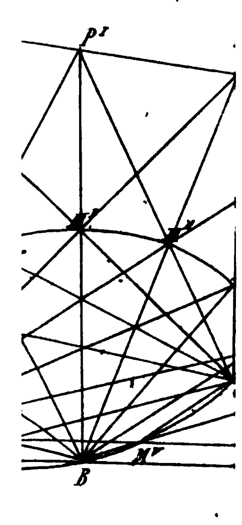
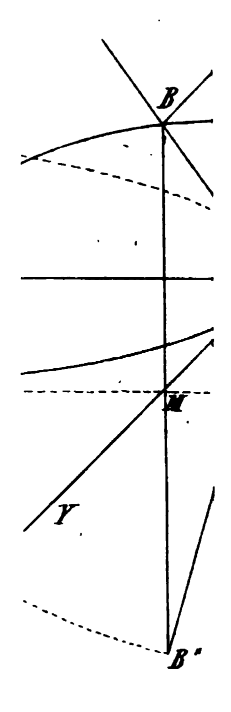
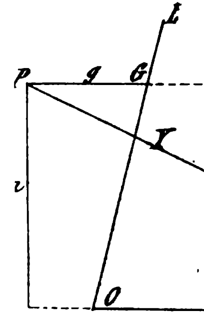


Fig. 3.





N

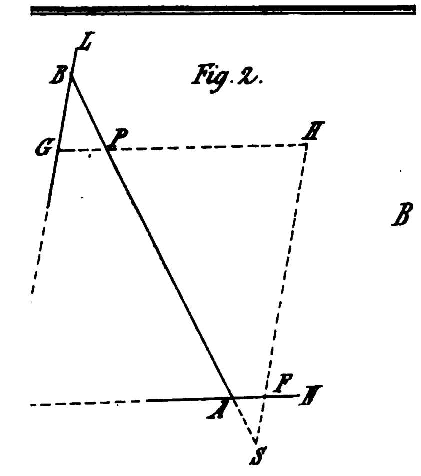
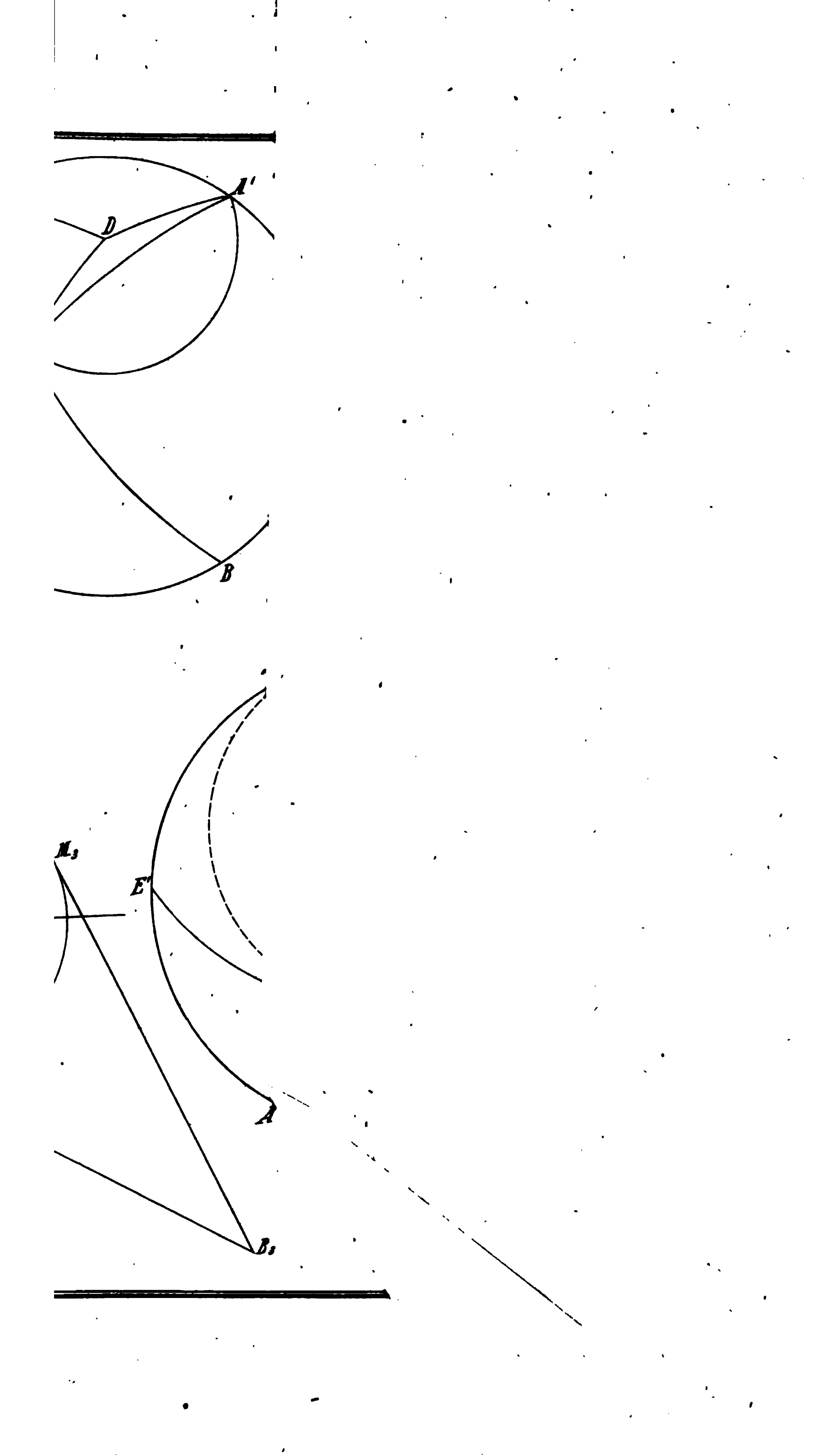
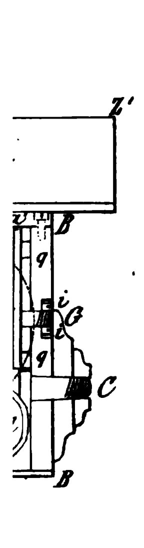


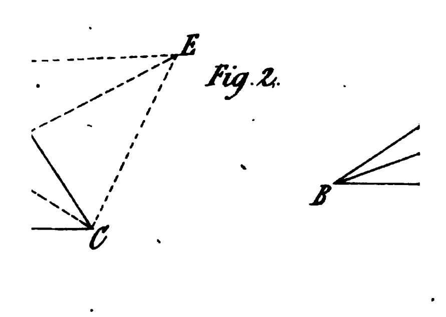
Fig. 2.

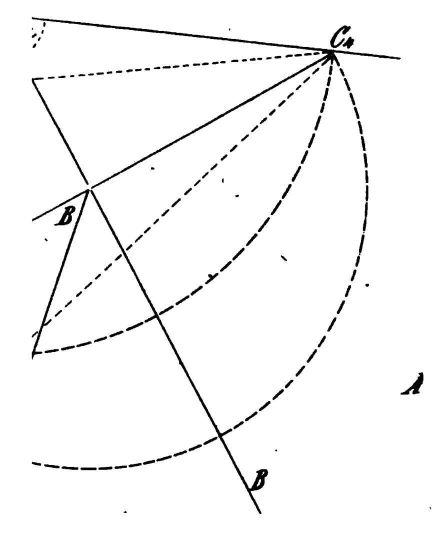
B

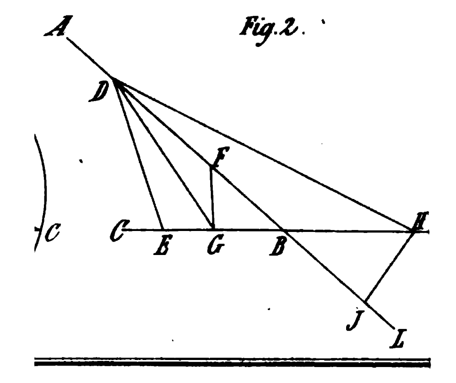
Fig. 6.

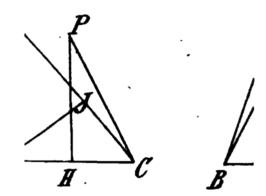

A'
D
B
M₃
E'
A
B₃




E
Fig. 2.
C
B


C
B
A
B


A
Fig. 2.
D
F
C
C
E
G
B
H
J
L



P
J
C
H
B

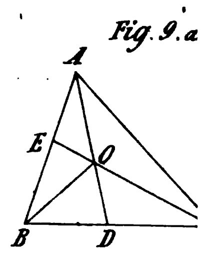


Fig. 9. a
A
E
O
B
D

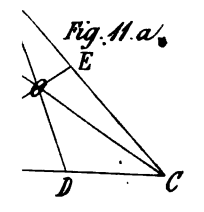
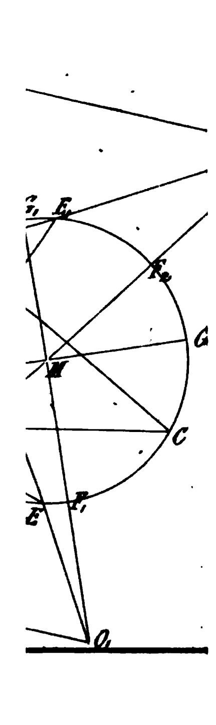


Fig. 11. a
E
O
D
C
B



D_1

D_2




FEB 16 1910
DEC 8 1912

